TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

TẠP CHÍ Toán học & Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG
JOURNAL OF MATHEMATICS AND LITERATURE IN SCHOOL

Số 583
Tháng 1 - 2026
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 63 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com



Được quét bằng CamScanner

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM TRAO TẶNG GẦN 110 000 BẢN SÁCH GIÁO KHOA CHO HỌC SINH VÙNG LŨ TỈNH QUẢNG NGÃI

Sáng ngày 25/12/2025, tại Sở Giáo dục và Đào tạo (GD&ĐT) tỉnh Quảng Ngãi, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) đã tổ chức buổi lễ trao tặng sách giáo khoa nhằm hỗ trợ các em học sinh khắc phục hậu quả thiên tai, ổn định học tập.

Tham dự buổi lễ, về phía NXBGDVN có: ông Nguyễn Chí Bính - Phó Tổng Giám đốc; bà Phạm Thị Thu Hương - Phó Giám đốc NXBGD tại TP. Đà Nẵng; ông Nguyễn Duy Nhâm - Phó Tổng Giám đốc CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng (đơn vị thành viên NXBGDVN). Về phía Sở GD&ĐT tỉnh Quảng Ngãi có: ông Nguyễn Trọng Thắng - Phó Giám đốc Sở; ông Huỳnh Nam Thắng - Phó Trưởng phòng Giáo dục Thường xuyên và Công tác học sinh, sinh viên; cùng đại diện các phòng chuyên môn: Giáo dục Mầm non và Giáo dục Tiểu học, Giáo dục Trung học, Giáo dục Thường xuyên và Công tác HSSV.



Ông Nguyễn Chí Bính - Phó Tổng Giám đốc NXBGDVN

Năm 2025, dải đất miền Trung, đặc biệt là tỉnh Quảng Ngãi đã phải đối mặt với những đợt "lũ chồng lũ" khốc liệt vào tháng 10 và tháng 11. Thiên tai không chỉ gây thiệt hại về kinh tế mà còn ảnh hưởng trực tiếp đến các trường học của tỉnh.

Thay mặt lãnh đạo NXBGDVN, ông Nguyễn Chí Bính gửi lời thăm hỏi chân thành và chia sẻ sâu sắc tới ngành Giáo dục Quảng Ngãi: "NXBGDVN luôn xác định việc hỗ trợ học sinh vùng lũ không chỉ là hoạt động thiện nguyện, mà còn là trách nhiệm xã hội, là sự đồng hành cùng ngành Giáo dục cả nước trong nhiều năm qua".

Tại buổi lễ, NXBGDVN đã trao tặng cho ngành Giáo dục tỉnh Quảng Ngãi 109.585 bản sách giáo khoa, với tổng trị giá hơn 1,562 tỷ đồng. Những cuốn sách này mang theo thông điệp tiếp sức cho các em học sinh - những "chiến binh" kiên cường vừa bước qua giông bão - có đủ hành trang tri thức để tiếp tục đến trường.

Nhân dịp này, CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng (đơn vị thành viên NXBGDVN) cũng đã trao tặng 11.948 bản sách, trị giá hơn 251 triệu đồng cho thư viện 2 trường tiểu học và 2 trường THCS tại Quảng Ngãi.



Ông Nguyễn Duy Nhâm (trái) - Phó Tổng Giám đốc Công ty CP ĐT&PTGD Đà Nẵng trao tặng sách

Được biết, chương trình hỗ trợ học sinh vùng lũ là một chiến dịch quy mô của NXBGDVN trên toàn quốc. Tính đến thời điểm này, chương trình đã trao tặng hơn 1,36 triệu cuốn sách, trị giá trên 21,4 tỷ đồng cho học sinh các vùng bị lũ lụt trên toàn quốc; hỗ trợ hơn 830 triệu đồng tiền mặt cùng nhiều phần quà thiết thực giúp các nhà trường tái thiết cơ sở vật chất sau thiên tai.

Phát biểu tại lễ tiếp nhận, ông Nguyễn Trọng Thắng - Phó Giám đốc Sở GD&ĐT tỉnh Quảng Ngãi đã ghi nhận và cảm ơn tấm lòng vàng của tập thể cán bộ, nhân viên NXBGDVN. Toàn bộ số sách NXBGDVN trao tặng sẽ được chuyển đến trực tiếp 68 điểm trường tại các địa phương. Trong đó, có nhiều điểm trường ở vùng sâu, vùng xa, vùng đồng bào dân tộc thiểu số còn rất nhiều khó khăn như các xã: Ba Vì, Ba Tô, Ba Vinh, Sơn Tây, Sơn Tây Hạ, Sơn Tây Thượng, Trà Bồng, Tây Trà Bồng...

Sau đây, hành trình tặng sách của NXBGDVN sẽ tiếp tục đến với tỉnh Quảng Trị để tiếp nối nhịp cầu yêu thương đến với học sinh miền Trung.

BAN TRUYỀN THÔNG

(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)

Được quét bằng CamScanner

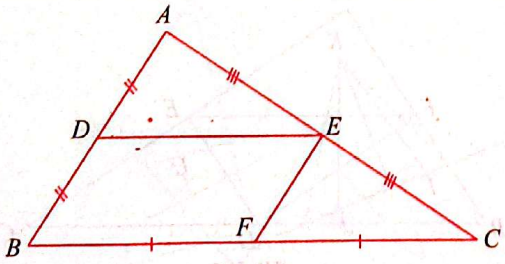
THÊM MỘT CÁCH GIẢI BÀI TOÁN 5 ĐIỂM VÀ MỘT VÀI ÁP DỤNG

NGUYỄN VĂN BẢN
(GV THCS Thanh Yên, Điện Biên)

Trong Tạp chí TH&TT số 558 (tháng 12 năm 2023) có đăng bài viết "*Một bài toán hình học hay và những vấn đề liên quan*" của tác giả Hoàng Đức Tân. Đây là bài viết hay và sâu sắc. Bài viết này đã thật sự ấn tượng với tôi và tôi đã dành sự quan tâm cho "*Bài toán 5 điểm*". Trong bài viết, tác giả đã giới thiệu cách chứng minh bài toán này của Royce Peng và thực tình tôi muốn thử sức với bài toán này bởi vẻ đẹp gọn gàng của nó. Sau một khoảng thời gian, tôi đã tìm được lời giải cho nó. Bài viết này xin giới thiệu thêm một cách giải cho "*Bài toán 5 điểm*" mà theo quan điểm cá nhân tôi là rất gần gũi với các bạn học sinh THCS, cùng với đó là một vài áp dụng. Trước tiên ta xét bài toán sau:

Bài toán 7 điểm. *Cho 7 điểm nằm trong một tam giác có diện tích là S. Chứng minh rằng có 3 điểm trong số 7 điểm đã cho tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn hoặc bằng* $\frac{1}{4}S$.

Lời giải. Ta chia tam giác đã cho thành 3 phần như hình 1.



Hình 1

Theo nguyên lí Dirichlet thì trong số 7 điểm đã cho nằm trong tam giác ABC sẽ có 3 điểm cùng nằm trong một phần.

• Nếu 3 điểm đó cùng nằm trong một tam giác thì ta có ngay điều phải chứng minh.

• Nếu 3 điểm đó cùng nằm trong hình bình hành, ta cần chứng minh diện tích của tam giác tạo bởi 3 điểm đó nhỏ hơn hoặc bằng một nửa diện tích hình bình hành.

***Bài toán thu gọn*:** Cho 3 điểm M, N, P nằm trong hình bình hành $DEFB$.

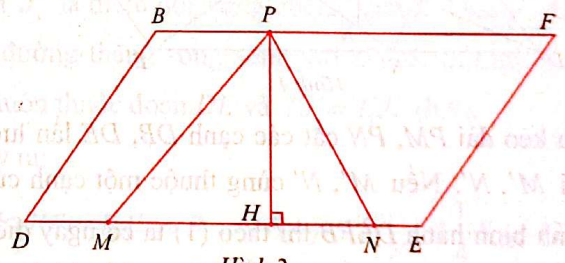
Chứng minh rằng $S_{MNP} \le \frac{1}{2}S_{DEFB}$.

Thật vậy:

• Ta xét trường hợp 3 điểm M, N, P nằm trên các cạnh của hình bình hành $DEFB$, khi đó có các khả năng sau:

+ Nếu 3 điểm M, N, P cùng nằm trên một cạnh thì có ngay điều phải chứng minh.

+ Nếu 3 điểm đó có hai điểm cùng nằm trên một cạnh (h.2).

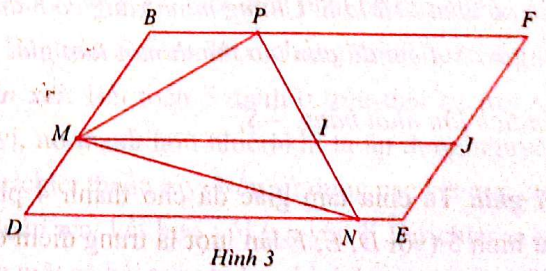


Hình 2

Suy ra: $S_{MNP} = \frac{1}{2}PH \cdot MN \le \frac{1}{2}PH \cdot DE$

$= \frac{1}{2}S_{DBFE}$ (1) (đpcm).

+ Nếu 3 điểm nằm trên 3 cạnh của hình bình hành (h.3).



Hình 3

Được quét bằng CamScanner

Qua M kẻ đường thẳng song song DE, cắt PN và EF lần lượt tại I, J. Khi đó, theo (1) ta có:

$$S_{MPI} \le \frac{1}{2} S_{MBFJ};\ S_{MNI} \le \frac{1}{2} S_{MJED}$$

$$\Rightarrow S_{MPN} = S_{MPI} + S_{MNI} \le \frac{1}{2} S_{MBFJ} + \frac{1}{2} S_{MJED}$$

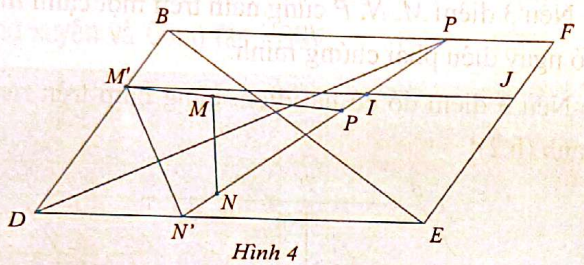
$$= \frac{1}{2} S_{DBFE} \quad (2) \text{ (đpcm).}$$

+ Khi M, N, P lần lượt nằm trên 3 cạnh khác trong hình bình hành $ABCD$ thì việc chứng minh hoàn toàn tương tự.

• Trường hợp 3 điểm M, N, P không nằm trên các cạnh của hình bình hành $DEFB$.

+ Nếu 3 điểm M, N, P cùng nằm trong một tam giác – một nửa hình bình hành thì ta có ngay điều cần chứng minh.

+ Ta chỉ cần xét trường hợp trong 3 điểm M, N, P có 2 điểm thuộc tam giác DEB, điểm còn lại thuộc tam giác BEF (h.4).



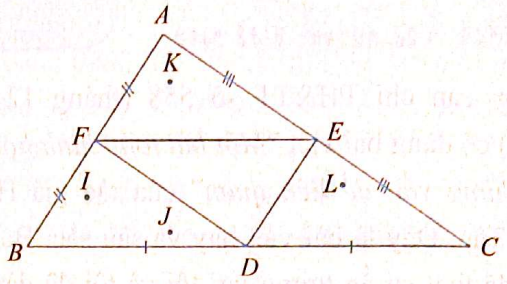
Hình 4

Ta kéo dài PM, PN cắt các cạnh DB, DE lần lượt tại M', N'. Nếu M', N' cùng thuộc một cạnh của hình bình hành $DEFB$ thì theo (1) ta có ngay điều cần chứng minh; Nếu NP cắt BF tại P' khi đó dễ thấy rằng $S_{MNP} \le S_{M'N'P'} \le \frac{1}{2} S_{DEFB}$ (theo (2)), từ đó ta có điều phải chứng minh và từ đó bài toán được chứng minh hoàn tất.

Bài toán 5 điểm. *Cho 5 điểm nằm trong một tam giác có diện tích là S. Chứng minh rằng có 3 điểm trong số 5 điểm đã cho tạo thành một tam giác có diện tích lớn nhất bằng* $\frac{1}{4} S$.

Lời giải. Ta chia tam giác đã cho thành 4 phần như hình 5 (với D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB).

Theo nguyên lí Dirichlet thì sẽ có ít nhất một phần chứa 2 điểm. Nếu 2 điểm hoặc 1 điểm đó nằm trong ΔDEF thì ta có ngay điều phải chứng minh (theo *bài toán 7 điểm*). Do vậy, ta chỉ cần xét trường hợp ΔDEF không chứa điểm nào.



Hình 5

Không mất tính tổng quát, giả sử ΔBDF chứa 2 điểm I, J và 3 điểm còn lại nằm trong $\Delta AEF, \Delta CED$ (3 điểm cùng nằm trong một tam giác thì cũng có ngay điều phải chứng minh), khi đó ta chỉ cần xét điểm K nằm trong ΔAEF, điểm L nằm trong ΔCED. Lúc này, ta cần chứng minh một trong hai tam giác KIJ, LIJ có diện tích nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{1}{4} S$. Khi đó ta có:

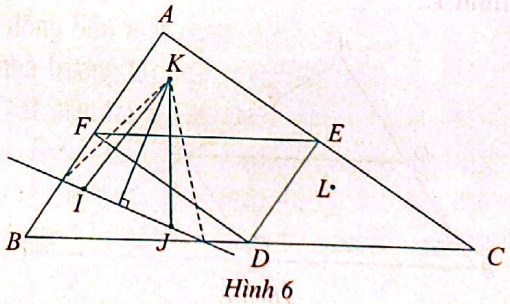
• Với hai điểm I, J nằm trong ΔBDF thì sẽ có 3 khả năng sau:

+ IJ cắt hai đoạn BD, BF;

+ IJ cắt hai đoạn BD, DF;

+ IJ cắt hai đoạn FB, FD.

Ta có một số nhận xét sau (h.6):



Hình 6

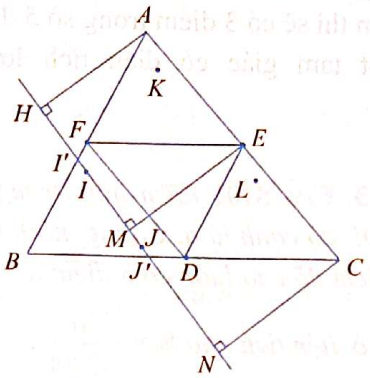
+ Diện tích ΔKIJ là lớn nhất khi $K \equiv A$ hoặc $K \equiv E$. Nếu $K \equiv E$ thì ta có ngay điều cần chứng minh (theo *bài toán 7 điểm*).

+ Diện tích ΔLIJ là lớn nhất khi $L \equiv C$ hoặc $L \equiv E$. Nếu $L \equiv E$ thì ta có ngay điều cần chứng minh (theo *bài toán 7 điểm*).

Được quét bằng CamScanner

Gọi $X = BE \cap DF$. Gọi H, M, N lần lượt là hình chiếu của A, E, C trên IJ. Khi đó ta xét các trường hợp sau:

• IJ cắt cạnh BD và BF lần tại J' và I' (h.7):



Hình 7

Giả sử $CN \geq EM \geq AH$ thì dễ thấy ngay dược diện tích ΔKIJ lớn nhất khi $K \equiv E$ mà diện tích ΔEIJ luôn nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{1}{4}S$ (theo *bài toán 7 điểm*), suy ra điều phải chứng minh.

Trường hợp $CN \leq EM \leq AH$ được chứng minh hoàn toàn tương tự.

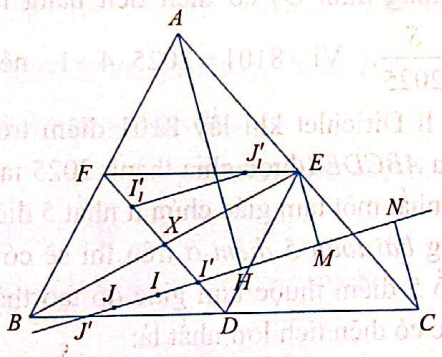
• IJ cắt cạnh BD và DF:

+ TH1: Nếu I, J thuộc đoạn BX thì $IJ \leq BX = XE$.

Suy ra: $S_{CIJ} \leq S_{BCX} \leq \frac{1}{2}S_{CBE} = \frac{1}{4}S_{ABC}$;

$$S_{AIJ} \leq S_{ABX} \leq \frac{1}{2}S_{ABE} = \frac{1}{4}S_{ABC} \quad (1).$$

+ TH2: IJ cắt đoạn thẳng BD và XD lần lượt tại J' và I' (h.8).



Hình 8

Gọi I_1' là điểm đối xứng của I' qua X. Qua I_1' ta kẻ đường thẳng song song với IJ, cắt EF tại J_1'. Vì $BDEF$ là hình bình hành nên J_1' luôn thuộc đoạn EF và dễ dàng suy ra $I'J' = I_1'J_1'$. Suy ra:

$$IJ \leq I'J' = I_1'J_1' \Rightarrow S_{CIJ} \leq S_{CI'J'} \leq S_{CI_1'J_1'} \leq \frac{1}{4}S_{ABC} \quad (2)$$

(theo *bài toán 7 điểm*).

+ TH3: IJ cắt đoạn BD và XF lần lượt tại J' và I'.

Hoàn toàn tương tự ta cũng suy ra được:

$S_{AIJ} \leq S_{AI'J'} \leq S_{AI_1'J_1'} \leq \frac{1}{4}S_{ABC}$ (3) (theo Bài toán 7 điểm).

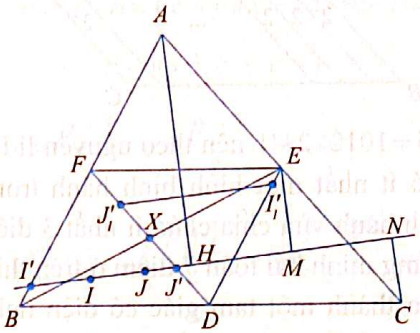
Từ (1), (2) và (3) suy ra điều phải chứng minh.

• IJ cắt cạnh FB và FD:

+ TH1: Nếu I, J thuộc đoạn BX thì $IJ \leq BX = XE$.

Suy ra: $S_{CIJ} \leq \frac{1}{4}S_{ABC}$; $S_{AIJ} \leq \frac{1}{4}S_{ABC}$ (1).

+ TH2: IJ cắt đoạn XD và FB lần lượt tại J' và I'.



Hình 9

Gọi J_1' là điểm đối xứng của J' qua X. Qua J_1' ta kẻ đường thẳng song song với IJ, cắt ED tại I_1', I_1' luôn thuộc đoạn DE và $I'J' = I_1'J_1'$ (h.9).

Suy ra:

$$IJ \leq I'J' = I_1'J_1' \Rightarrow S_{CIJ} \leq S_{CI'J'} \leq S_{CI_1'J'} \leq \frac{1}{4}S_{ABC} \quad (2)$$

(theo *bài toán 7 điểm*).

+ TH3: IJ cắt đoạn FX và FB lần lượt tại J' và I'.

Hoàn toàn tương tự ta cũng suy ra được:

$S_{AIJ} \leq S_{AI'J'} \leq S_{AI_1'J_1'} \leq \frac{1}{4}S_{ABC}$ (3) (theo *bài toán 7 điểm*).

Từ (1), (2) và (3) suy ra điều phải chứng minh.

Vậy Bài toán 5 điểm được chứng minh hoàn tất.

Nhận xét: Bài toán 5 điểm ở trên thật sự hay và thú vị, nó mạnh hơn nhiều khi ta áp dụng nguyên lí Dirichlet thuần túy. Nếu sử dụng các kết quả của bài toán này kết hợp với nguyên lí Dirichlet ta sẽ được một số bài toán tổ hợp hình học hay và khó!

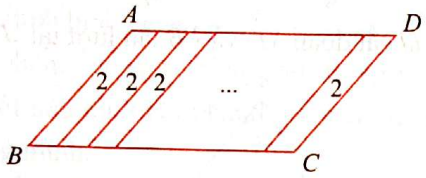
Được quét bằng CamScanner

MỘT VÀI ÁP DỤNG

Lưu ý: Bằng thước thẳng và compa, ta có thể chia một đoạn thẳng cho trước thành nhiều đoạn thẳng bằng nhau.

Bài toán 1. *Cho 2025 điểm nằm trong hình bình hành có diện tích 2024 (đvdt). Chứng minh rằng trong số 2025 điểm đã cho, có 3 điểm tạo thành một tam giác có diện tích không lớn hơn 1 (đvdt).*

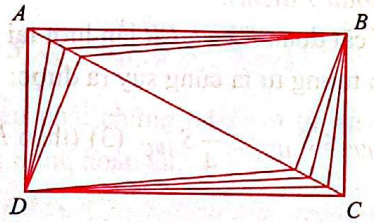
Lời giải. Chia hình bình hành đã cho thành 1012 hình bình hành nhỏ có diện tích bằng 2 (đvdt), bằng cách chia hai cạnh đối diện của hình bình hành đã cho thành 1012 đoạn thẳng bằng nhau.



Vì $2025 = 1012 \cdot 2 + 1$ nên theo nguyên lí Dirichlet thì sẽ có ít nhất một hình bình hành trong 1012 hình bình hành vừa chia chứa ít nhất 3 điểm, theo cách chứng minh bài toán 7 điểm ở trên thì 3 điểm đó sẽ tạo thành một tam giác có diện tích không vượt quá một nửa diện tích của hình bình hành nhỏ tức là không vượt quá 1 (đvdt) (đpcm).

Bài toán 2. *Cho 8097 điểm nằm trong hình chữ nhật ABCD có $AB = 46$ cm; $BC = 44$ cm. Chứng minh rằng trong số 8097 điểm đã cho luôn có 3 điểm tạo thành một tam giác có diện tích lớn nhất là $\frac{1}{4}$ cm^2.*

Lời giải.



Từ bài ra ta có: $S_{ABCD} = 46 \cdot 44 = 1024 (\text{cm}^2)$.

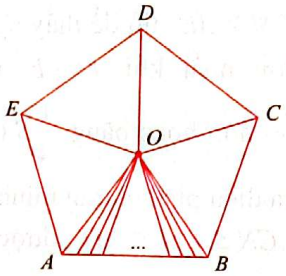
Nối A với C, ta được hai tam giác vuông ABC và ADC. Trên AC ta lấy 1011 điểm liên tiếp (khác A, C) để được 1012 đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau.

Nối D và B với 1011 điểm vừa lấy trên AC khi đó ta được 2024 tam giác nhỏ có diện tích bằng nhau và bằng 1 cm^2.

Vì $8097 = 2024 \cdot 4 + 1$ nên theo nguyên lí Dirichlet khi lấy 8097 điểm trong hình chữ nhật $ABCD$ (được chia thành 2024 tam giác) sẽ có ít nhất một hình tam giác chứa ít nhất 5 điểm. Theo *bài toán 5 điểm* ở trên thì sẽ có 3 điểm trong số 5 điểm đó tạo thành một tam giác có diện tích lớn nhất là $\frac{1}{4}$ cm^2.

Bài toán 3. *Cho 8101 điểm nằm trong ngũ giác đều ABCDE có cạnh là a. Chứng minh rằng trong số 8101 điểm đã cho luôn có 3 điểm tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn $\frac{7a^2}{32400}$.*

Lời giải.



Từ giả thiết của bài toán, ta dễ tính được diện tích của ngũ giác đều $ABCDE$ là:

$$S = \frac{5a^2}{4} \cdot \cot 36^\circ \approx \frac{5a^2}{4} \cdot 1{,}37638 < \frac{5a^2}{4} \cdot 1{,}4 = \frac{7a^2}{4}.$$

Chia mỗi cạnh của ngũ giác thành 405 đoạn thẳng nhỏ bằng nhau. Gọi O là tâm của ngũ giác đều $ABCDE$, khi đó ta nối O với mỗi đầu mút của các đoạn thẳng vừa chia, ta được $5 \cdot 405 = 2025$ tam giác (chung đỉnh O) có diện tích bằng nhau và bằng $\frac{S}{2025}$. Vì $8101 = 2025 \cdot 4 + 1$ nên theo nguyên lí Dirichlet khi lấy 8101 điểm trong ngũ giác đều $ABCDE$ (được chia thành 2025 tam giác) sẽ có ít nhất một tam giác chứa ít nhất 5 điểm.

Áp dụng *bài toán 5 điểm* ở trên thì sẽ có 3 điểm trong số 5 điểm thuộc tam giác đó tạo thành một tam giác có diện tích lớn nhất là:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{S}{2025} < \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{7a^2}{4}}{2025} = \frac{7a^2}{32400} \text{ (đpcm).}$$

Lưu ý: Việc kết hợp các bài toán trên với các kĩ thuật chia tách hình và nguyên lí Dirichlet ta sẽ có được nhiều bài toán hay và phức tạp hơn nữa.

Được quét bằng CamScanner

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN TỈNH NGHỆ AN

Năm học 2025-2026

Câu I a) *Biết rằng*

$$(1^2+1)(2^2+1)(3^2+1)\cdots(n^2+1)$$

chia hết cho 1297^2, *với* n *là số nguyên dương. Chứng minh* $n \geq 649$.

b) *Tìm các số nguyên dương* a, b *thoả mãn các điều kiện sau:* $a-b$ *là số nguyên tố,* a,b *là số chính phương trình và* $a+b-3$ *chia hết cho 5.*

Lời giải.

a) Giả sử $n \leq 648$. Chú ý rằng 1297 là số nguyên tố. Với mọi số nguyên dương a thuộc $\{1;2;3;...;n\}$, ta có:

$$a^2+1 \leq n^2+1 < 4n^2 < 1297^2,$$

suy ra a^2+1 không chia hết cho 1297^2.

Theo giả thiết ta có:

$$1297^2 \mid (1^2+1)(2^2+1)...(n^2+1),$$

do đó tồn tại hai số b, c khác nhau thuộc $\{1;2;3;...;n\}$ thỏa mãn b^2+1, c^2+1 cùng chia hết cho 1297. Khi đó:

$$1297 \mid (b^2+1)-(c^2+1) = (b-c)(b+c).$$

Suy ra 1297 là ước của $b-c$ hoặc $b+c$.

Trong hai trường hợp thì

$$1297 \leq b+c \leq 647+648 = 1295.$$

Ta có điều vô lý. Vậy $n \geq 649$.

b) Đặt $p = a-b$ và $d = (a,b)$, suy ra:

$$d \mid a-b = p.$$

TH1: $d = p$ thì đặt $a = dx^2, b = dy^2$ trong đó x, y nguyên dương và $(x,y)=1$.

Ta có:

$$p = a-b = d(x^2-y^2) = d(x-y)(x+y)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 1.$$

Vì $x+y > x-y > 0$ (vô lí) nên không tồn tại x, y thoả mãn.

TH2: $d=1$ thì đặt $a = x^2, b = y^2$ trong đó x, y nguyên dương và $(x,y)=1$.

Ta có: $p = a-b = (x-y)(x+y)$, suy ra:

$$x-y = 1, x+y = p.$$

Khi đó $x = \dfrac{p+1}{2}$, $y = \dfrac{p-1}{2}$. Do đó:

$$a+b = x^2+y^2 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{p^2+1}{2}.$$

Mà $5 \mid a+b-3 = \dfrac{p^2+1}{2} - 3 = \dfrac{p^2-5}{2}$ thì $5 \mid p^2-5$.

Do vậy $p=5$. Khi đó $x=3, y=2$ thì $a=9, b=4$.

Vậy $a=9, b=4$.

Câu II. a) *Giải phương trình* $x^2 + \dfrac{4x^2}{(x-2)^2} = 5$.

b) *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x^3-9y = 18x-5y^3 \\ x^2+4 = 5(y^2-1) \end{cases}$.

Lời giải. a) Với $x \neq 2$, phương trình ban đầu tương đương với:

$$x^2 + 4x.\frac{x}{x-2} + \frac{4x^2}{(x-2)^2} = 5 + \frac{4x^2}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{2x}{x-2}\right)^2 = 5 + \frac{4x^2}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{(x-2)^2} = 5 + \frac{4x^2}{x-2}$$

Được quét bằng CamScanner

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-2}+1\right)\left(\frac{x^2}{x-2}-5\right)=0.$$

TH1: $\frac{x^2}{x-2}+1=0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-2}{x-2}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+2)}{x-2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

TH2: $\frac{x^2}{x-2}-5=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+10}{x-2}=0$ (1).

Do $x^2-5x+10>0$ nên (1) vô nghiệm.

Vậy $x=1, x=-2$ là các nghiệm của phương trình ban đầu.

b) Ta có: $\left\{\begin{array}{l} x^3-9y=18x-5y^3 \ (1) \\ x^2+4=5(y^2-1) \quad (2) \end{array}\right.$

Từ (2) có: $x^2=5y^2-9$.

Từ (1) ta có: $x^3-18x+5y^3-9y=0$

$$\Leftrightarrow x^3-18x+x^2y=0 \Leftrightarrow x(x^2+xy-18)=0.$$

TH1: $x=0 \Rightarrow y^2=\frac{9}{5} \Leftrightarrow y=\pm\frac{3}{\sqrt{5}}$.

TH2: $x^2+xy=18 \Rightarrow 2(5y^2-x^2)=x^2+xy$,

hay $3x^2+xy-10y^2=0 \Leftrightarrow (x+2y)(3x-5y)=0$.

• Nếu $x=-2y \Rightarrow 9=5y^2-x^2=y^2$.

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} x=-6, \ y=3 \\ x=6, \ y=-3 \end{array}\right.$

• Nếu $3x=5y \Rightarrow 9=5y^2-\frac{25}{9}y^2=\frac{20}{9}y^2$

$$\Rightarrow y^2=\frac{81}{20}.$$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} x=\frac{3\sqrt{5}}{2}, y=\frac{9\sqrt{5}}{10} \\ x=-\frac{3\sqrt{5}}{2}, y=-\frac{9\sqrt{5}}{10} \end{array}\right.$

Vậy hệ PT có các nghiệm là: $\left(0,\frac{3}{\sqrt{5}}\right), \left(0,-\frac{3}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{3\sqrt{5}}{2},\frac{9\sqrt{5}}{10}\right), \left(-\frac{3\sqrt{5}}{2},-\frac{9\sqrt{5}}{10}\right), (-6,3), (6,-3)$.

Câu III. *Kết thúc năm học, thầy giáo chọn ngẫu nhiên bốn trong năm bạn lớp 9A gồm: An, Bình, Cường, Dũng, Thảo để dự hội nghị tuyên dương.*

a) *Tính xác suất để trong bốn bạn được chọn có bạn An.*

b) *Ban tổ chức chuẩn bị bốn phần quà khác khau dành riêng cho mỗi bạn lớp 9A tham dự. Tại hội nghị, do quên ghi tên nên ban tổ chức đã phát ngẫu nhiên quà cho bốn bạn, mỗi bạn nhận một phần quà. Tính xác suất của biến cố "có ít nhất một bạn nhận đúng phần quà của mình".*

Lời giải. a) Ta thấy số cách chọn 4 bạn bất kì trong 5 bạn chính là số cách chọn một bạn ở lại, tức là 5 cách.

Trong 5 cách đó thì có 4 cách có sự xuất hiện của An. Vậy xác suất cần tìm là $\frac{4}{5}$.

b) Số cách để phát 4 phần quà tuỳ ý cho 4 bạn là 4.3.2.1 = 24. Ta đếm số trường hợp mà không ai trong bốn bạn nhận đúng quà của mình. Giả sử có bốn bạn A, B, C, D. Trước tiên, nếu A lấy bất kì quà của ba bạn còn lại thì có 3 cách. Giả sử A nhận của B. Khi đó, ta có 3 trường hợp sau:

Bạn	B	C	D
Nhận của	A	D	C
Nhận của	C	D	A
Nhận của	D	A	C

Tương tự nếu A nhận của C ta có 3 trường hợp, A nhận của D ta có 3 trường hợp. Vậy có tất cả là 9 trường hợp mà không ai trong bốn bạn nhận đúng quà của mình. Vậy để ít nhất một bạn nhận đúng quà của mình có $24-9=15$ trường hợp.

Được quét bằng CamScanner

Vậy xác suất để "có ít nhất một bạn nhận đúng quà của mình" là: $\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$.

Câu IV. *Cho tam giác ΔABC nhọn ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. Các đường cao AD, BE, CF của ΔABC cắt nhau tại H. Đường kính AK của đường tròn (O) cắt EF tại N.*

a) *Chứng minh tứ giác $BKNF$ nội tiếp và $\widehat{AKD}=\widehat{AHN}$.*

b) *Đường thẳng qua C song song với AB cắt đường thẳng BE tại M. Gọi Q là giao điểm của BC và HK, đường thẳng EF cắt QM tại P. Chứng minh ΔBPC vuông.*

c) *Giả sử A, C và đường tròn (O) cố định, $AC < R\sqrt{3}$, điểm B di động trên cung lớn AC. Xác định vị trí điểm B để tổng chu vi của các tam giác ΔAEF, ΔBFD, ΔCED lớn nhất.*

Lời giải. a) Vì AK là đường kính nên:

$$\widehat{ACK}=\widehat{ABK}=90^0.$$

Ta chứng minh được: $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$(c.g.c) nên $\widehat{AEF}=\widehat{ABC}$. Suy ra:

$$\widehat{OAC}+\widehat{AEF}=\frac{180^0-\widehat{AOC}}{2}+\widehat{AEF}$$

$$=\frac{180^0-2\widehat{ABC}}{2}+\widehat{ABC}=90^0.$$

Suy ra AK vuông góc với EF.

Như vậy $\widehat{KNF}=\widehat{ABK}=90^0$. Do đó tứ giác $BFNK$ nội tiếp. Khi đó, chứng minh được:

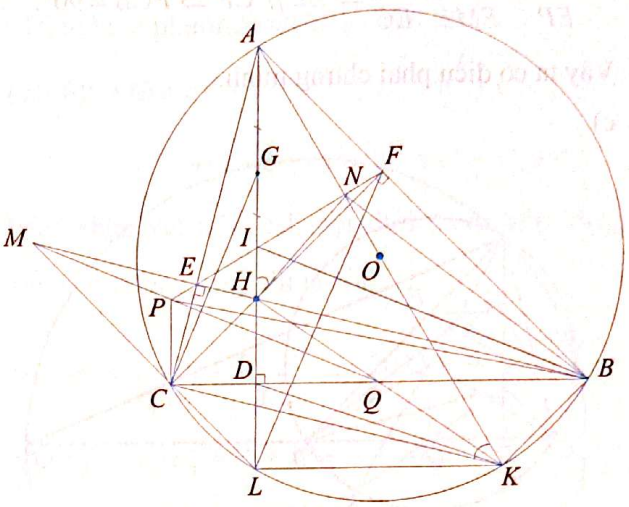
$$\Delta ANF \backsim \Delta ABK \ \text{(g.g)}.$$

Suy ra: $\frac{AN}{AB}=\frac{AF}{AK}\Leftrightarrow AN.AK=AB.AF.$

và $\Delta AFH \backsim \Delta ADB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AF}{AD}=\frac{AH}{AB}$

$\Leftrightarrow AD.AH=AB.AF=AN.AK.$

Suy ra: $\frac{AN}{AH}=\frac{AD}{AK}$. Mặt khác, có $\widehat{DAK}$ chung, suy ra $\Delta AHN \backsim \Delta AKD$ (c.g.c) nên $\widehat{AHN}=\widehat{AKD}$.



b) Ta chứng minh được $BHCK$ là hình bình hành nên BC, HK cắt nhau tại trung điểm Q của mỗi đoạn. Gọi I là giao của AH và EF, G là trung điểm của AH.

Ta chứng minh được $\Delta MBC \backsim \Delta CAH$ từ đó có $\Delta ACG \backsim \Delta BMQ$ (c.g.c) (1).

Gọi L là giao AD với (O). Ta có tứ giác $NILK$ nội tiếp do $\widehat{ILK}=\widehat{INK}=90°$ và

$$AB.AF=AN.AK=AI.AL\Rightarrow\frac{AB}{AI}=\frac{AL}{AF}.$$

Kết hợp với góc BAL chung, suy ra:

$$\Delta BIA \backsim \Delta LFA\Rightarrow\widehat{ABI}=\widehat{ALF}\ \ (2).$$

Mà DQ song song LK do cùng vuông với AL nên D là trung điểm của HL. Ta có:

$$HF.HC=HA.HD=2HG.HD=HG.HL\Rightarrow\frac{HF}{HL}=\frac{HG}{HC}.$$

Mà $\widehat{FHL}=\widehat{GHC}$ suy ra $\Delta FHL \backsim \Delta GHC$ (c.g.c).

Do đó $\widehat{FLH}=\widehat{GCH}$. Kết hợp với (2) ta được:

$$\widehat{ABI}=\widehat{GCH}.$$

Mà $\widehat{ABE}=\widehat{ACH}$ nên

$$\widehat{IBE}=\widehat{ACG}=\widehat{BMQ}\ \text{(do (1))}.$$

Được quét bằng CamScanner

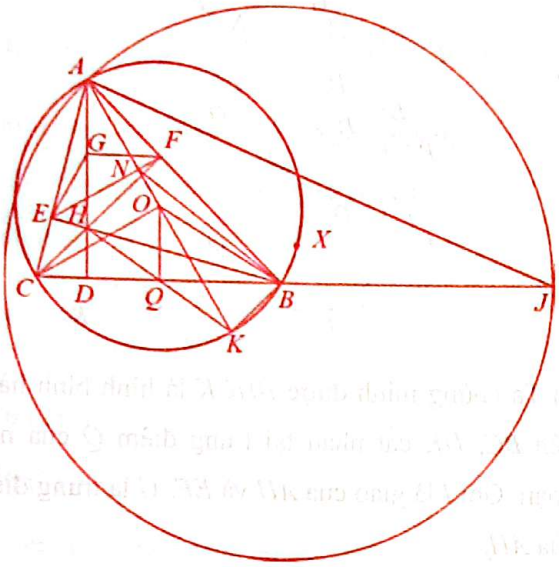
Do đó BI song song với MP.

Theo định lý Thalès ta có:

$$\frac{EI}{EP}=\frac{EB}{EM}=\frac{EA}{EC}\Rightarrow AI\ //\ CP\Rightarrow \widehat{PCB}=90^\circ.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

c)



Ta có tổng chu vi của ΔAEF, ΔBDF, ΔCDE là:

$$T=AF+AE+EF+BF+DF+BD+CE+CD+DE$$
$$=AB+AC+BC+DE+DF+EF.$$

Ta thấy OQ là đường trung bình của tam giác AHK. Suy ra $AH=2OQ$. Ta có:

$$\widehat{EGF}=2\widehat{BAC}=\widehat{BOC}$$

$$\Rightarrow \Delta EGF\backsim\Delta BOC\Rightarrow \frac{EF}{BC}=\frac{GE}{OC}=\frac{GH}{R}=\frac{OQ}{R}$$

$$\Rightarrow EF=BC.\frac{OQ}{R}=\frac{2S_{\Delta OBC}}{R}.$$

Tương tự ta có: $EF+DE+DF$

$$=2.\frac{S_{\Delta OBC}+S_{\Delta OAB}+S_{\Delta OAC}}{R}=\frac{2S_{\Delta ABC}}{R}.$$

Như vậy $T=AB+BC+CA+2.\frac{S_{\Delta ABC}}{R}$.

Ta thấy diện tích của ΔABC đạt giá trị lớn nhất khi B là điểm chính giữa cung lớn AC.

Ta lấy trên tia đối BC điểm J sao cho $BA=BJ$, ta có $\widehat{ABC}=\frac{\widehat{AOC}}{2}$ không đổi.

Gọi X là trung điểm cung lớn AC.

Ta có $\widehat{AXC}=\widehat{ABC}=2\widehat{AJC}$ nên J thuộc (X,XA) cố định.

Như vậy $BC+BA=BC+BJ=JC$ đạt giá trị lớn nhất khi JC là đường kính hay B trùng với X.

Chú ý rằng do A cố định nên AC có độ dài không đổi. Do đó, tổng $BC+BA+AC$ đạt giá trị lớn nhất khi B là điểm chính giữa cung lớn AC.

Vậy tổng chu vi của ΔAEF, ΔBDF, ΔCDE đạt giá trị lớn nhất khi điểm B chính giữa cung lớn AC.

Câu V. *Cho hai số thực a và b thoả mãn các điều kiện sau:*

i) $a<b\le 420$.

ii) *Với mọi số thực x, y, z thoả mãn:*

$$a\le x\le b,\ a\le y\le b,\ a\le z\le b,$$

ta luôn có $(x+y+z-420)^2\le\frac{1}{105}xyz$.

Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $T=a-b$.

Lời giải.

Đặt $x=105x_1$, $y=105y_1$, $z=105z_1$, với

$a_1\le x_1,y_1,z_1\le b_1$ trong đó $a=105a_1, b=105b_1$.

Khi đó $a_1b_1\le 4$ và $(x_1+y_1+z_1-4)^2\le x_1y_1z_1$ (1).

Đặt $x_1=2+x_2, y_1=2+y_2, z_1=2+z_2$.

Khi đó (1) trở thành:

$$(x_2+y_2+z_2+2)^2\le(x_2+2)(y_2+2)(z_2+2)$$

$$\Leftrightarrow x_2^2+y_2^2+z_2^2\le x_2y_2z_2+4\ (2).$$

Với $m=a_1-2\le x_2,y_2,z_2\le b_1-2=n$.

Ta chọn $x_2=y_2=z_2=m$ thay vào (2) thì

Được quét bằng CamScanner

$3m^2 \le m^3+4 \Leftrightarrow (m+1)(m-2)^2 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -1.$

Ta chọn $x_2 = y_2 = n,\ z_2 = m$ thay vào (2) và

$$2-m = 4-a_1 = \frac{1}{105}(420-a) > 0$$

thì có $2n^2+m^2 \le mn^2+4$

$\Leftrightarrow (n^2-m-2)(m-2) \ge 0 \Rightarrow n^2 \le m+2.$

• Nếu $n \ge 1$, thì:

$n \le n^2 \Rightarrow b_1 - a_1 = n-m \le n^2-m \le 2.$

• Nếu $n \le 1$ và có $m \ge -1$ suy ra:

$b_1 - a_1 = n-m \le 2.$

Vậy $\max(b_1-a_1) = 2 \Leftrightarrow m=-1,\ n=1.$

Hay $\max(b-a) = 210.$

Khi $m=-1,\ n=1$ thì ta có:

$a = 105a_1 = 105(m+2) = 105,$

$b = 105b_1 = 105(n+2) = 315.$

Ngược lại, với $m=-1,\ n=1$ ta có:

$-1 \le x_2,\ y_2,\ z_2 \le 1.$

Suy ra $x_2^2, y_2^2, z_2^2 \le 1$ và $-1 \le x_2y_2z_2.$

Khi đó $x_2^2+y_2^2+z_2^2-x_2y_2z_2-4 \le 0$ (đúng).

Vậy $\max T = 210$ và dấu bằng xảy ra khi $a=105$ và $b=315.$

Câu VI. *Trên bảng có dãy số 1; 2; 3;...; 2025 ta thực hiện như sau: Nếu trên bảng có 4 số $a; b; c; d$ sao cho $d = a+b+c$ thì ta xóa 4 số đó và viết 3 số $a+b;\ b+c;\ c+a$ lên bảng. Giả sử tại một thời điểm trên bảng còn n số $a_1; a_2;...; a_n$. Chứng minh rằng $a_1^4+a_2^4+a_3^4+\cdots+a_n^4-9$ chia hết cho 12 và $n \ge 1520.$*

HD-Đáp số.

Ta có nhận xét về bất biến sau các bước thực hiện:

• Tổng của ba số mới là:

$$(a+b)+(b+c)+(c+a) = 2(a+b+c)$$
$$= a+b+c+d.$$

• Tổng bình phương của ba số mới là:

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2 = a^2+b^2+c^2$$
$$+(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Theo nhận xét trên, tại một thời điểm trên bảng còn n số $a_1; a_2;...; a_n$ thì ta có:

$$a_1+a_2+...+a_n = 1+2+...+2025 = \frac{2025.2026}{2}.$$

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2 = 1^2+2^2+...+2025^2$$
$$= \frac{2025.2026.(2.2025+1)}{6} = 675.1013.5051.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$(a_1+a_2+...+a_n)^2 \le n\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)$$
$$\Rightarrow n \ge \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2} \ge 1520.$$

Ta thấy $a_1^4-a_1^2 = a_1^2(a_1-1)(a_1+1) \vdots 6.$

Nếu a_1 chẵn thì a_1^2 chia hết cho 4. Ngược lại, a_1 lẻ thì $(a_1-1)(a_1+1)$ chia hết cho 4.

Như vậy $a_1^4-a_1^2 \vdots \text{BCNN}(4,6) = 12.$ Hay $a_1^4,\ a_1^2$ có cùng số dư khi chia cho 12.

Do đó, $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2-9,\ a_1^4+a_2^4+...+a_n^4-9$ có cùng số dư khi chia cho 12.

Mà $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2-9 \vdots 12$ (giả thiết) nên suy ra $a_1^4+a_2^4+a_3^4+...+a_n^4-9$ chia hết cho 12 và $n \ge 1520$ (điều phải chứng minh).

NGUYỄN TRẦN HOÀNG
(SV Khoa Toán Tin, ĐHSP Hà Nội)

Giới thiệu

Được quét bằng CamScanner

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN

Năm học 2026 - 2027

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. *(2,0 điểm)*

a) Cho đa thức $P(x)=ax^2+bx+c$. Biết $P(x)$ chia cho $x+1$ dư 3, $P(x)$ chia cho x dư 1 và $P(x)$ chia cho $x-1$ dư 5. Tìm các hệ số a, b, c.

b) Cho các số a, b, x, y thỏa mãn $ab\neq 0, a+b\neq 0$,

$$\frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{1}{a+b}; x^2+y^2=1.$$

Chứng minh rằng:

b$_1$) $ay^2=bx^2$;

b$_2$) $\frac{x^{200}}{a^{100}}+\frac{y^{200}}{b^{100}}=\frac{2}{(a+b)^{100}}$;

c) Tìm tất cả các số x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{617}$.

Bài 2. *(2,0 điểm)*

a) Rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}.$$

b) Tìm m để phương trình:

$$(x-2)(x-3)(x+4)(x+5)=m,$$

có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 3. *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình:

$$x^2-x-4=2\sqrt{x-1}(1-x).$$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3+xy^2-10y=0\\x^2+6y^2=10\end{cases}$.

Bài 4. *(2,5 điểm)*. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung $BC=R\sqrt{3}$ cố định. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi E là điểm đối xứng với B qua AC và F và điểm đối xứng với C qua AB. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và ACF cắt nhau tại K (K không trùng A). Gọi H là giao điểm của BE và CF.

a) Chứng minh KA là phân giác trong góc BKC và tứ giác $BHCK$ nội tiếp.

b) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác $BHCK$ lớn nhất, tính diện tích lớn nhất của tứ giác đó theo R.

c) Chứng minh AK luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5. *(1,5 điểm)*

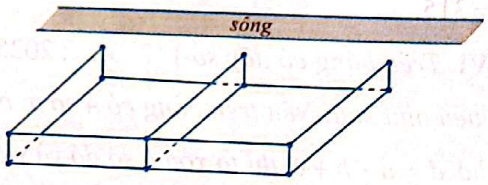
a) Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=1.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{y^2z^2}{x(y^2+z^2)}+\frac{z^2x^2}{y(z^2+x^2)}+\frac{x^2y^2}{z(x^2+y^2)}.$$

b) Bác Nam lên kế hoạch làm hàng rào cho khu đất hình chữ nhật, để bảo vệ rau trồng của mình. Bác rào 3 mặt xung quanh và 1 hàng rào ở giữa, chia đôi khu đất, để trồng rau, một mặt không rào hướng về phía bờ sông (như hình vẽ). Biết rằng chi phí để rào hàng rào chiều dài khu đất là 60 nghìn đồng/mét. 3 hàng rào theo chiều rộng có chi phí là 50 nghìn đồng/mét và tổng chi phí cho làm hàng rào là 15 triệu đồng. Hỏi bác Nam có thể rào được khu đất có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



c) Cho hình bình hành $ABCD$, kẻ 17 đường thẳng sao cho mỗi đường thẳng chia $ABCD$ thành hai hình thang có tỉ số diện tích bằng $\frac{1}{3}$. Chứng minh rằng trong 17 đường thẳng có 5 đường thẳng đồng quy.

HÀ VĂN NHÂN

(GV THCS Hoằng Xuân, Hoằng Giang, Thanh Hóa)

Giới thiệu

Được quét bằng CamScanner



NHỮNG SAI LẦM THƯỜNG GẶP TRONG BÀI TOÁN TỔ HỢP – XÁC SUẤT VÀ HƯỚNG KHẮC PHỤC

NGUYỄN THANH HẢI
(GV THPT Triệu Sơn 4, Thanh Hoá)

Nhằm nhận diện những sai lầm phổ biến mà học sinh thường mắc phải khi giải các bài toán thuộc chuyên đề này, việc chỉ ra cho các em biết mình đếm sai còn quý hơn cả việc cung cấp cho các em lời giải của bài toán, bởi điều đó giúp các em hiểu bản chất vấn đề và tránh lặp lại lỗi tư duy tương tự. Từ đó, bài viết đề xuất những phương án khắc phục hiệu quả, góp phần nâng cao tư duy lôgic và độ chính xác trong giải toán.

Bài 1. *Có bao nhiêu cách chia 4 bạn học sinh vào hai tổ là tổ 1 và tổ 2 sao cho:*

a) *Một tổ nhận 3 học sinh và một tổ nhận 1 học sinh.*

b) *Mỗi tổ đều nhận 2 học sinh.*

Lời giải của bạn Tý.

a) Chọn 3 học sinh từ 4 học sinh và chọn 1 tổ từ 2 tổ để nhận 3 học sinh này, có $C_4^3.C_2^1=8$ cách.

Tổ còn lại nhận 1 học sinh còn lại, có 1 cách.

Theo quy tắc nhân, có $8.1=8$ cách.

b) Chọn 2 học sinh từ 4 học sinh và chọn 1 tổ từ 2 tổ để nhận 2 học sinh này, có $C_4^2.C_2^1=12$ cách.

Tổ còn lại nhận 2 học sinh còn lại, có 1 cách.

Theo quy tắc nhân, có $12.1=12$ cách.

Nhận xét. Bài toán với kết quả không nhiều, nên ta có thể liệt kê để nhìn rõ các trường hợp xảy ra.

Giả sử 4 học sinh kí hiệu là A, B, C và D. Khi đó:

Câu a)

Tổ 1	Tổ 2
ABC	D
D	ABC
BCD	A
A	BCD
CDA	B
B	CDA
DAB	C
C	DAB

Câu b)

Tổ 1	Tổ 2
AB	CD
CD	AB
AC	BD
BD	AC
DA	BC
BC	DA

Như vậy, lời giải câu a cho kết quả chính xác, còn câu b thì kết quả sai. Vậy câu b sai ở đâu?

Phân tích lỗi sai: Ở ngay bước đầu, giả sử chọn được 2 học sinh là AB, chọn được tổ 1 để nhận hai học sinh này, như vậy tổ 1-AB, tổ 2-CD. Nhưng cũng trong bước chọn này, có thể xảy ra 2 học sinh được chọn là CD và tổ được chọn là tổ 2, khi đó tổ 2-CD và tổ 1-AB. Dẫn đến bị trùng lặp.

Nên với câu b, do hai tổ đều nhận số học sinh như nhau, việc phân biệt hai tổ chỉ là việc chọn học sinh nào để đưa vào tổ, từ đó có lời giải như sau:

Lời giải. Bài toán được chia làm 2 bước, bước 1 chọn 2 học sinh cho một tổ, bước 2 chọn 2 học sinh cho tổ còn lại.

Tổ 1 có số cách chọn học sinh là $C_4^2=6$ cách.

Tổ 2 nhận 2 học sinh còn lại, có 1 cách.

Suy ra số cách phân chia thoả mãn là $6.1=6$ cách.

Bài 2. *Có bao nhiêu cách trao hết 6 món quà khác nhau cho 3 người, mà người nào cũng nhận được ít nhất một món quà.*

Lời giải của bạn Tý. Có 3 trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1: Một người nhận 1 món quà, một người nhận 2 món quà, một người nhận 3 món quà: $C_6^1.C_3^1.C_5^2.C_2^1$ cách.

Trường hợp 2: Một người nhận 4 món quà và hai người còn lại nhận 1 món quà: $C_6^4.C_3^1.C_2^1$ cách.

Trường hợp 3: Mỗi người nhận 2 món quà:

$$C_6^2.C_3^1.C_4^2.C_2^1 \text{ cách.}$$

Vậy có:

$$C_6^1.C_3^1.C_5^2.C_2^1+C_6^4.C_3^1.C_2^1+C_6^2.C_3^1.C_4^2.C_2^1=990$$

cách trao quà.

Được quét bằng CamScanner

Phân tích lỗi sai: Ở trường hợp 3, mắc lỗi trong cách đếm khi chia quà cho những người được số quà bằng nhau. Những người nhận số quà như nhau thì chỉ tính mỗi cách chia quà cho họ.

Lời giải 1. Có 3 trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1: Một người nhận 1 món quà, một người nhận 2 món quà, một người nhận 3 món quà, có $3!C_6^1.C_5^2.C_3^3=360$ cách.

Trường hợp 2: Một người nhận 4 món quà, hai người lại nhận 1 món quà, có $C_6^4.C_3^1.C_2^1=90$ cách.

Trường hợp 3: Mỗi người nhận 2 món quà:

• Phát quà cho người thứ nhất có C_6^2 cách.

• Phát quà cho người thứ hai có C_4^2 cách.

• Phát quà cho người còn lại có C_2^2 cách.

Suy ra trường hợp này có $C_6^2.C_4^2.C_2^2=90$ cách.

Vậy có $360+90+90=540$ cách trao quà thoả mãn.

Lời giải 2. Mỗi món quà có 3 khả năng trao cho ba người nên có 3^6 cách. Trong cách chia này xảy ra những trường hợp có 1 người hoặc 2 người không nhận được món quà nào.

• Trường hợp có đúng một người không nhận được món quà nào, có $3\left(2^6-2\right)$ cách.

• Trường hợp có đúng 2 người không nhận được món quà nào, có 3 cách.

Vậy số cách chia thoả mãn:

$$3^6-3\left(2^6-2\right)-3=540 \text{ cách.}$$

Bài 3. *Một trường THPT có 8 lớp 10, mỗi lớp cử 2 học sinh đi dự buổi họp của đoàn trường. Trong buổi họp ban tổ chức cần chọn ra 4 học sinh từ 16 học sinh của khối 10 để vào đội thanh niên xung kích nhà trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho trong 4 học sinh được chọn có đúng 2 học sinh cùng lớp?*

Lời giải của bạn Tý. Chọn 2 học sinh cùng lớp (chọn 1 lớp từ 8 lớp), có $C_8^1=8$ cách.

Chọn học sinh thứ ba từ 14 học sinh còn lại có 14 cách.

Chọn học sinh thứ tư từ 12 học sinh (13 học sinh còn lại, bỏ đi học sinh cùng lớp với học sinh thứ 3 đã chọn trước đó) có 12 cách.

Suy ra số cách chọn thoả mãn yêu cầu là

$$8.14.12=1344 \text{ cách.}$$

Phân tích lỗi sai: Cách đếm này đã bị lặp khi chọn học sinh thứ ba và thứ tư, vì giữa hai học sinh này không có phân biệt nhau về nhiệm vụ hay vị trí gì. Cách chọn trên sẽ là đúng nếu như có thêm giả thiết phân biệt vị trí, chức vụ... cho hai học sinh này, ví dụ như "...trong hai em học sinh khác lớp, một em phân làm tổ trưởng, một em làm tổ phó".

Lời giải 1. Chọn 2 học sinh cùng lớp có C_8^1 cách.

Chọn 2 học sinh bất kỳ từ 14 học sinh còn lại có C_{14}^2, tuy nhiên cách đếm này có 7 cách chọn phải hai học sinh cùng lớp. Suy ra, chọn hai học sinh khác lớp từ 14 học sinh còn lại là C_{14}^2-7.

Theo quy tắc nhân, có $C_8^1.\left(C_{14}^2-7\right)=672$ cách chọn thoả mãn.

Lời giải 2. Chọn 2 học sinh cùng lớp có C_8^1 cách.

Chọn 2 lớp từ 7 lớp còn lại có C_7^2 cách, ở lớp thứ nhất chọn 1 học sinh, lớp thứ 2 chọn 1 học sinh nên có $C_7^2.2.2$ cách chọn 2 học sinh khác lớp từ 14 học sinh còn lại.

Theo quy tắc nhân, có $C_8^1.C_7^2.2.2=672$ cách chọn thoả mãn.

Bài 4. *Có 2 cặp vợ chồng và 4 đứa con đi chơi cùng nhau. Có bao nhiêu cách xếp 8 người này thành một hàng để chụp ảnh lưu niệm sao cho 2 bà vợ cũng như 2 ông chồng không đứng cạnh nhau.*

Lời giải của bạn Tý.

Bước 1: Xếp 4 đứa con trước có 4! cách.

Bước 2: Bốn đứa trẻ này tạo ra 5 khoảng trống và chúng được xem như những vách ngăn. Chọn 2 khoảng trống từ 5 khoảng trống đó để xếp 2 bà vợ có A_5^2 cách.

Được quét bằng CamScanner

Sau khi xếp được 4 đứa trẻ và 2 bà vợ thì 6 người này tạo ra 7 khoảng trống và họ được xem như những vách ngăn.

Bước 3: Chọn 2 khoảng trống từ 7 khoảng trống đó để xếp 2 ông chồng có A_7^2 cách.

Theo quy tắc nhân có $4!A_5^2.A_7^2 = 20160$ cách xếp thoả mãn.

***Phân tích lỗi sai*:** Lời giải sai từ bước 2, dẫn đến thiếu đi trường hợp:

CON-CON-VỢ-VỢ-CON-CON,

mà sau này ở bước 3 có thể xếp giữa 2 bà vợ là một trong hai người chồng vào được. Bổ sung trường hợp này, ta có lời giải sau:

Lời giải 1.

Trường hợp 1: Giữa 2 bà vợ có ít nhất 1 người con.

Trường hợp này là lời giải của bạn Tý, ta có:

$$4!A_5^2.A_7^2 = 20160 \text{ cách.}$$

Trường hợp 2: Giữa 2 bà vợ không có người con nào (tức là có 1 ông chồng đứng giữa).

Chọn một ông chồng và xếp đứng giữa hai bà vợ có $2.2 = 4$ cách.

Xem bộ ba người trên là một, xếp cùng 5 người còn lại (4 đứa con và 1 ông chồng) có $6!$ cách.

Suy ra có $4.6! = 2880$ cách.

Vậy có $20160 + 2880 = 23040$ cách xếp hàng thỏa mãn.

Lời giải 2. Xếp bất kỳ 8 người này thành một hàng có $8!$ cách.

- Xếp 2 bà vợ cạnh nhau có $2!7!$ cách.
- Xếp 2 ông chồng cạnh nhau có $2!7!$ cách.

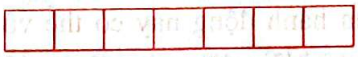
Trong trường hợp 2 bà vợ cạnh nhau hoặc 2 ông chồng cạnh nhau theo cách đếm trên, đều có chung nhau trường hợp cả 2 bà vợ cạnh nhau và 2 ông chồng cũng cạnh nhau, do đó ta đếm thêm trường hợp sau:

- Số cách xếp 2 ông chồng cạnh nhau và 2 bà vợ cũng cạnh nhau có $2!2!6!$ cách.

Vậy có $8! - 2!7! - 2!7! + 2!2!6! = 23040$ cách xếp hàng thỏa mãn.

Bài 5. *Cho tập $A = \{M; N; E; F; K; W; I; J\}$, có bao nhiêu cách viết thành hàng ngang một dãy gồm 7 ký tự (các ký tự là các phần tử lấy từ tập A) sao cho trong dãy đó có 3 ký tự liên tiếp là "WIN"?*

Lời giải của bạn Tý. Xem dãy gồm 7 ký tự, mỗi ký tự được viết vào 1 ô như hình sau.



Bước 1: Chọn 3 ô liên tiếp từ 7 ô để điền bộ "WIN", nên có 5 cách.

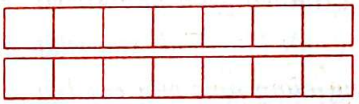


Bước 2: 4 ô còn lại, mỗi ô tùy ý chọn một phần tử từ 8 phần tử của tập A, nên có 8^4 cách điền.

Suy ra có $5.8^4 = 20480$ cách.

***Phân tích lỗi sai*:** Lời giải này, đã đếm trùng 2 lần khi trong dãy ký tự có chứa tới 2 bộ "WIN".

Ở bước 1: Chọn 3 ô liên tiếp từ 7 ô để điền bộ "WIN" có 5 cách, như vậy có thể xảy ra tình huống:



Ở tình huống thứ nhất, sang bước 2, 4 ô còn lại là điền bất kỳ nên cũng có thể xảy ra tiếp như sau:

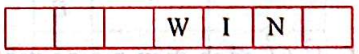


Tương tự, ở tình huống thứ hai, sang bước 2, 4 ô còn lại là điền bất kỳ nên có thể xảy ra tiếp như sau:



Dẫn đến hai dãy ký tự này là một (tức bị trùng), thành thử được đếm tới 2 lần.

Lời giải 1. Điền bộ "WIN" có 5 cách, 4 ô còn lại có 8^4 cách điền, suy ra có 5.8^4 cách.



Tuy nhiên theo cách điền trên xảy ra trùng nhau khi có tới 2 bộ "WIN" trong dãy.

Điền 2 bộ "WIN" có 3 cách, ô còn lại có 8 cách điền, suy ra có $3.8 = 24$ cách.

Số cách viết thỏa mãn là: $5.8^4 - 24 = 20456$.

Được quét bằng CamScanner

Lời giải 2. Gọi S_n là số dãy có n ký tự mà không chứa bộ "WIN".

Để lập một dãy độ dài n không chứa "WIN":

• Ta lấy một dãy độ dài $n-1$ không chứa "WIN" và thêm vào một ký tự bất kỳ (từ 8 ký tự lấy từ tập A đã cho) vào cuối, nên có $8.S_{n-1}$ cách.

• Tuy nhiên hành động này có thể vô tình tạo ra "WIN" ở cuối dãy, điều này xảy ra khi dãy $n-1$ kết thúc bằng cụm "WI" và ta thêm "N" vào.

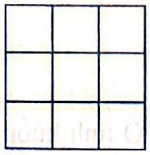
Dãy kết thúc bằng "WI" mà không chứa "WIN" trước đó có số lượng đúng bằng S_{n-3} (là các dãy $n-1$ mà tận cùng là "WI").

Suy ra $S_n = 8S_{n-1} - S_{n-3}$.

Dễ thấy $S_0 = 1; S_1 = 8; S_2 = 8^2 \Rightarrow S_7 = 2076696$.

Số cách viết thỏa mãn là: $8^7 - S_7 = 20456$.

Bài 6. *Cho bảng ô vuông 3×3 như hình vẽ. Người ta điền ngẫu nhiên các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 vào bảng, mỗi ô điền một số và mỗi số điền một lần. Tính xác suất để mỗi hàng cũng như mỗi cột bất kỳ đều chứa ít nhất một số chẵn.*



Lời giải của bạn Tý. Số cách điền 9 chữ số vào 9 ô ngẫu nhiên theo đề bài là 9! cách.

Đếm số cách mà có một hàng hoặc một cột trong bảng không có số chẵn (tức là có một hàng hoặc một cột nào đó trong bảng chứa toàn số lẻ).

Bước 1: Chọn một hàng hoặc một cột chứa toàn số lẻ, có 6 cách.

Bước 2: Chọn 3 chữ số lẻ và điền vào hàng hoặc cột đã chọn có A_5^3 cách.

Bước 3: Điền 6 chữ số còn lại vào bảng, có 6! cách.

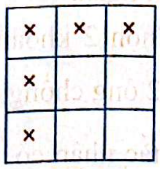
Suy ra có $6.A_5^3.6!$ cách điền mà có một hàng hoặc một cột chứa toàn chữ số lẻ.

Xác suất cần tính là : $P = \dfrac{9! - 6.A_5^3.6!}{9!} = \dfrac{2}{7}$.

Phân tích lỗi sai: Ở bước 1, giả sử chọn được 1 hàng để điền vào đó 3 số lẻ như hình hình 1, khi sang bước 3, 2 chữ số lẻ còn lại có thể được điền như hình hình 2, vô tình trùng với trường hợp ở bước 1 khi chọn được một cột để điền 3 số lẻ.



Hình 1



Hình 2

Lời giải 1. (Bổ sung lời giải của Tý)

Chọn 1 hàng, 1 cột điền 5 chữ số lẻ, có $3.3.5!$ cách.

Điền 4 chữ số chẵn còn lại vào bảng, có 4! cách.

Suy ra xác suất cần tính là:

$$P = \frac{9! - \left(6.A_5^3.6! - 3.3.5!.4!\right)}{9!} = \frac{5}{14}.$$

Lời giải của bạn Tèo. Số cách điền 9 chữ số vào 9 ô ngẫu nhiên theo đề bài là 9! cách.

Đếm số cách điền để mỗi hàng, mỗi cột bất kỳ đều có chứa ít nhất 1 số chẵn.

Chọn 1 ô ở cột 1 để điền 1 chữ số chẵn có 3 cách.

Chọn 1 ô ở cột 2 để điền 1 chữ số chẵn có 2 cách (tránh hàng mà ô ở cột 1 đã chọn).

Chọn 1 ô ở cột 3 để điền 1 chữ số chẵn có 1 cách (tránh 2 hàng mà 2 ô ở cột 1, 2 đã chọn).

Điền 3 chữ số chẵn từ 4 chữ số chẵn vào 3 ô đã chọn được ở trên, có A_4^3 cách.

Điền 6 chữ số còn lại vào bảng có 6! cách.

Suy ra xác suất cần tìm là: $P = \dfrac{3.2.1.A_4^3.6!}{9!} = \dfrac{2}{7}$.

Phân tích lỗi sai: Ở bước chọn 3 ô ở 3 cột điền số chẵn như cách đếm trên làm thiếu đi các trường hợp có 1 hàng và 1 cột đều chứa 2 số chẵn (như hình vẽ bên) mà vẫn thoả mãn yêu cầu.



Lời giải 2. (Bổ sung lời giải của Tèo).

Chọn 1 hàng và 1 cột có $3.3 = 9$ cách.

Chọn 4 ô (bỏ đi ô mà hàng và cột chung nhau), điền 4 chữ số chẵn có 4! cách.

Điền 5 chữ số lẻ còn lại vào bảng, có 5! cách.

Suy ra xác suất cần tính là:

$$P = \frac{3.2.1.A_4^3.6! + 9.4!.5!}{9!} = \frac{5}{14}.$$

Được quét bằng CamScanner

Lời giải 3. (Một cách tiếp cận khác cho bài toán)

Ta đơn giản hoá bài toán, xác suất của bài toán cũng chính là xác suất tô ngẫu nhiên 4 ô từ bảng 9 ô, sao cho hàng nào, cột nào cũng có ô được tô.

Bước 1: Do có 1 cột được tô 2 ô nên chọn 2 ô từ 1 trong 3 cột có $C_3^2.C_3^1=9$ cách.

Bước 2: Hai cột còn lại, mỗi cột chọn 1 ô có $3.3=9$ cách, nhưng có $2.2=4$ trường hợp trong bảng, một hàng không có ô nào được chọn, nên số cách chọn

2 ô còn lại thoả mãn là $9-4=5$ cách.

Suy ra xác suất cần tính là $P=\dfrac{9.5}{C_9^4}=\dfrac{5}{14}$.

Bài 7. *Có 2 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 5 học sinh đến từ 5 lớp khác nhau của khối 11. Xếp ngẫu nhiên vào 10 ghế, kê thành 2 hàng đối diện, mỗi hàng 5 ghế. Tính xác suất để không có 2 học sinh cùng lớp ngồi đối diện nhau.*

Lời giải của bạn Tý. Số cách xếp bất kỳ 10 học sinh vào 10 ghế là 10! cách.

Đếm cách xếp không có 2 học sinh nào ngồi đối diện là cùng lớp, ta chia 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: Ngồi đối diện với 2 học sinh lớp 12A là 2 học sinh khối 11.

Suy ra ngồi đối diện với 3 học sinh lớp 12B là 3 học sinh còn lại của khối 11. Xếp 5 học sinh khối 11 vào một hàng có 5! cách. Xếp 5 học sinh còn lại vào một hàng còn lại có 5! cách.

Ở mỗi cặp ngồi đối diện có 2 cách hoán đổi cho nhau, suy ra có 2^5 cách.

Nên có $5!.5!.2^5$ cách.

Trường hợp 2: Có ít nhất 1 học sinh lớp 12A ngồi đối diện với 1 học sinh lớp 12B.

Bước 1: Chọn cặp ngồi đối diện là 1 học sinh lớp 12A và 1 học sinh lớp 12B có $2.3=6$ cách.

Còn lại 8 học sinh, gồm 2 học sinh lớp 12B, 1 học sinh lớp 12A và 5 học sinh khối 11.

Bước 2: Học sinh thứ nhất của lớp 12B có 6 cách chọn 1 học sinh ngồi đối diện để không cùng lớp.

Học sinh còn lại của lớp 12B có 5 cách chọn 1 học sinh ngồi đối diện để không cùng lớp. Chọn 3 vị trí cho 3 cặp ngồi đối diện nhau và hoán đổi giữa 2 hàng ở trong mỗi cặp có $A_5^3.2^3$ cách.

Xếp 4 học sinh còn lại vào 4 ghế còn lại có 4! cách.

Nên có $6.6.5.A_5^3.2^3.4!$ cách.

Xác suất cần tính là:

$$P=\frac{5!.5!.2^5+6.6.5.A_5^3.2^3.4!}{10!}=\frac{44}{63}.$$

Phân tích lỗi sai: Ở trường hợp 2, đã đếm 2 lần trường hợp ngồi đối diện với 2 học sinh lớp 12A là 2 học sinh lớp 12B.

Thật vậy, theo cách chọn đó, ở bước 1 có thể chọn được cặp A_1B_1 hoặc chọn được cặp A_2B_3.

• Bước 1, cặp được chọn là A_1B_1 thì sang bước 2, học sinh B_3 cũng có khả năng bắt được A_2 để ngồi đối diện, dẫn đến có 2 cặp là A_1B_1 và A_2B_3.

• Bước 1, cặp được chọn là A_2B_3 thì sang bước 2, học sinh B_1 cũng có khả năng bắt được A_1 để ngồi đối diện, dẫn đến có 2 cặp là A_1B_1 và A_2B_3.

Lời giải 1. (Khắc phục lời giải của Tý)

Xét trường hợp cả 2 học sinh lớp 12A có người ngồi đối diện là 2 học sinh lớp 12B.

Có $2.3=6$ cách chia 2 cặp, xếp 2 cặp này vào dãy ghế và hoán đổi hàng ở mỗi cặp có $A_5^2.2^2$.

Xếp 6 học sinh còn lại có 6! cách.

Suy ra có $6.A_5^2.2^2.6!$ cách.

Xác suất cần tính là:

$$P=\frac{5!.5!.2^5+6.6.5.A_5^3.2^3.4!-6.A_5^2.2^2.6!}{10!}=\frac{38}{63}.$$

Lời giải 2. Xếp 3 học sinh lớp 12B vào dãy ghế để tránh ngồi đối diện nhau có 10.8.6 cách.

B				
		B	B	

Nếu học sinh A_1 ngồi đối diện 1 học sinh lớp 12B thì có 3.6 cách xếp 2 học sinh lớp 12A.

Nếu học sinh A_1 không ngồi đối diện học sinh lớp 12B thì có 4.5 cách xếp 2 học sinh lớp 12A.

Xếp 5 học sinh khối lớp 11 có 5! cách.

Được quét bằng CamScanner

Suy ra xác suất cần tính là:

$$P=\frac{10.8.6\left(3.6+4.5\right).5!}{10!}=\frac{38}{63}.$$

Lời giải 3. Xếp 2 học sinh lớp 12A để không ngồi đối diện có 10.8 cách.

A				
		A		

Xếp 3 học sinh lớp 12B để không có 2 học sinh nào ngồi đối diện.

• Xếp bất kỳ 3 học sinh lớp 12B vào 8 ghế còn trống, có A_8^3 cách.

• Trường hợp có 2 học sinh lớp 12B ngồi đối diện: Chọn 2 học sinh từ 3 học sinh lớp 12B có C_3^2 cách, tiếp theo xếp 2 em này ngồi đối diện nhau (chọn cột và xếp) có 3.2 cách, học sinh còn lại của lớp 12B có 6 lựa chọn để ngồi.

Suy ra số cách xếp 3 học sinh 12B mà không có 2 học sinh nào ngồi đối diện là $A_8^3-C_3^2.3.2.6$ cách.

Xếp 5 học sinh khối lớp 11 có 5! cách.

Suy ra xác suất cần tính là:

$$P=\frac{10.8\left(A_8^3-C_3^2.3.2.6\right).5!}{10!}=\frac{38}{63}.$$

Lời giải 4. (Một cách tiếp cận khác cho bài toán)

• Tính xác suất mà học sinh lớp 12A ngồi đối diện nhau: Xếp 1 học sinh 12A ngồi tùy ý vào dãy ghế, tiếp đó để em còn lại ngồi đối diện thì em này sẽ chọn chiếc ghế đối diện bạn lớp mình đã ngồi từ 9 ghế còn trống. Suy ra xác suất 2 học sinh lớp 12A ngồi đối diện là $\frac{1}{9}$.

• Tính xác suất mà học sinh lớp 12B ngồi đối diện nhau: Chọn 2 em từ 3 em có 3 cách. Tương tự như trên, xác suất 2 em này ngồi đối diện nhau là $\frac{1}{9}$, suy ra xác suất trong trường hợp này là $3.\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$.

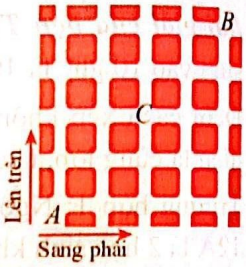
• Tính xác suất mà học sinh lớp 12B ngồi đối diện, đồng thời học sinh lớp 12A cũng ngồi đối diện nhau (hai trường hợp vừa tính ở trên trùng nhau trường hợp này): Chọn 2 học sinh từ 3 học sinh lớp 12B xếp vào dãy ghế để ngồi đối diện nhau, xác suất là $3.\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$, tiếp theo xếp 2 học sinh lớp 12A vào 8 ghế còn lại và cũng ngồi đối diện nhau, xác suất là $\frac{1}{7}$. Suy ra xác suất cần tính trong trường hợp này là $\frac{1}{3}.\frac{1}{7}=\frac{1}{21}$.

Xác suất có học sinh cùng lớp ngồi đối diện là:

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{3}-\frac{1}{21}=\frac{25}{63}.$$

Suy ra xác suất không có học sinh cùng lớp ngồi đối diện là: $1-\frac{25}{63}=\frac{38}{63}$.

Bài 8. *Một robot giao hàng tự động xuất phát từ vị trí A của một khu đô thị được quy hoạch ô bàn cờ (như hình vẽ). Mỗi tuyến phố trong khu đô thị coi như một cạnh của một hình vuông. Robot xuất phát từ vị trí A chỉ có thể di chuyển sang phải hoặc lên trên để đến vị trí B (với xác suất như nhau mỗi khi có sự lựa chọn). Tính xác suất robot đi qua vị trí trung tâm C trong hành trình.*



Lời giải của bạn Tý. Gọi D là biến cố: "Robot đi qua vị trí trung tâm C".

Số con đường đi từ A đến B là C_8^4, suy ra số phần tử của không gian mẫu là $n\left(\Omega\right)=C_8^4$.

Từ A đi đến C, robot có C_4^2 con đường để đi; từ C đi đến B, robot cũng có C_4^2 con đường để đi.

Suy ra số con đường robot đi từ A đến B qua C là

$$n\left(D\right)=\left(C_4^2\right)^2.$$

Xác suất cần tính là $P\left(D\right)=\frac{\left(C_4^2\right)^2}{C_8^4}=\frac{18}{35}$.

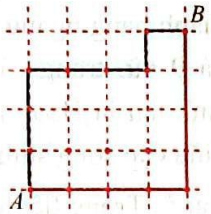
Phân tích lỗi sai: Chỉ tính xác suất theo công thức $P\left(A\right)=\frac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}$ khi các kết quả của phép thử trong

Được quét bằng CamScanner

không gian mẫu đồng khả năng.

Các kết quả đồng khả năng như gieo 1 đồng xu cân đối, đồng chất, khi đó mặt sấp và mặt ngửa xuất hiện là 50-50, tức xác suất là $\frac{1}{2}$; hay rút ngẫu nhiên 1 con bài từ bộ bài tú lơ khơ 52 con bài, xác suất rút được mỗi con bài là như nhau, cùng bằng $\frac{1}{52}$,...

Trong lời giải của bạn Tý, xem không gian mẫu là tập các con đường đi của robot. Theo quy tắc đi của robot thì dễ thấy các con đường này không đồng khả năng, ví dụ như: Xác suất mà robot đi theo con đường màu đen đậm là $\frac{1}{2^7}$, xác suất mà robot đi theo con đường màu hồng đậm là $\frac{1}{2^4}$. (Ở mỗi bước đi, khi có 2 lựa chọn hoặc đi lên hoặc sang ngang thì xác suất chọn là $\frac{1}{2}$, khi có duy nhất 1 hướng đi thì xác suất chọn là 1).



Lời giải của bạn Tèo. Robot có C_4^2 con đường để đi từ A đến C và mỗi con đường này có cùng xác suất chọn là $\frac{1}{2^4}$.

Suy ra xác suất robot đi từ A đến C là:

$$P_1 = C_4^2 . \frac{1}{2^4} = \frac{3}{8}.$$

Tương tự, đi từ C đến B robot cũng có C_4^2 con đường để đi, các con đường này có cùng xác suất chọn là $\frac{1}{2^4}$.

Suy ra xác suất robot đi từ C đến B là:

$$P_2 = C_4^2 . \frac{1}{2^4} = \frac{3}{8}.$$

Suy ra xác suất cần tính là:

$$P = P_1 . P_2 = \frac{3}{8} . \frac{3}{8} = \frac{9}{64}.$$

Phân tích lỗi sai:

• Xác suất robot đi từ A đến C bạn Tèo tính đúng.

• Xác suất robot đi từ C đến B bạn Tèo tính sai, khi cho rằng 6 con đường đó có cùng xác suất lựa chọn.

Thật ra thì:



• Con đường C-E-F-K-B và C-M-N-P-B có cùng xác suất là $\frac{1}{2} . \frac{1}{2} . 1 . 1 = \frac{1}{4}$.

• Con đường C-E-H-K-B, C-E-H-P-B, C-M-H-K-B và C-M-H-P-B có cùng xác suất là $\frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . 1 = \frac{1}{8}$.

Suy ra xác suất robot đi từ C đến B là:

$$P_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1.$$

Vì robot chỉ có thể di chuyển sang phải hoặc lên trên, nên sau 4 bước kiểu gì robot cũng đến B, do đó xác suất bằng 1 ở giai đoạn đi này là vậy.

Từ đây thấy rằng, việc tính xác suất robot đi từ A đến B mà qua C, chỉ cần tính xác suất sao cho robot đến được C sau 4 bước.

Lời giải. Xác suất robot đi từ A đến B mà qua C cũng chính là xác suất robot đi từ A đến C.

Robot có C_4^2 con đường để đi từ A đến C và mỗi con đường này có cùng xác suất chọn là $\frac{1}{2^4}$.

Suy ra xác suất cần tính là:

$$P = C_4^2 . \frac{1}{2^4} = \frac{3}{8}.$$

Bài 9. *Cho hai hộp H_1 và H_2 giống nhau. Hộp H_1 chứa 3 viên bi đỏ và 2 viên bi xanh, hộp H_2 chứa 2 viên bi đỏ và 2 viên bi xanh. Chọn ngẫu nhiên một hộp rồi chọn ngẫu nhiên từ hộp đó một viên bi. Biết rằng viên bi chọn được có màu đỏ, tính xác suất để viên bi đó được lấy từ hộp H_1.*

Lời giải của bạn Tý. Theo đề bài, viên bi chọn được có màu đỏ nên nhận thấy rằng:

Được quét bằng CamScanner

Cả hai hộp có tất cả 5 viên bi màu đỏ, hộp H_1 có 3 viên bi màu đỏ và hộp H_2 có 2 viên màu đỏ, nên xác suất lấy được viên bi màu đỏ từ hộp H_1 là $\frac{3}{5}$.

***Phân tích lỗi sai*:** Xác suất để chọn được một viên bi nào đó từ hộp H_1 là: $\frac{1}{2}.\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$.

Xác suất để chọn được một viên bi nào đó từ hộp H_2 là: $\frac{1}{2}.\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$.

Như vậy, xác suất lấy được các viên bi từ hộp H_1 và H_2 là khác nhau, nên không thể tính xác suất theo công thức $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$ như lời giải của Tý được.

Lời giải. Gọi H_1, H_2 lần lượt là các biến cố lấy được một viên bi từ hộp H_1 và hộp H_2, suy ra $P(H_1)=\frac{1}{2}$ và $P(H_2)=\frac{1}{2}$.

Gọi $X, Đ$ lần lượt là các biến cố lấy được viên bi màu xanh và viên bi màu đỏ.

Suy ra $P(Đ|H_1)=\frac{3}{5}$ và $P(Đ|H_2)=\frac{2}{4}$.

Xác suất cần tính là: $P(H_1|Đ)=\frac{P(H_1Đ)}{P(Đ)}$

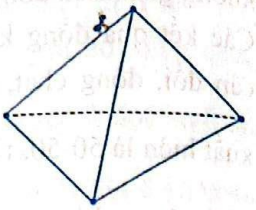
$$=\frac{P(H_1).P(Đ|H_1)}{P(H_1).P(Đ|H_1)+P(H_2).P(Đ|H_2)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}.\frac{3}{5}+\frac{1}{2}.\frac{2}{4}}=\frac{6}{11}.$$

BÀI TẬP CỦNG CỐ

Bài 1. Kỳ thi của một trường gồm 10 phòng thi, có 7 học sinh của trường khác cũng đăng ký tham gia thi. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 7 em này vào các phòng thi sao cho một phòng có 3 học sinh và hai phòng khác mỗi phòng có 2 học sinh.

Bài 2. Một con kiến đang ở trên một đỉnh của khối tứ diện đều, con kiến dò đường nên nó chọn ngẫu nhiên một trong các cạnh tại đỉnh mà nó đang đứng (với xác suất như nhau mỗi khi có sự lựa chọn) và bò dọc theo cạnh đó đến đỉnh liền kề. Con kiến chọn và bò liên tục, mỗi cạnh con kiến bò trong một phút. Tính xác suất để sau 7 phút con kiến quay lại đỉnh ban đầu.



Bài 3. Có 7 học sinh gồm 5 nam và 2 nữ. Có bao nhiêu cách xếp 7 em này vào 4 lớp học sao cho mỗi lớp có ít nhất 1 nam và 2 em nữ luôn cùng một lớp.

Bài 4. Một nhóm gồm 16 học sinh xếp ngẫu nhiên thành hàng ngang để chụp ảnh lưu niệm, có 7 nam và 9 nữ, trong các bạn nữ này có một cặp song sinh tên là Hoa và Hồng. Tính xác suất mà đứng giữa cặp song sinh này không có bạn nam nào.

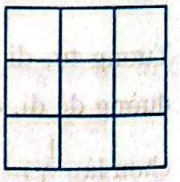
Bài 5. Trong tiết học Mỹ thuật, bé An vẽ một ngôi sao 5 cánh vào vở, rồi tô ngẫu nhiên 5 cánh của ngôi sao đó từ 6 hộp màu màu khác nhau, mỗi cánh chỉ tô một màu. Tính xác suất không có hai cánh kề nhau cùng màu.



Bài 6. Xung quanh một bờ hồ có 20 cây cau vua, người ta muốn chặt bớt 4 cây, số cách để chặt 4 cây mà không có hai cây nào cạnh nhau.

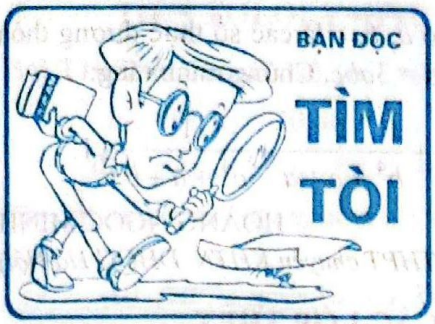
Bài 7. Một hộp đựng 6 bi xanh đánh số từ 1 đến 6, 5 viên bi đỏ đánh số từ 1 đến 5 và 4 viên bi vàng đánh số từ 1 đến 4. Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi đủ cả ba màu và đôi một khác số.

Bài 8. Cho một bảng ô vuông 3×3. Điền ngẫu nhiên các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 vào bảng trên (mỗi ô điền một số và mỗi số điền không quá một lần). Tính xác suất để tổng các số trên mỗi hàng và mỗi cột đều là số lẻ.



Bài 9. Cho tam giác ABC trên cạnh AC lấy 14 điểm phân biệt khác hai điểm A, C rồi nối chúng với B. Trên cạnh BC lấy 7 điểm phân biệt khác hai điểm B, C rồi nối chúng với A. Tính số tam giác trên hình.

Được quét bằng CamScanner



PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG, ĐƯỜNG PHÂN GIÁC NGOÀI CỦA MỘT GÓC TAM GIÁC

TRẦN MINH TUẤN
(GV THPT Hàm Long, phường Nam Sơn, Bắc Ninh)

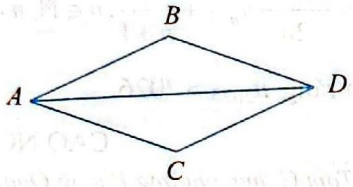
1. Cơ sở của phương pháp

Ta đã biết một hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau thì nó sẽ là hình thoi, khi đó đường chéo sẽ là tia phân giác của góc mà nó đi qua

Thí dụ. Nếu $ABCD$ là hình thoi khi đó ta có:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

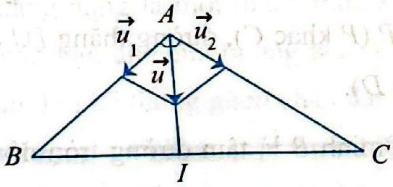
và $\overrightarrow{AD}$ là tia phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$.



2. Một số ví dụ

Thí dụ 1. *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(0;2), B(1;2), C(3;6)$. Tìm phương trình đường phân giác trong của góc A?*

Lời giải.



Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(1;0)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=1\\ \overrightarrow{AC}=(3;4)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=5\end{cases}$. Chọn hai số để $\left|5\overrightarrow{AB}\right|=\left|1.\overrightarrow{AC}\right|=5$, khi đó ta lấy vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\overrightarrow{u_1}=5\overrightarrow{AB}=(5;0)$; Vectơ chỉ phương của dương thẳng AC là $\overrightarrow{u_2}=\overrightarrow{AC}=(3;4)$.

Ta có theo quy tắc hình bình hành thì

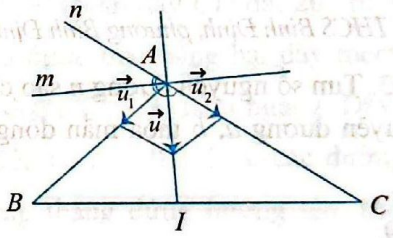
$$\overrightarrow{u'}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}=(5;0)+(3;4)=(8;4)=4(2;1).$$

Chọn $\vec{u}=(2;1)$ thì khi đó vectơ $\vec{u}$ chính là vectơ chỉ phương của đường phân giác trong góc A.

Vậy phương trình đường phân giác trong AI (đi qua $A(0;\ 2)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1)$) có phương trình: $\frac{x-0}{2}=\frac{y-2}{1}\Leftrightarrow x-2y+4=0$.

Thí dụ 2. *Cho tam giác ABC có $AB: 2x-y+4=0$; $AC: x-2y-6=0$ và hai điểm B; C thuộc Ox. Tìm phương trình phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$.*

Lời giải. Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}2x-y+4=0\\ x-2y-6=0\end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{-14}{3};\frac{-16}{3}\right)$



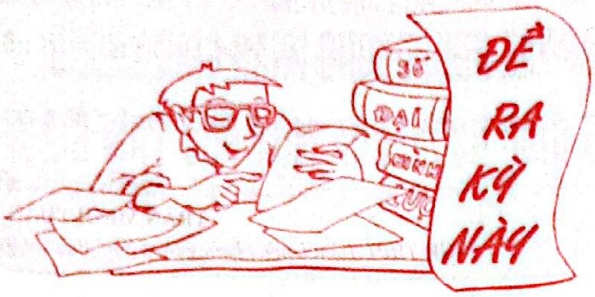
Vì các điểm B, C thuộc trục Ox nên ta có $B(-2;0), C(6;0)$.

Ta có : $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\left(\frac{8}{3};\frac{16}{3}\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{8\sqrt{5}}{3}\\ \overrightarrow{AC}=\left(\frac{32}{3};\frac{16}{3}\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=\frac{16\sqrt{5}}{3}\end{cases}$. Chọn hai số để $\left|2\overrightarrow{AB}\right|=\left|1.\overrightarrow{AC}\right|=\frac{16\sqrt{5}}{3}$, khi đó ta lấy vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là

$$\overrightarrow{u_1}=2\overrightarrow{AB}=\left(\frac{16}{3};\frac{32}{3}\right);$$

(Xem tiếp trang 42)

Được quét bằng CamScanner



CÁC LỚP THCS

Bài T1/583 (Lớp 6). Một ổ khóa có tổ hợp số là một số nguyên dương có bốn chữ số. Chữ số đầu tiên là 4 và tổ hợp bốn chữ số này chia hết cho 45. Hỏi có bao nhiêu tổ hợp khác nhau có thể có?

NGUYỄN ĐỨC TƯỞNG
(Pleiku)

Bài T2/583 (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}=125^0$ và $\widehat{ACB}=30^0$. Lấy điểm D sao cho A và D nằm về hai phía của đường thẳng BC, ngoài ra $\widehat{BAD}=40^0$, $\widehat{CBD}=75^0$. Tính số đo của góc $\widehat{ADC}$.

NGUYỄN TẤN NGỌC
(GV THCS Bình Định, phường Bình Định, Gia Lai)

Bài T3/583. Tìm số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương a, b thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

i) $0\le b\le 9$.

ii) $3^n=10a+b$.

iii) $|ab-12|$ là số chính phương.

PHAN QUANG ĐẠT
(Số 23, ngõ 29, phố Quý Nhị, Thái Nguyên)

Bài T4/583. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng AH cắt đường tròn (O) tại K (K khác A). Đường tròn ngoại tiếp tam giác CHK cắt AC tại I (I khác C). Gọi D là trung điểm của AI. Chứng minh các điểm D, F, K, C cùng nằm trên một đường tròn.

BÙI VĂN CHI
(Quy Nhơn)

Bài T5/583. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^4+b+c}+\frac{1}{b^4+c+a}+\frac{1}{c^4+a+b}\le 1.$$

HOÀNG NGỌC MINH
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/583. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{1-4x+3x^2}+\sqrt[3]{1-5x+2x^2}=2-x+x^4.$$

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh)

Bài T7/583. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1=2 \\ u_n=\dfrac{2n+1}{2n}u_{n-1}+\dfrac{n}{n+1}, n\in\mathbb{N}, n\ge 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $u_{2025}>2026$.

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Giang, phường Phong Quảng, TP. Huế)

Bài T8/583. Cho hai đường tròn (I), (J) cắt nhau tại hai điểm A, B, trong đó I, J nằm về hai phía của đường thẳng AB và $IJ>AB$. Tiếp tuyến của (I) tại B cắt (J) tại điểm thứ hai là D. Tiếp tuyến của (J) tại B cắt (I) tại điểm thứ hai là C. Đường thẳng CI cắt (I) tại P (P khác C), đường thẳng DJ cắt (J) tại Q (Q khác D).

a) Chứng minh B là tâm đường tròn nội tiếp tam giác APQ.

b) Gọi K là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng $KB\perp CD$.

NGUYỄN ANH VŨ, LÊ BÌNH MINH
(Trường THPT chuyên Chu Văn An, Bình Định)

Bài T9/583. Cho số nguyên dương $n\ge 3$. Gọi M là một số nguyên dương chỉ gồm các chữ số 1 và 2 thỏa mãn M chia hết cho 10^n-7. Hỏi M có ít nhất bao nhiêu chữ số?

BÙI VĂN BÌNH
(GV THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa)

Được quét bằng CamScanner

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/583. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$u_1 = 14,\ u_2 = 20,\ u_3 = 32,$$

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 8u_n + 8u_{n-1},\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Tìm tất cả các số n để u_n chia hết cho 2^{n+3}

LÊ HOÀI BẮC

(GV THPT Nguyễn Văn Cừ, Xuân Sơn, Châu Đốc, Bà Rịa–Vũng Tàu)

Bài T11/583. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho:

$$f\big(f(x-y)\big) + xy = f(x) - f(y) + f(x)f(y),$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$.

NGUYỄN HÙNG CƯỜNG

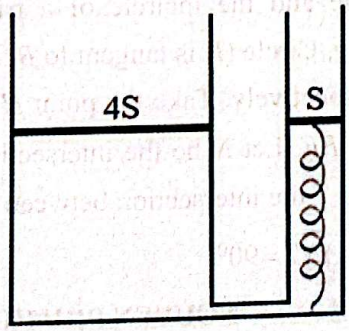
(Xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, Bình Định)

Bài T12/583. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Lấy H thuộc (I) sao cho $DH \perp EF$. Gọi N là giao điểm của AH với (I); T là giao điểm của OI với BC. Chứng minh rằng $\widehat{ANT} = 90^0$.

TRẦN TẤN TRIẾT

(A1K40, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

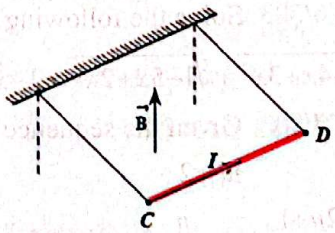
Bài L1/583. Trong quá trình vận hành tàu sân bay, việc hạ cánh an toàn cho máy bay không người lái (UAV) hạng nặng là một thách thức kĩ thuật lớn. Không gian hạn chế của boong tàu và tốc độ tiếp đất cao đòi hỏi hệ thống giảm chấn đặc biệt để hấp thụ năng lượng va chạm một cách hiệu quả. Hải quân đã phát triển hệ thống giảm chấn khí nén hai buồng khí nén hai buồng kết hợp lò xo trợ lực như hình vẽ.



Hệ thống bao gồm: buồng chính (bên trái), có tiết diện $4S$, chứa khí nén; buồng phụ (bên phải), có tiết diện S, chứa khí nén và lò xo; giữa hai buồng khí có một kênh kết nối nhỏ cho phép khí di chuyển giữa hai buồng. Khi UAV hạ cánh, lực tác động lên hệ thống buồng chính, làm pít - tông đẩy xuống thể tích buồng chính giảm, áp suất khí tăng và chuyển sang buồng phụ. Pít-tông bên phải ở buồng phụ bị đẩy lên, giảm chấn cho hệ thống. Trong quá trình này độ giảm chấn tối đa cho phép ở buồng phụ là 15 cm. Biết tiết diện $S = 100\ \text{cm}^2$, chiều cao ban đầu của hai cột khí $h_0 = 40$ cm, áp suất ban đầu $p = 7{,}488$ bar, nhiệt độ của khối khí coi như không đổi; 1 bar $= 10^5$ Pa. Ban đầu lò xo không biến dạng. Các kĩ thuật viên hải quân cần phải sử dụng lò xo có độ cứng là bao nhiêu (N/m) để hành trình giảm chấn tối đa cho phép ở buồng chính bằng 5 cm.

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/583. Đoạn dây CD dài 20 cm, khối lượng $m = 10$ g được treo bằng hai dây mềm cách điện sao cho đoạn dây CD nằm ngang. Dây ở trong từ trường đều có $B = 0{,}2$ T và các đường sức từ là các đường thẳng đứng hướng lên. Mỗi dây treo chịu được lực kéo lớn nhất $F_K = 0{,}06$ N. Hỏi có thể cho dòng điện qua dây đồng CD có cường độ lớn nhất là bao nhiêu để dây đồng CD có cường độ lớn nhất bao nhiêu để dây treo không đứt. Coi khối lượng dây treo rất nhỏ; $g = 10\ \text{m/s}^2$.



THANH LÂM (*Hà Nội*)

Được quét bằng CamScanner

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/583 (Grade 6). A combination lock uses a four-digit positive integer as its code. The first digit is 4, and the four-digit number is divisible by 45. How many different combinations are possible?

Problem T2/583 (Grade 7). Given a triangle ABC with $\widehat{BAC}=125^0$ and $\widehat{ACB}=30^0$. Take the point D such that A and D are on opposite sides of the line BC and $\widehat{BAD}=40^0, \widehat{CBD}=75^0$. Compute the measurement of the angle $\widehat{ADC}$.

Problem T3/583. Find positive integers n such that there exist positive integers a and b that simultaneously satisfy the following conditions:

i) $0\le b\le 9$;

ii) $3^n=10a+b$;

iii) $|ab-12|$ is a perfect square.

Problem T4/583. Given an acute triangle ABC inscribed in a circle (O). The two altitudes BE and CF of the triangle intersect at H. The line AH intersects the circle (O) at K $(K\neq A)$. The circumcircle of triangle CHK intersects AC at I $(I\neq C)$. Let D be the midpoint of AI. Prove that points D, F, K, and C lie on the same circle.

Problem T5/583. Let a, b, c be positive numbers satisfying $ab+bc+ca=3abc$. Prove that:

$$\frac{1}{a^4+b+c}+\frac{1}{b^4+c+a}+\frac{1}{c^4+a+b}\le 1.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/583. Solve the following equation

$$\sqrt[3]{1-4x+3x^2}+\sqrt[3]{1-5x+2x^2}=2-x+x^4.$$

Problem T7/583. Given the sequence (u_n) defined by:
$$\begin{cases} u_1=2 \\ u_n=\dfrac{2n+1}{2n}u_{n-1}+\dfrac{n}{n+1}, n\in N, n\ge 2 \end{cases}.$$
Prove that $u_{2025}>2026$.

Problem T8/583. Suppose that two circles (I) and (J) intersect at A and B, where I and J are on opposite sides of the line AB and $IJ > AB$. The tangent of (I) at B intersects (J) at the second point D. The tangent of (J) at B intersects (I) at the second point C. The line CI intersects (I) at P $(P\neq C)$, the line DJ intersects (J) at Q $(Q\neq D)$.

a) Prove that B is the center of the incircle of the triangle APQ.

b) Let K be the midpoint of PQ. Prove that $KB\perp CD$.

Problem T9/583. Given a positive integer $n\ge 3$. Let M be a positive integer consisting only of the digits 1 and 2 such that M is divisible by 10^n-7. How many digits does M have at least?

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/583. Given the sequence (u_n) defined by: $u_1=14, u_2=20, u_3=32$,

$$u_{n+2}=4u_{n+1}-8u_n+8u_{n-1}, n\in\mathbb{N}, n\ge 2.$$

Find all n such that u_n is divisible by 2^{n+3}.

Problem T11/583. Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that:

$$f(f(x-y))+xy=f(x)-f(y)+f(x)f(y),$$

$\forall x, y\in\mathbb{R}$.

Problem T12/583. Let (O) and (I) be the circumcircle and the incircle of a triangle ABC respectively. Circle (I) is tangent to BC, CA, AB at D, E, F respectively. Take the point H on (I) such that $DH\perp EF$. Let N be the intersection between AH and (I); T the intersection between OI and BC. Prove that $\widehat{ANT}=90^0$.

NGUYEN PHU HOANG LAN
(University of Education, VNU, Hanoi)

Được quét bằng CamScanner



Bài T1/579. *Tìm số nguyên tố p để số $\dfrac{3^p+2026(p-1)}{2025}$ là một số chính phương.*

Lời giải. Với $p = 2$ thì

$$\frac{3^p+2026(p-1)}{2025}=\frac{3^2+2026(2-1)}{2025}=\frac{2035}{2025}$$

không là số nguyên.

Ta xét số nguyên tố $p > 2$ thì p là số lẻ.

Với số nguyên n thì

$$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4(n^2 + n) + 1,$$

từ đó có nhận xét sau.

Nhận xét. Bình phương của một số lẻ chia cho 4 được số dư là 1.

Giả sử rằng số $\dfrac{3^p+2026(p-1)}{2025} = a^2$ là một số chính phương với số nguyên a, lúc đó

$$3^p + 2026(p - 1) = 2025a^2,$$

hay là $3^p + 2026(p - 1) = (45a)^2$ (*).

Ta thấy số nguyên tố p là số lẻ thì $2026(p - 1)$ là bội của 4, còn 3^p là số lẻ nên vế trái của (*) là số lẻ, do đó vế phải của (*) là số lẻ. Theo nhận xét trên số lẻ $(45a)^2$ chia cho 4 được số dư là 1 (**). Do p là số nguyên tố lẻ, đặt $p = 2m + 1$ với số nguyên dương m thì

$$3^p = 3^{2m+1} = 3.\,3^{2m} = 3.\,9^m = 3(4.2 + 1)^m,$$

số $(4.2 + 1)^m$ chia cho 4 dư 1 với bất kì số nguyên dương m nên số $3(4.2 + 1)^m$ chia cho 4 dư 3, do đó ở vế trái của (*), số $3^p + 2026(p - 1)$ chia cho 4 dư 3, điều này mâu thuẫn với (**), nghĩa là không tồn tại số chính phương a^2. Vậy với số nguyên tố p bất kì thì số $\dfrac{3^p+2026(p-1)}{2025}$ không là số chính phương.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng. **Thanh Hóa**: *Lê Như Quỳnh*, 6B2, THCS liên cấp Đông Bắc Ga, phường Hạc Thành; **Đà Nẵng:** *Lê Văn Minh*, 6/12, trường Lương Thế Vinh, phường Hòa Khánh; **Quảng Ngãi**: *Trần Văn Phụng*, 6C, THCS Nguyễn Kim Vang, xã Đình Cương.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/579. *Tìm chữ số tận cùng của số*

$$A = 1^1 + 2^2 + 3^3 + ... + 2025^{2025}.$$

Lời giải. Chia tổng A thành 203 tổng, trong đó 202 tổng đầu mỗi tổng có 10 số hạng, tổng thứ 203 có 5 số hạng cuối.

Khi đó ta có:

$$A = \left(1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + 10^{10}\right) + \left(11^{11} + 12^{12} + 13^{13} + \cdots + 20^{20}\right)$$

$$\cdots + \left(2011^{2011} + 2012^{2012} + 2013^{2013} + \cdots + 2020^{2020}\right)$$

$$+ \left(2021^{2021} + 2022^{2022} + 2023^{2023} + 2024^{2024} + 2025^{2025}\right).$$

Xét 202 tổng đầu, mỗi tổng đều có chữ số tận cùng của mỗi số hạng lần lượt từ trái sang phải là:

$$1; 4; 7; 6; 5; 6; 3; 6; 9; 0.$$

Vì $1+4+7+6+5+6+3+6+9+0 = 47$ nên chữ số tận cùng của mỗi tổng này là 7.

Mặt khác, tổng thứ 203 có chữ số tận cùng lần lượt là: 1; 4; 7; 6; 5, mà $1+4+7+6+5 = 23$ nên có chữ số tận cùng là 3.

Vậy chữ số tận cùng bên phải của tổng A là chữ số tận cùng của $202 \cdot 7 + 3 = 1417$, tức là 7.

Vậy số A có chữ số tận cùng bên phải là 7.

Nhận xét. Ngoài cách giải ngắn gọn mà tác giả đưa ra, các bạn tham gia giải, đưa ra câu trả lời đúng và chi tiết. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt.

Hà Nội: *Dương Đức Anh*, 7M, THCS Ngô Sĩ Liên, Cửa Nam; **Phú Thọ:** *Vũ Nhật Thành*, 7A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Quảng Ngãi:** *Trần Văn Phụng*, 7C, THCS Nguyễn Kim Vang, Đình Cương; **Nghệ An:** *Đặng Văn Hoàng*, 7A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc; *Trương Đình Quốc Anh*, *Thái Bùi Hà Anh*, 7E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

TRẦN THỊ KIM THANH

Bài T3/579. *Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (a, b) thỏa mãn $(a+b+2)(a^2+b^2+2)(a^4+b^4+2)$ là lũy thừa với số mũ nguyên dương của một số nguyên tố.*

Được quét bằng CamScanner

Lời giải. Giả sử tồn tại số nguyên tố p và $n\in\mathbb{N}^*$ thỏa mãn:

$$(a+b+2)(a^2+b^2+2)(a^4+b^4+2)=p^n\ (*).$$

Vì $a,b\in\mathbb{N}$ nên tồn tại $x,y,z\in\mathbb{N}^*$ sao cho:

$$a+b+2=p^x;\ a^2+b^2+2=p^y;\ a^4+b^4+2=p^z.$$

Do $a^4+b^4+2\ge a^2+b^2+2\ge a+b+2$ nên

$$p^z\ge p^y\ge p^x\Rightarrow z\ge y\ge x\Rightarrow p^z\vdots p^y\vdots p^x.$$

Ta có: $p^y\vdots p^x\Rightarrow(a^2+b^2+2)\vdots(a+b+2)$

$\Leftrightarrow\left[(a+b)^2-4-2(ab-3)\right]\vdots(a+b+2)$

$\Leftrightarrow\left[(a+b-2)(a+b+2)-2(ab-3)\right]\vdots(a+b+2)$

$\Rightarrow 2(ab-3)\vdots(a+b+2)$ (1).

$p^z\vdots p^y\Rightarrow(a^4+b^4+2)\vdots(a^2+b^2+2)$

$\Leftrightarrow\left[(a^2+b^2)^2-4-2(a^2b^2-3)\right]\vdots(a^2+b^2+2)$

$\Leftrightarrow\left[(a^2+b^2-2)(a^2+b^2+2)-2(a^2b^2-3)\right]\vdots(a^2+b^2+2)$

$\Rightarrow 2(a^2b^2-3)\vdots(a^2+b^2+2).$

Do $p^z\vdots p^x\Rightarrow 2(a^2b^2-3)\vdots(a+b+2)$

$\Rightarrow\left[2(ab-3)(ab+3)+12\right]\vdots(a+b+2)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $12\vdots(a+b+2)\Rightarrow 12\vdots p^x$.

Do $p^x=a+b+2\ge 2>1$ nên $x>0\Rightarrow x\ge 1$.

• Xét $p=2$.

+ Với $x=1\Rightarrow a+b+2=p^x=2^1=2\Rightarrow a+b=0$

$\Rightarrow a=b=0$. Từ (*) suy ra:

$2^n=8\Rightarrow n=3$ (thỏa mãn).

+ Với $x=2\Rightarrow a+b+2=p^x=2^2=4\Rightarrow a+b=2$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}a=b=1\\a=0,b=2.\\a=2,b=0\end{bmatrix}$$

- Với $a=b=1$, từ (*) suy ra: $2^n=64\Rightarrow n=6$ (thỏa mãn).

- Với $a=0$, $b=2$, từ (*) suy ra: $2^n=432$ (không tồn tại n nguyên dương).

- Với $a=2$, $b=0$, từ (*) suy ra: $2^n=432$ (không tồn tại n nguyên dương).

• Xét $p=3\Rightarrow 12\vdots p^x\Rightarrow x=1$. Do đó:

$$a+b+2=3^x=3^1=3\Rightarrow a+b=1\Rightarrow\begin{bmatrix}a=0,b=1\\a=1,b=0\end{bmatrix}.$$

- Với $a=0$, $b=1$, từ (*) suy ra: $3^n=27\Rightarrow n=3$ (thỏa mãn).

- Với $a=1$, $b=0$, từ (*) suy ra: $3^n=27\Rightarrow n=3$ (thỏa mãn).

• Xét $p>3\Rightarrow p\ge 5\Rightarrow 12\not\vdots p^x,\forall x\ge 1$.

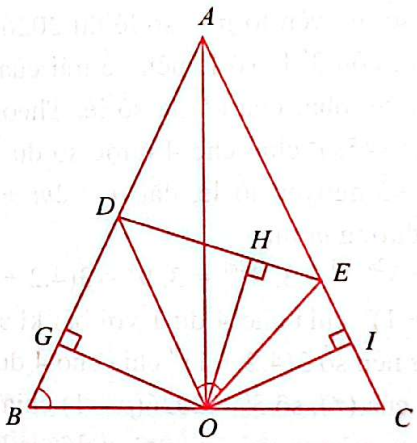
Vậy các cặp số tự nhiên $(a;b)$ thỏa mãn bài toán là: $(a;b)\in\{(0;0),(1;1),(0;1),(1;0)\}$.

Nhận xét. 1) Một số bạn xét thiếu trường hợp nên dẫn đến thiếu nghiệm. Một số bạn khác có những đánh giá sai nên dẫn đến kết quả không đúng. Một số bạn sử dụng đồng dư để giải cũng có kết quả đúng nhưng lời giải dài. Các bạn sau có lời giải đúng: **Nghệ An:** *Hoàng Văn Duy*, 9D, *Nguyễn Thái Dũng*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, xã Đô Lương, *Đặng Văn Hoàng*, 7A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc, *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, xã Hùng Châu; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Mai Trâm*, 9A6, THCS Lê Văn Thiêm, phường Thành Sen; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Bá Đức Anh*, 8A, TH&THCS Lương Chí, Tĩnh Gia. Có một bạn giải đúng nhưng quên ghi tên.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/579. *Cho tam giác ABC cân tại A, O là trung điểm của BC. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $\widehat{DOE}=\widehat{ABC}$. Đặt $AB=b$, $BC=2a$ $(b>a>0)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng DE.*

Lời giải.



Ta có $\widehat{ABC}=\widehat{DOE}$. Suy ra:

$$\widehat{BDO}=180^\circ-\widehat{DOB}-\widehat{DBO}=\widehat{EOC}.$$

Suy ra: $\Delta BDO\backsim\Delta COE$ (g.g), dẫn tới:

$$\frac{OD}{EO}=\frac{BD}{CO}\Rightarrow\frac{OD}{BD}=\frac{OE}{OB}.$$

Từ đó: $\Delta DOE\backsim\Delta DBO$ (c.g.c). Vậy

$$\Delta ODE\backsim\Delta BDO\backsim\Delta COE.$$

Được quét bằng CamScanner

Suy ra: $\widehat{ODE}=\widehat{ODB},\widehat{OED}=\widehat{OEC}$.

Hạ OG, OH, OI lần lượt vuông góc với AB, DE, AC tại G, H, I tương ứng.

Dễ chứng minh: $\Delta DGO=\Delta DHO$ (g.c.g);

$\Delta EHO=\Delta EIO$ (g.c.g).

Suy ra: $DE=DG+EI$ (1).

Tam giác AOB vuông tại O có OG là đường cao nên $BG=\dfrac{BO^2}{BA}=\dfrac{a^2}{b}=CI$ (2).

Lại có $\Delta BDO\backsim\Delta COE$ nên

$$\frac{BD}{CO}=\frac{BO}{CE} \text{ hay } BD.CE=a^2.$$

Từ đó: $BD+CE\ge 2\sqrt{BD.CE}=2a$ (3).

Từ (1), (2), (3) ta có:

$$DE=DG+EI=BD+CE-2BG\ge 2a-\frac{2a^2}{b}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $BD=CE=a$.

Vậy DE đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{2a(b-a)}{b}$ khi $BD=CE=a$.

Nhận xét. 1) Một số bạn mắc sai lầm khi đánh giá $A\ge B$ thì A đạt giá trị nhỏ nhất khi $A=B$. Khẳng định trên chỉ đúng khi B là đại lượng không đổi.

2) Các bạn sau đây cho lời giải tốt:

An Giang: *Lưu Minh Vĩ*, lớp 8/7, THCS Lê Quý Đôn; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Mai Trâm*, 9A6, THCS Lê Văn Thiêm, phường Thành Sen; **Lâm Đồng:** *Trương Mỹ Linh*, 8A2, THCS Quang Trung, Bảo Lộc.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/579. *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng:* $\dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{c+a-b}\ge 3\sqrt{3}$.

Lời giải. Gọi A là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh. Theo bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)=3$$

nên suy ra: $0<a+b+c\le\sqrt{3}$ (1).

Do a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên

$$a+b-c>0,\ b+c-a>0,\ c+a-b>0.$$

Theo bất đẳng thức Schwarz ta có:

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\ge\frac{(1+1+1)^2}{a+b-c+b+c-a+c+a-b}=\frac{9}{a+b+c}.$$

Kết hợp với (1) suy ra:

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\ge\frac{9}{a+b+c}\ge 9.\frac{1}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$$ (đpcm).

Dấu '=' xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Nhận xét. Bài toán đã cho khá cơ bản nên các bạn tham gia đều có lời giải đúng với cách giải tương tự như trên. Danh sách các bạn giải đúng là: **Nghệ An:** *Hoàng Văn Duy*, 9D, *Nguyễn Thái Dũng*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, xã Đô Lương, *Lê Kim Ngân*, 8A1, THCS Quỳnh Thiện, phường Hoàng Mai, *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, xã Hùng Châu; **Phú Thọ:** *Tạ Minh Hằng*, 8A6, THCS Yên Lạc, xã Tam Hồng; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Mai Trâm*, 9A6, THCS Lê Văn Thiêm, phường Thành Sen; **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, 9A1, THCS Linh Đàm; **TP. Hồ Chí Minh:** *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa ; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Bá Đức Anh*, 8A, TH&THCS Lương Chí, Tĩnh Gia; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, trường Quốc tế Song ngữ 2, 3 GIBS, TP. Graz; **An Giang:** *Lưu Minh Vĩ*, 8/7, THCS Lê Quý Đôn.

TRẦN HỮU NAM

Bài T6/579. *Giải phương trình sau trên tập số thực*

$$(x^3-4)^3=\left(\sqrt[3]{(x^2+4)^2}+4\right)^2.$$

Lời giải. Điều kiện: $x^3-4>0\Leftrightarrow x>\sqrt[3]{4}$. Đặt

$y=\sqrt{x^3-4}$ (1), $z=\sqrt[3]{x^2+4}$ (2) (với $y>0$, $z>0$).

Khi đó phương trình đã cho có dạng:

$$(y^2)^3=(z^2+4)^2\Leftrightarrow y^3=z^2+4 \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^3=y^2+4\\ y^3=z^2+4\\ z^3=x^2+4\end{cases} (*).$$

Được quét bằng CamScanner

Cách 1. Nhận thấy trong hệ (*) vai trò x, y, z hoán vị vòng quanh. Không giảm tổng quát, giả sử $x = \max(x, y, z)$, tức là $x \ge y$ và $x \ge z$.

Từ $x \ge y$ suy ra: $x^3 \ge y^3$, nên $y^2 + 4 \ge z^2 + 4$, do đó $y \ge z$. Từ $y \ge z$ suy ra $y^3 \ge z^3$, nên $z^2 + 4 \ge x^2 + 4$, do đó $z \ge x$. Suy ra $x \ge y \ge z \ge x$. Vì vậy $x = y = z$. Kết hợp với (*), ta có:

$$x^3 = x^2 + 4 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+x+2) = 0.$$

Do $x^2 + x + 2 > 0$ nên suy ra $x - 2 = 0$ hay $x = 2$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Cách 2. Xét hàm số $f(x) = x^2 + 4$ trên $(0;+\infty)$. Hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm $f'(x) = 2x$ luôn dương trên $(0;+\infty)$. Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Hệ (*) có thể viết thành: $\begin{cases} f(y) = x^3 \\ f(z) = y^3 \\ f(x) = z^3 \end{cases}$.

Nếu $x \ge y$ thì $f(x) \ge f(y)$, suy ra $z^3 \ge x^3$ nên $z \ge x$. Từ đó $f(z) \ge f(x)$, suy ra $y^3 \ge z^3$ nên $y \ge z$.

Ta có $x \ge y \ge z \ge x$. Suy ra $x = y = z$. Lập luận tương tự, nếu $x \le y$, ta cũng suy ra $x = y = z$.

Từ đó cũng tìm ra nghiệm duy nhất của phương trình là $x = 2$.

Nhận xét. Đây là một bài toán hay về giải phương trình, mấu chốt là tìm ra hệ phương trình (*). Đa số các bạn tham gia gửi bài đều giải theo một trong hai cách trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Nguyễn Bảo Châu,* 8A6, THCS Yên Lạc; **Hưng Yên:** *Phạm Văn Phong,* 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam,* 9A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Mai Trâm,* 9A6, THCS Lê Văn Thiêm, *Ngô Bùi Anh Khoa, Bùi Tùng Lâm,* 11 Toán 1, *Phạm Viết Lê Huy,* 11 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** *Nguyễn Đức Dũng,* 11A1, THPT Yên Thành; **Quảng Trị:** *Hoàng Hà Uyên Nhi,* 10 Toán 1, *Lê Phước Quý,* 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Vĩnh Long**: *Thái Minh Phúc, Lê Hoàng Phong,* 11T1, *Lê Thiện Khiêm,* 12T2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **An Giang:** *Trần Hoàng Bách,* 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt,* 9A10, THCS Quang Trung, *Huỳnh Nguyễn Lê Minh,* 10T, THPT chuyên Thăng Long; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện,* 11CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, *Nguyễn Hải Đăng,* 11A1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T7/579. *Cho các số thực x, y thỏa mãn*

$$\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{x-y}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = |x+y|$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra x, y cùng dấu và

$$x - y = \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2 = \frac{(x+y)^2}{xy} \quad (1).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$2xy.2xy.(x-y)^2 \le \left(\frac{2xy+2xy+(x-y)^2}{3}\right)^3 = \frac{(x+y)^6}{27} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$4(x+y)^4 \le \frac{(x+y)^6}{27} \Leftrightarrow (x+y)^2 \ge 108$$

hay $S = |x+y| \ge 6\sqrt{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = 3+3\sqrt{3}, y = -3+3\sqrt{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $6\sqrt{3}$.

Nhận xét. Đa số các bạn gửi lời giải về tòa soạn đều dùng cách đưa về khảo sát hàm một biến t với $t = \frac{x}{y}$ hoặc $t = \sqrt{\frac{x}{y}}$. Một số bạn sử dụng bất đẳng thức Cauchy nhưng lại không chú ý đến điều kiện các số phải không âm. Có vài bạn giải sai do chưa thành thạo trong việc khảo sát hàm số, vẽ bảng biến thiên, sử dụng dấu tương đương một cách tùy tiện. Có hiện tượng làm bài tập thể hoặc chép bài của nhau-đây là điều không hay, mong các bạn này rút kinh nghiệm để không xảy ra sự việc tương tự lần sau nữa. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hưng Yên: *Trần Gia Phú,* 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Đức Quang Minh,* 11E1, *Trần Nhất Nguyên,* 11E2, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông; *Nguyễn Chánh Thiện,* 11CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; *Mai Phú Khang,* 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa;

Được quét bằng CamScanner

Hà Tĩnh: *Phan Viết Lê Huy*, 11 Toán 2, *Ngô Bùi Anh Khoa*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Tây Ninh:** *Đặng Hoàng Khánh Ngọc*, 11T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Vĩnh Long:** *Lê Duy Minh, Thái Minh Phúc, Lê Hoàng Khang*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **An Giang:** *Trần Hoàng Bách*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt.

HOÀNG NGỌC MINH

Bài T8/579. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm bất kỳ trên (O). Chứng minh rằng:* $2(a^4PA^4+b^4PB^4+c^4PC^4)$

$$=\left((a^2+b^2+c^2)PL^2+\frac{3a^2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}\right)^2$$

trong đó $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$ và L là điểm Lemoin của tam giác ABC, tức là điểm thỏa mãn

$$a^2\overrightarrow{LA}+b^2\overrightarrow{LB}+c^2\overrightarrow{LC}=\vec{0}.$$

Lời giải. Theo định lý Ptolemy ta có:

- Nếu P thuộc cung BC không chứa điểm A thì $aPA=bPB+cPC$.
- Nếu P thuộc cung AC không chứa điểm B thì $bPB=cPC+aPA$.
- Nếu P thuộc cung AB không chứa điểm C thì $cPC=aPA+bPB$.

Nghĩa là trong mọi trường hợp ta luôn có:

$(bPB+cPC-aPA)(cPC+aPA-bPB)(aPA+bPB-cPC)=0.$

Bằng biến đổi đơn giản, ta lại có đẳng thức:

$(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$

$=2(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2)-(x^4+y^4+z^4).$

Từ những điều đó suy ra :

$a^4PA^4+b^4PB^4+c^4PC^4$

$=2(a^2b^2PA^2PB^2+b^2c^2PB^2PC^2+c^2a^2PC^2PA^2)$

hay

$2(a^4PA^4+b^4PB^4+c^4PC^4)=(a^2PA^2+b^2PB^2+c^2PC^2)^2$ (1).

Mặt khác, với mọi điểm P, theo công thức Leibniz thì

$a^2PA^2+b^2PB^2+c^2PC^2$

$=(a^2+b^2+c^2)PL^2+a^2LA^2+b^2LB^2+c^2LC^2.$

Đặt $T=a^2LA^2+b^2LB^2+c^2LC^2$.

Cho $P\equiv A$, thay vào công thức Leibniz ta thu được: $b^2AB^2+c^2AC^2=(a^2+b^2+c^2)AL^2+T.$

Từ đó: $2a^2b^2c^2=(a^2+b^2+c^2)a^2AL^2+a^2.T.$

Tương tự cho $P\equiv B, P\equiv C$ và cộng theo vế ta thu được:

$6a^2b^2c^2=(a^2+b^2+c^2)(a^2AL^2+b^2BL^2+c^2CL^2)$

$+(a^2+b^2+c^2)T.$

Vậy $T=\dfrac{3a^2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}$. Suy ra:

$a^2PA^2+b^2PB^2+c^2PC^2$

$=(a^2+b^2+c^2)PL^2+\dfrac{3a^2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$2(a^4PA^4+b^4PB^4+c^4PC^4)$

$=\left((a^2+b^2+c^2)PL^2+\dfrac{3a^2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}\right)^2.$

Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Bài toán trên cho chúng ta một công thức tổng quát của một kết quả đẹp liên quan đến tam giác đều:

"Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn $(O;R)$. P là một điểm bất kì nằm trên (O). Khi đó:

$$PA^4+PB^4+PC^4=18R^4".$$

Xin nêu tên các bạn có lời giải đúng: **Tây Ninh:** *Trần Lê Trọng Phúc*, 11T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Hà Tĩnh:** *Bùi Tùng Lâm, Nguyễn Viết Thế Tài, Ngô Bùi Anh Khoa*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 10T, THPT chuyên Thăng Long; **Hưng Yên:** *Đỗ Quang Anh*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chí Đại*, 11A1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông.

NGUYỄN VĂN LINH

Bài T9/579. *Cho a, b là hai số thực dương và $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $\beta\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ là các góc thỏa mãn điều kiện $a\sin\alpha\sin\beta-b\cos\alpha\cos\beta=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P=(a^2+b^2)\left(\frac{1}{a\sin^2\alpha+b\cos^2\alpha}+\frac{1}{a\sin^2\beta+b\cos^2\beta}\right).$$

Lời giải. (Theo bạn *Lê Minh Mạnh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**).

Được quét bằng CamScanner

Từ giả thiết $a\sin\alpha\sin\beta-b\cos\alpha\cos\beta=0$

$\Leftrightarrow a\sin\alpha\sin\beta=b\cos\alpha\cos\beta \Leftrightarrow \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{b\cos\beta}{a\sin\beta}$

$\Leftrightarrow \tan\alpha=\dfrac{b}{a}\cot\beta$

ta có: $\dfrac{1}{a\sin^2\alpha+b\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{a\sin^2\beta+b\cos^2\beta}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}{a\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+b}+\dfrac{\dfrac{1}{\sin^2\beta}}{a+b\dfrac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}}=\dfrac{1+\tan^2\alpha}{a\tan^2\alpha+b}+\dfrac{1+\cot^2\beta}{a+b\cot^2\beta}$

$=\dfrac{1+\dfrac{b^2}{a^2}\cot^2\beta}{a\dfrac{b^2}{a^2}\cot^2\beta+b}+\dfrac{1+\cot^2\beta}{a+b\cot^2\beta}=\dfrac{a^2+b^2\cot^2\beta}{ab^2\cot^2\beta+a^2b}+\dfrac{1+\cot^2\beta}{a+b\cot^2\beta}$

$=\dfrac{a^2+b^2\cot^2\beta}{ab(a+b\cot^2\beta)}+\dfrac{1+\cot^2\beta}{a+b\cot^2\beta}=\dfrac{a^2+b^2\cot^2\beta+ab(1+\cot^2\beta)}{ab(a+b\cot^2\beta)}$

$=\dfrac{a(a+b)+(a+b)b\cot^2\beta}{ab(a+b\cot^2\beta)}=\dfrac{(a+b)(a+b\cot^2\beta)}{ab(a+b\cot^2\beta)}$

$=\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}.$

Do đó: $P=(a^2+b^2)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=\dfrac{(a+b)(a^2+b^2)}{ab}.$

Đặt $b=ka, k>0$. Khi đó: $P=\dfrac{a(k+1)(k^2+1)}{k}.$

Cố định k, khi đó: $\lim\limits_{a\to 0}P=0$. Vì $P>0,\forall a,b>0$ nên P không có giá trị nhỏ nhất.

Nhận xét. 1) Một số bạn đã nhầm khi cho rằng từ giả thiết thì a, b là các hằng số, nên khi tìm được $P=(a^2+b^2)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ thì đã kết luận P là hằng số không phụ thuộc vào α, β nên kết luận đây là giá trị nhỏ nhất của P. Cần chú ý rằng nếu giả thiết viết: Cho a, b là hai số thực dương *cho trước* (hoặc *xác định, cố định, không đổi, ...*) thì khi đó a, b mới là các hằng số.

2) Một số bạn đã đánh giá:

$$P=(a+b).\frac{a^2+b^2}{ab}\geq 2(a+b)$$

(vì $\dfrac{a^2+b^2}{ab}\geq 2, \forall a,b>0$). Dấu '=' xảy ra khi $a=b$ và kết luận: $\min P=2(a+b)=4a=4b$.

Như vậy các bạn đã sai lầm khi đánh giá $A\geq B$ thì A đạt giá trị nhỏ nhất khi $A=B$. Đánh giá này chỉ đúng khi B là đại lượng không đổi. Ở đây $B=2(a+b)$ là đại lượng thay đổi.

3) Chỉ có bạn *Lê Minh Mạnh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh** có lời giải chặt chẽ cho bài này.

NHƯ HOÀNG

Bài T10/579. *Hãy tìm số tự nhiên lẻ n nhỏ nhất sao cho số $M=p^8+np^4+\dfrac{n^2-1}{4}$ có ít nhất 4 ước nguyên tố phân biệt (với p là số nguyên tố bất kỳ).*

Lời giải. (Dựa theo ý của đa số các bạn).

Vì n là số tự nhiên lẻ nên $n=2k+1$ với k là số tự nhiên. Khi đó p^8+np^4 chẵn và

$$\frac{n^2-1}{4}=\frac{(2k+1)^2-1}{4}=\frac{4k^2+4k}{4}=k(k+1)$$

chia hết cho 2.

Vậy nên M chẵn, luôn có ước nguyên tố là 2.

Ta có: $M=\left(p^4+\dfrac{n-1}{2}\right)\left(p^4+\dfrac{n+1}{2}\right)$

$=(p^4+k)(p^4+k+1)$ (1).

Với $k=0,1,2,3$ và $p=2$, thay vào (1) ta thấy M đều có ít hơn 4 ước nguyên tố phân biệt.

Vậy $k\geq 4$, tức $n\geq 9$. Xét $k=4$, tức $n=9$ thì từ (1) suy ra: $M=(p^4+4)(p^4+5)$

$=(p^2+2p+2)(p^2-2p+2)(p^4+5)$ (2).

- Với $p=2$ thì thì M có 4 ước nguyên tố phân biệt là 2, 3, 5, 7.
- Với $p=3$ thì M có 4 ước nguyên tố phân biệt là 2,5,17,43.
- Với $p>3$ thì p lẻ và không chia hết cho 3 và p^4+5 chia hết cho 3 nên p^4+5 có 2 ước nguyên tố là 2 và 3.

$\text{ƯCLN}(p^2+2p+2,p^2-2p+2)$

$=\text{ƯCLN}(p^2+2p+2,4p)=1;$

$\text{ƯCLN}(p^2+2p+2,p^4+5)$

$=\text{ƯCLN}(p^2+2p+2,p^4+5-(p^2+2p+2)^2)$

$=\text{ƯCLN}(p^2+2p+2,-4p^3-8p^2-8p+1)=1.$

Tương tự: $\text{ƯCLN}(p^2-2p+2,p^4+5)$

Được quét bằng CamScanner

$= \text{ƯCLN}(p^2-2p+2, p^4+5-(p^2-2p+2)^2)$

$= \text{ƯCLN}(p^2-2p+2, 4p^3-8p^2+8p+1) = 1.$

Suy ra 3 số p^2+2p+2, p^2-2p+2, p^4+5 đôi một nguyên tố cùng nhau.

Nhận xét rằng p^2+2p+2, p^2-2p+2 là các số lẻ nên không chia hết cho 2 và do $p>3$ là số lẻ nên $p^2 \pm 2p+2$ không chia hết cho 3.

Suy ra M có ít nhất 4 ước nguyên tố phân biệt.

Kết luận: Số $n=9$ là số tự nhiên lẻ nhỏ nhất để số $M = p^8 + np^4 + \frac{n^2-1}{4}$ có ít nhất 4 số nguyên tố phân biệt ứng với mọi số nguyên tố p cho trước.

Nhận xét. Đây là dạng toán cơ bản về tính toán ước chung lớn nhất của bộ số nguyên dương cho trước. Đa số các bạn đều có lập luận đúng khi xét và tính toán các trường hợp riêng biệt ứng với $n=1,3,5,7$.

Các bạn sau đây có lời giải đúng.

An Giang: *Nguyễn Hoài Nhanh*, 11T2, *Đoàn Khánh Băng*, *Đinh Thanh Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Cần Thơ:** *Nguyễn Phúc An*, 10A, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Mai Trâm*, 9A6, THCS Lê Văn Thiêm, phường Thành An; *Đặng Sỹ Phước Đức*, 10T1, *Phạm Viết Lê Huy*, 11T2, *Ngô Bùi Anh Khoa*, *Nguyễn Tùng Duy*, *Nguyễn Viết Thế Tài*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 11CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, *Đường Minh Bằng*, 11A1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 10T, THPT chuyên Thăng Long; **Nghệ An:** *Lê Vũ Huỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, xã Hùng Châu, *Hoàng Văn Duy*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, xã Đô Lương; **Quảng Trị:** *Nguyễn Văn Phúc*, *Hoàng Hà Uyên Nhi*, 10T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Vĩnh Long:** *Lê Duy Minh*, *Đặng Thành Trung*, *Thái Minh Phúc*, *Lê Hoàng Khang*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T11/579. *Tìm tất cả các số thực x, y, z thỏa mãn hệ phương trình:* $\begin{cases} [x]+\{y\}=z \\ [y]+\{z\}=x \\ [z]+\{x\}=y \end{cases}$ (I), *trong đó* $[.]$ *là phần nguyên và* $\{.\}$ *là phần phân của một số thực.*

Lời giải. (Của *Nguyễn Văn Duy*, *Mai Phú Khang*, *Nguyễn Mai Trâm* và nhiều bạn khác)

Vì $x=[x]+\{x\}$ nên

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} [x]-[z]=\{z\}-\{y\} & (1) \\ [y]-[x]=\{x\}-\{z\} & (2). \\ [z]-[y]=\{y\}-\{x\} & (3) \end{cases}$$

Xét (1). Vì $0 \le \{z\} < 1, 0 \le \{y\} < 1$ nên $-1 < \{z\}-\{y\} < 1$.

Mà $[x]-[z]$ là số nguyên nên

$(1) \Leftrightarrow [x]-[z]=\{z\}-\{y\}=0 \Leftrightarrow [x]=[z]; \{z\}=\{y\}.$

Tương tự:

$(2) \Leftrightarrow [y]-[x]=\{x\}-\{z\}=0 \Leftrightarrow [y]=[x]; \{x\}=\{z\}.$

$(3) \Leftrightarrow [z]-[y]=\{y\}-\{x\}=0 \Leftrightarrow [z]=[y]; \{y\}=\{x\}.$

Vậy $[x]=[y]=[z]$ và $\{x\}=\{y\}=\{z\}$.

Suy ra $[x]+\{x\}=[y]+\{y\}=[z]+\{z\}$

hay $x=y=z \in \mathbb{R}$.

Vậy nghiệm của hệ (I) là $(a,a,a), a \in \mathbb{R}$.

Nhận xét. 1) Đã có bài T7-545 dạng tương tự:

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=1,1 & (1) \\ \{x\}+y+[z]=2,2 & (2) \\ [x]+\{y\}+z=3,3. & (3) \end{cases}$$

Có thể tìm thấy nhiều bài dạng này trong Chương 3, trang 167-239 của [1]: Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Nguyễn Thị Bình Minh, Tạ Duy Phượng, Nguyễn Thị Bích Thủy, *Phần nguyên và ứng dụng trong giải toán*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2020, 303 trang.

2) Bài này dễ nên nhiều bạn, thậm chí các bạn ở THCS cũng tham gia giải và giải đúng.

An Giang: *Nguyễn Đức Mạnh*, *Nguyễn Hoài Nhanh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, TP. Rạch Giá; **Cần Thơ:** *Nguyễn Phúc An*, 10A, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Mai Trâm*, 9A6, THCS Lê Văn Thiêm, Phường Thành Sen; *Nguyễn Anh Dũng*, *Nguyễn Tùng Duy*, *Ngô Bùi Anh Khoa*, *Bùi Tùng Lâm*, *Nguyễn Viết Thế Tài*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng**

Được quét bằng CamScanner

Yên: *Trần Gia Phú*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A0, THCS Quang Trung; *Trần Đức Hiếu, Nguyễn Bùi Minh Huy, Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long; **Nghệ An:** *Nguyễn Đức Dũng*, 11A1, THPT Yên Thành 2, xã Quan Thành, *Hoàng Văn Duy*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, xã Đô Lương, *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, xã Hùng Châu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Vũ Khắc Duy*, 11E3, THPT Lê Thánh Tông, Tân Phú, *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, *Nguyễn Chánh Thiện*, 11CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Vĩnh Long:** *Lê Hoàng Khang, Thái Minh Phúc*, 11T1, *Lê Thiện Khiêm*, 12T2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T12/579. *Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), đường cao AD. Gọi M là trung điểm BC, hai tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau tại I. Tia đối của tia DA cắt đường tròn đường kính BC tại T. Tia TM cắt đường tròn (I, IB) tại điểm X.*

a) *Chứng minh A, O, X thẳng hàng.*

b) *Đường tròn (XMB) cắt đoạn thẳng AB tại E, đường tròn (XMC) cắt đoạn thẳng AC tại F. Chứng minh hai đường tròn (AEF) và (I, IB) tiếp xúc nhau.*

Lời giải (theo bạn *Nguyễn Viết Thế Tài*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**).

a) Gọi X', Y là giao điểm của AO với cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa X và cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa X của đường tròn (I, IB); T' là giao điểm của tia $X'M$ và đường tròn đường kính BC (h.1).

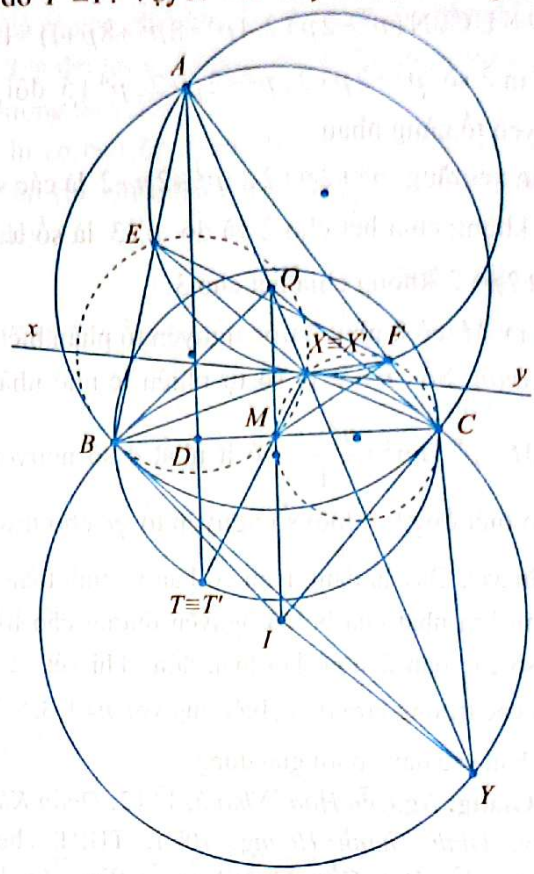
Dễ thấy $\dfrac{AO}{T'M}=\dfrac{BO}{BM}=\dfrac{1}{\sin\widehat{BOM}}=\dfrac{1}{\sin A}$.

Mặt khác, ta có $OX'.OY=OC^2=OM.OI$. Do đó các tam giác $OX'M$ và OIY đồng dạng. Điều đó có nghĩa là $\dfrac{OX'}{X'M}=\dfrac{OI}{IY}=\dfrac{OI}{IC}=\dfrac{1}{\sin\widehat{IOC}}=\dfrac{1}{\sin A}$.

Vậy $\dfrac{AO}{T'M}=\dfrac{OX'}{MX'}$. Nói cách khác, $AT'//OM$.

Kết hợp với $OM\perp BC$, suy ra $AT'\perp BC$.

Do đó $T'\equiv T$. Vậy $X'\equiv X$ hay A, O, X thẳng hàng.



Hình 1

b) Gọi xy là tiếp tuyến tại X của đường tròn (I, IB) (h.1). Vì các tứ giác $BMXE$, $CMXF$ nội tiếp nên

$$\widehat{EAF}+\widehat{EXF}=\hat{A}+\left(360^0-\widehat{EXM}-\widehat{FXM}\right)$$
$$=\hat{A}+\left(180^0-\widehat{EXM}\right)+\left(180^0-\widehat{FXM}\right)$$
$$=\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^0.$$

Do đó tứ giác $AEXF$ nội tiếp (1). Vì OB, OC tiếp xúc với đường tròn (I, IB) nên tứ giác $XBYC$ điều hòa. Kết hợp với $MB=MC$, ta có $\widehat{YXB}=\widehat{MXC}$.

Từ đó, chú ý rằng xy tiếp xúc với đường tròn (I, B) tại X và tứ giác $CMXF$ nội tiếp, suy ra:

$$\widehat{EXB}=180^0-\widehat{AXE}-\widehat{YXB}=180^0-\widehat{AFE}-\widehat{MXC}$$
$$=180^0-\widehat{AFE}-\widehat{MFC}=\widehat{EFM}.$$

Do đó: $\widehat{EXx}=\widehat{EXB}-\widehat{xXB}=\widehat{EFM}-\widehat{XCM}$
$$=\widehat{EFM}-\widehat{XFM}=\widehat{EFX}\ (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra xy tiếp xúc với đường tròn (AEF). Vậy các đường tròn (AEF) và (I, IB) tiếp xúc với nhau (tại X).

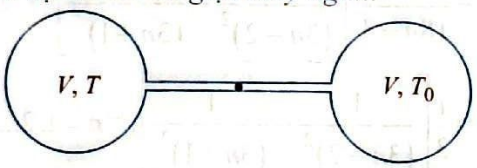
Được quét bằng CamScanner

Nhận xét. 1) Bài toán này không khó nhưng chỉ 10 bạn tham gia giải, nhiều bạn giải quá dài.

2) Xin nêu tên tất cả các bạn: **Phú Thọ:** *Trần Việt Tùng*, 11T, THPT chuyên Hùng Vương; **Thanh Hóa:** *Vũ Duy Mạnh*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Tùng Duy, Ngô Bùi Anh Khoa, Lê Minh Mạnh*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh, Trần Đức Hiếu*, 10T, THPT chuyên Thăng Long; **Vĩnh Long:** *Lê Thiện Khiêm*, 12T2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **An Giang:** *Nguyễn Sơn Khánh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/579. *Một nhiệt kế khí gồm có hai bình giống nhau, dung tích mỗi bình là V, nối với nhau bởi một ống nằm ngang có chiều dài l và tiết diện S (hình dưới). Trong ống có một giọt thủy ngân để ngăn cách không khí trong hai ống và để làm vật chuẩn chỉ nhiệt độ. Bình bên phải đặt trong máy điều nhiệt và được giữ ở nhiệt độ T_0. Tìm công thức cho sự phụ thuộc của nhiệt độ T của bình bên trái vào độ dời x của giọt thủy ngân.*



Cho $V = 5$ L, $l = 20$ cm, $S = 4$ mm^2, $T_0 = 300$ K, $x = 5$ cm. Từ kết quả của T tìm được cho biết nhiệt kế có nhạy không?

Lời giải. Lấy gốc để tính độ dời x là vị trí ứng với nhiệt độ của bình bên trái cũng bằng T_0 (như hình bên phải), giả thiết rằng vị trí ấy ở chính giữa ống nối hai bình. Gọi p_0 và p lần lượt là áp suất của khí trong bình khi nhiệt độ của bình bên trái là T_0 và T. Ta có:

$$\frac{p_0\left(V+\frac{1}{2}Sl\right)}{T_0}=\frac{p\left(V+\frac{1}{2}Sl+Sx\right)}{T} \quad (1);$$

$$\frac{p_0\left(V+\frac{1}{2}Sl\right)}{T_0}=\frac{p\left(V+\frac{1}{2}Sl-Sx\right)}{T_0} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra: $T=T_0\dfrac{2V+(l+2x)S}{2V+(l-2x)S}$.

Với $V = 5$ L $= 0{,}005$ m^3; $l = 20$ cm;

$S = 4$ mm^2 $= 4.10^{-6}$ m^2, $T_0 = 300$ K

thì khi $x = 5$ cm nhiệt độ T là:

$$T = T_0(1 + 0{,}8.10^{-4}) = 300{,}024 \text{ K}.$$

Với một độ chênh lệch nhiệt độ: $T - T_0 = 0{,}024$ K giọt thủy ngân di chuyển 5 cm, như vậy là nhiệt kế khá nhạy. Sự nở của bình đã được bỏ qua vì rất nhỏ so với sự nở của khí.

Nhận xét. Chúc mừng các bạn sau đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: **Hưng Yên:** *Trần Mai Anh*, lớp 11 Lý, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Lê Khánh Hà*, 11 Lý, *Đặng Văn Lê Mạnh*, 11 Toán 1; *Trương Khánh Toàn*, 11 Lý, THPT chuyên Hà Tĩnh.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/579. *Hạt nhân $^{210}_{84}P_0$ ban đầu đứng yên, sau đó phân rã α, biến đổi thành hạt nhân chì. Động năng của hạt α bay ra chiếm bao nhiêu phần trăm của năng lượng phân rã?*

Lời giải. Áp dụng định luật bảo toàn động lượng:

$$\vec{0} = \vec{p}_\alpha + \vec{p}_{Pb} \Rightarrow p_\alpha = p_{Pb} \Rightarrow p_\alpha^2 = p_{Pb}^2$$

$$\Leftrightarrow 2m_\alpha W_{đ_\alpha} = 2m_{Pb} W_{đ_{Pb}}$$

$$\Rightarrow \frac{W_{đ_\alpha}}{W_{đ_{Pb}}} = \frac{m_{Pb}}{m_\alpha} = 51{,}5.$$

Mặt khác: $W = W_{đ\alpha} + W_{đPb}$

$$\Rightarrow \frac{W_{đ_\alpha}}{W} = \frac{1}{1+\frac{1}{51{,}5}} \approx 98{,}1\%.$$

Vậy động năng của hạt α bay ra chiếm 98,1% của năng lượng phân rã.

Nhận xét. Chúc mừng các bạn sau đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: **Hà Tĩnh:** *Đặng Văn Lê Mạnh*, 11 Toán 1; *Đinh Văn Trường, Trương Khánh Toàn, Nguyễn Lê Khánh Hà*, 11 Lý, THPT chuyên Hà Tĩnh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Lê Huỳnh Hồng Lâm*, 10A1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông; **Hưng Yên:** *Trần Mai Anh*, 11 Lý, THPT chuyên Hưng Yên.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Được quét bằng CamScanner



MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ DẠNG TỔNG

HỒ PHẠM QUỐC TOÀN
(SV Khoa Sư phạm Toán Tin, Trường Sư phạm, Trường Đại học Đồng Tháp)

Trong các kì thi chọn Đội tuyển HSG các cấp bậc THPT, kiến thức về giới hạn dãy số là một phần nội dung rất quan trọng và không thể thiếu. Trong số các lớp bài toán đó, dạng bài toán xác định giới hạn của dãy số dạng tổng (dãy tổng) xuất hiện với tần suất rất nhiều. Nhân dịp *Chào mừng 60 năm TH&TT*, tôi viết chuyên đề này để trình bày ba phương pháp để giải một số bài toán xác định giới hạn của dãy tổng trong các đề thi chọn HSG, Olympic Toán. Một số bài được trích từ các đề thi Olympic Toán Sinh viên nhưng vẫn có thể phù hợp với đối tượng HSG THPT.

I. MỘT SỐ TỪ NGỮ VIẾT TẮT

OLP: Olympic.

OLP TSV: Olympic Toán Sinh viên.

HSG QG: Học sinh giỏi Quốc gia.

ĐT HSG: Đội tuyển học sinh giỏi.

II. KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ DÃY TỔNG

Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Xét dãy số $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ được xác định bởi $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i=u_1+u_2+...+u_n$.

Khi đó, dãy số $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ được gọi là dãy tổng.

III. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH GIỚI HẠN CỦA DÃY TỔNG

1. Phương pháp tìm số hạng tổng quát của dãy số $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$

a) Nội dung phương pháp

• Để rút gọn tổng $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i$, ta thường biến đổi

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}u_i=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-\lambda_{i+1})=\lambda_1-\lambda_{n+1}.$$

• Phương pháp tách: Với A, B là hai biểu thức xác định, ta có: $\dfrac{1}{A.B}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$.

b) Một số bài toán

Bài toán 1. *Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau:*

$$u_n=\frac{6n-1}{(3n-2)^2(3n+1)^2},\forall n=1,2,...$$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}u_i$.

Lời giải. Ta có: $u_n=\dfrac{6n-1}{(3n-2)^2(3n+1)^2}$

$$=\frac{6n-1}{18n-3}.\left[\frac{1}{(3n-2)^2}-\frac{1}{(3n+1)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(3n-2)^2}-\frac{1}{(3n+1)^2}\right],\forall n=1,2...$$

Do đó, ta có tổng:

$$\sum_{i=1}^{n}u_i=u_1+u_2+...+u_n=\frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{(3n+1)^2}\right].$$

Vậy nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}u_i=\lim\limits_{n\to+\infty}(u_1+u_2+...+u_n)$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\left[1-\frac{1}{(3n+1)^2}\right]=\frac{1}{3}.$$

Nhận xét. Nếu gặp các bài toán cho dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi hệ thức truy hồi $x_n=f(x_{n-1}),\forall n\geq 2$, để tìm giới hạn của $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}K(x_i)$ ta thường chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\pm\infty$. Sau đó, tính tổng S_n, và tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$. Để hiểu rõ hơn, ta xét các bài toán sau.

Được quét bằng CamScanner

Bài toán 2. *Cho dãy* $\{x_n\}$ *như sau:*

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(x_n^2 - x_n + 4\right), \forall n = 1,2,\ldots \end{cases} \quad (1)$$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{3}{x_i + 1}$.

Lời giải. Ta xét hiệu:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{3}(x_n - 2)^2 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do đó $\{x_n\}$ là dãy số tăng.

Biến đổi (1), ta được:

$$3(x_{n+1} - 2) = (x_n - 2)(x_n + 1).$$

Do $x_n \geq x_1 = 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên:

$$\frac{1}{x_{n+1} - 2} = \frac{3}{(x_n - 2)(x_n + 1)} = \frac{1}{x_n - 2} - \frac{1}{x_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_n + 1} = \frac{1}{x_n - 2} - \frac{1}{x_{n+1} - 2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do đó, ta tính được:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{3}{x_i + 1} = 3\left[\left(\frac{1}{x_1 - 2} - \frac{1}{x_2 - 2}\right) + \left(\frac{1}{x_2 - 2} - \frac{1}{x_3 - 2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{x_n - 2} - \frac{1}{x_{n+1} - 2}\right)\right]$$

$$= 3\left(\frac{1}{x_1 - 2} - \frac{1}{x_{n+1} - 2}\right) = 3\left(1 - \frac{1}{x_{n+1} - 2}\right), \forall n = 1,2,\ldots$$

Giả sử dãy $\{x_n\}$ bị chặn trên. Khi đó, theo tiêu chuẩn Weierstrass thì dãy $\{x_n\}$ hội tụ nên tồn tại giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$ với $l \in \mathbb{R}, l \geq 3$. Khi $n \to +\infty$, chuyển (1) qua giới hạn, ta được: $l = \dfrac{1}{3}\left(l^2 - l + 4\right) \Leftrightarrow l = 2$ (mâu thuẫn). Do vậy dãy $\{x_n\}$ tăng và không bị chặn trên. Khi đó: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_{n+1} - 2} = 0.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{3}{x_i + 1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[3\left(1 - \dfrac{1}{x_{n+1} - 2}\right)\right] = 3.$

Nhận xét. Để tìm biểu thức

$$\frac{1}{x_n + 1} = \frac{1}{x_n - 2} - \frac{1}{x_{n+1} - 2}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

ta đưa thêm các tham số $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\frac{1}{x_n + 1} = \alpha\left(\frac{1}{x_n + \beta} - \frac{1}{x_{n+1} + \beta}\right) \quad (1').$$

Khai triển và rút gọn $(1')$, ta được:

$$(\alpha - \beta)x_{n+1} + (\alpha - 1)x_n x_{n+1} = \alpha x_n^2 + (\alpha + \beta)x_n + \beta^2 \quad (1'').$$

So sánh (1) và $(1'')$, ta có:

$$\begin{cases} \alpha - 1 = 0 \\ \dfrac{\alpha}{\alpha - \beta} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \end{cases}.$$

Bài toán 3. *Cho dãy số thực* $\{u_n\}$ *xác định bởi*

$$\begin{cases} u_1 = 2024 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2024} + u_n, \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Đặt $v_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{u_i}{u_{i+1}}, \forall n = 1,2\ldots$ *. Tìm* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Lời giải. Dễ thấy $u_n > 0, \forall n \geq 1$.

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2024}u_n^2 > 0, \forall n \geq 1$. Suy ra $\{u_n\}$ là dãy tăng.

Biến đổi (1), ta có: $\dfrac{u_n^2}{2024} = u_{n+1} - u_n$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2024} \cdot \frac{u_n^2}{u_n u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}} = 2024\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}\right), \forall n = 1,2,\ldots$$

Do đó: $v_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{u_i}{u_{i+1}} = \dfrac{u_1}{u_2} + \dfrac{u_2}{u_3} + \ldots + \dfrac{u_n}{u_{n+1}}$

$$= 2024\left[\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right) + \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}\right)\right]$$

$$= 2024\left(\frac{1}{2024} - \frac{1}{u_{n+1}}\right), \forall n = 1,2\ldots$$

Được quét bằng CamScanner

Giả sử $\{u_n\}$ bị chặn trên, theo tiêu chuẩn Weierstrass thì $\{u_n\}$ hội tụ, do đó nó tồn tại giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a, (a \in \mathbb{R}, a > 0)$. Khi $n \to +\infty$, chuyển (1) qua giới hạn, ta được: $a = \dfrac{a^2}{2024} + a \Leftrightarrow a = 0$. Điều này mâu thuẫn. Vậy dãy $\{u_n\}$ tăng và không bị chặn trên.

Khi đó:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_{n+1}} = 0.$$

Do đó: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{u_i}{u_{i+1}}$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[2024\left(\frac{1}{2024} - \frac{1}{u_{n+1}}\right)\right] = 1.$$

Bài toán 4. (HSG THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bà Rịa – Vũng Tàu, 2023). *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi:* $\begin{cases} x_1 = 2 \\ 5x_{n+1} = x_n^3 + x_n^2 + 3 \ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1) \end{cases}$. *Xét dãy số $\{y_n\}$ với $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x_k + 3}{x_k^2 + 2x_k + 2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.*

Chứng minh dãy số $\{y_n\}$ có giới hạn và tính giới hạn đó.

Lời giải. Từ (1), ta có:

$$5(x_{n+1} - x_n) = (x_n - 1)^2 (x_n + 3) > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra $\{x_n\}$ là dãy số tăng.

Nếu dãy $\{x_n\}$ bị chặn trên, theo tiêu chuẩn Weierstrass thì dãy hội tụ nên tồn tại giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \ (a \geq 2)$. Khi $n \to +\infty$, chuyển (1) qua giới hạn, ta được: $5a = a^3 + a^2 + 3 \Leftrightarrow a = -3 \vee a = 1$. Điều này mâu thuẫn, do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Từ (1), ta có:

$$5(x_{n+1} - 1) = (x_n - 1)\left(x_n^2 + 2x_n + 2\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

và ta cũng có:

$$5(x_{n+1} - x_n) = (x_n - 1)^2 (x_n + 3), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra:

$$\frac{x_n + 3}{x_n^2 + 2x_n + 2} = \frac{x_{n+1} - x_n}{(x_n - 1)(x_{n+1} - 1)} = \frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}.$$

Khi đó: $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x_k + 3}{x_k^2 + 2x_k + 2}$

$$= \left(\frac{1}{x_1 - 1} - \frac{1}{x_2 - 1}\right) + \left(\frac{1}{x_2 - 1} - \frac{1}{x_3 - 1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{x_{n+1} - 1} \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x_{n+1} - 1} = 0$. Do đó ta tìm được:

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x_{n+1} - 1}\right) = 1.$$

Bài toán 5. *Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định bởi:*

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3 \\ u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n, \forall n \geq 1 \quad (1) \end{cases}.$$

Xét dãy số $\{v_n\}$ với

$$v_n = \frac{6u_n + 3^n - 6.2^n + n^2 + 3n + 5}{\sqrt{2n+3}}, \forall n \geq 1.$$

Hãy tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{v_i^2}$.

Lời giải. Với dãy số $\{u_n\}$, ta giải phương trình đặc trưng $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$ và được các nghiệm $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. Suy ra công thức tổng quát của dãy số $\{u_n\}$ có dạng $u_n = \alpha + \beta.2^n + \gamma.3^n$. Kết hợp với các giá trị u_1, u_2, u_3 ta tìm được $\alpha = -\dfrac{1}{2}, \beta = 1, \gamma = -\dfrac{1}{6}$.

Do đó, ta có công thức tổng quát của $\{u_n\}$ là

$$u_n = -\frac{1}{2} + 2^n - \frac{1}{6}.3^n, \ \forall n \geq 1.$$

Với dãy số $\{v_n\}$, ta có:

Được quét bằng CamScanner

$$v_n=\frac{6u_n+3^n-6.2^n+n^2+3n+5}{\sqrt{2n+3}}$$
$$=\frac{n^2+3n+2}{\sqrt{2n+3}},\forall n\geq 1.$$

Khi đó:

$$\frac{1}{v_n^2}=\frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2},\forall n\geq 1.$$

Suy ra $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{v_i^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+2)^2},\forall n\geq 1$. Do đó:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{v_i^2}=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]=\frac{1}{4}.$$

Nhận xét. Việc tìm công thức tổng quát của dãy $\{u_n\}$ dựa trên kĩ thuật sử dụng phương trình sai phân tuyến tính cấp ba.

Xét dãy số $\{u_n\}$ có dạng $u_1=x,u_2=y,u_3=z$ và $au_{n+3}+bu_{n+2}+cu_{n+1}+du_n=0,\forall n\geq 1$.

Ta xét phương trình đặc trưng:

$$a\lambda^3+b\lambda^2+c\lambda+d=0 \quad (*).$$

- Nếu phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ thì $u_n=\alpha\lambda_1^n+\beta\lambda_2^n+\gamma\lambda_3^n$.
- Nếu phương trình (*) có 1 nghiệm đơn, 1 nghiệm kép $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$ thì $u_n=(\alpha+\beta n)\lambda_1^n+\gamma\lambda_3^n$.
- Nếu phương trình (*) có nghiệm bội 3 là $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ thì $u_n=(\alpha+\beta n+\gamma n^2)\lambda_1^n$.

Dựa vào các giá trị u_1,u_2,u_3 ta tìm được các hệ số α,β,γ.

Bài toán 6 (HSG QG – 2004, HSG Cà Mau – 2022). *Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau:*

$$\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=\dfrac{(2+\cos 2\alpha)u_n+\cos^2\alpha}{(2-2\cos 2\alpha)u_n+2-\cos 2\alpha}\end{cases}\forall n=1,2,...$$

Trong đó α là một tham số cho trước. Xét dãy số $\{v_n\}$ như sau: $v_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2u_i+1}$, $n=1,2,...$

Tìm các giá trị của α để $\{v_n\}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn ấy.

Lời giải. Dễ thấy $u_n>0,\forall n=1,2,...$

Từ công thức xác định của dãy $\{u_n\}$ ta có:

$$2u_{n+1}+1=2\frac{(2+\cos 2\alpha)u_n+\cos^2\alpha}{(2-2\cos 2\alpha)u_n+2-\cos 2\alpha}+1$$
$$=\frac{6u_n+2\cos^2\alpha+1+2\sin^2\alpha}{(2-2\cos 2\alpha)u_n+2-\cos 2\alpha}$$
$$=\frac{3(2u_n+1)}{2(1-\cos 2\alpha)u_n+1-\cos 2\alpha+1}$$
$$=\frac{3(2u_n+1)}{(1-\cos 2\alpha)(2u_n+1)+1}.$$

Khi đó: $\frac{1}{2u_{n+1}+1}=\frac{1}{3}\left(2\sin^2\alpha+\frac{1}{2u_n+1}\right)$.

Suy ra: $\frac{1}{2u_{n+1}+1}-\sin^2\alpha=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2u_n+1}-\sin^2\alpha\right)$.

Đặt $x_n=\frac{1}{2u_n+1}-\sin^2\alpha$, $n=1,2,...$ thì

$$x_{n+1}=\frac{1}{3}x_n,\ n=1,2,....$$

Do đó $\{x_n\}$ là một cấp số nhân với $x_1=\frac{1}{3}-\sin^2\alpha$ và $q=\frac{1}{3}$ nên ta có:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{x_1(1-q^n)}{1-q}=\left(\frac{1}{3}-\sin^2\alpha\right)\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}$$
$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-\sin^2\alpha\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right).$$

Xét dãy $\{v_n\}$, ta có: $v_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2u_i+1}$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i+\sin^2\alpha\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i+n\sin^2\alpha$$
$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-\sin^2\alpha\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+n\sin^2\alpha.$$

Được quét bằng CamScanner

Vì dãy $\left\{\frac{1}{3^n}\right\}$ hội tụ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ tồn tại khi và chỉ khi $\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Khi đó:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{3}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

2. Phương pháp tổng tích phân – nguyên lí kẹp

a) Nội dung phương pháp

Hướng tư duy chính của phương pháp này là sử dụng nguyên lí kẹp để đưa bài toán ban đầu về việc tìm giới hạn của các dãy số đơn giản hơn.

• **Nguyên lí kẹp:** *Cho ba dãy số* $\{x_n\},\{y_n\}$ *và* $\{z_n\}$ *thỏa mãn* $x_n \le y_n \le z_n$ *với mọi* $n \ge n_0 \in \mathbb{N}^*$. *Khi đó, nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = l$ *thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = l$.

• **Tổng tích phân của hàm** f **trên đoạn** $[a;b]$ **ứng với một phép phân hoạch** P **nào đó:** *Cho hàm số* f *khả tích trên* $[a;b]$. *Với mỗi điểm* $n\in\mathbb{N}$ *chọn các điểm chia* $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ *sao cho* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{1\le i\le n} |x_i - x_{i-1}| = 0$ *và các điểm trung gian* $\zeta_i \in [x_{i-1};x_i]$. *Khi đó:*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)|x_{i-1} - x_i| = \int_a^b f(x)dx.$$

Với trường hợp $a=0, b=1$ bằng cách chọn $\zeta_i = x_i = \frac{i}{n}$, ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int\limits_0^1 f(x)dx$.

Khi gặp nhiều bài toán giới hạn dãy số dạng $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$ mà việc tính tổng trực tiếp dãy đó rất khó khăn, ta nên nghĩ đến phương pháp này!

• Một số bất đẳng thức hay được sử dụng để so sánh dãy số:

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!}, \forall x > 0.$$

$$1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \forall x \ge 0.$$

$$e^x \ge 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$1 - x \le e^{-x} \le 1 - x + \frac{x^2}{2}, \forall x \ge 0.$$

$$\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x, \forall x \in (-1;0).$$

$$\ln(x+1) < x < -\ln(1-x), \forall x \in (0;1).$$

Việc chứng minh các bất đẳng thức trên xem như bài tập dành cho các bạn!

b) Một số bài toán

Bài toán 7. *Cho dãy số* $\{x_n\}$ *xác định bởi:*

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \sqrt{x_n^2 + \frac{1}{4^n}}\right), \forall n \ge 1 \end{cases}.$$

Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{2024}^n}$.

Lời giải. Ta chứng minh $x_n = \frac{1}{2^n}\cot\frac{\pi}{2^{n+1}}, \forall n \ge 1$ bằng quy nạp. Ta có: $x_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}\cot\frac{\pi}{2^{1+1}}$ và

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{1}{4}\cot^2\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}\frac{2\cos^2\frac{\pi}{8}}{2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{2^2}\cot\frac{\pi}{2^{2+1}}.$$

Giả sử $x_k = \frac{1}{2^k}\cot\frac{\pi}{2^{k+1}}, \forall k \ge 1$. Ta sẽ chứng minh $x_{k+1} = \frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{\pi}{2^{k+2}}, \forall k \ge 1$. Thật vậy, ta có: $x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \sqrt{x_k^2 + \frac{1}{4^k}}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^k}\cot\frac{\pi}{2^{k+1}} + \sqrt{\left(\frac{1}{2^k}\cot\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)^2 + \frac{1}{4^k}}\right]$$

Được quét bằng CamScanner

$$=\frac{1}{2^{k+1}}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{k+1}}\frac{2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{k+2}}\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}}=\frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{\pi}{2^{k+2}},\forall k\geq 1.$$

Theo nguyên lí quy nạp, ta kết luận:

$$x_n=\frac{1}{2^n}\cot\frac{\pi}{2^{n+1}},\forall n\geq 1.$$

Mặt khác, ta có đánh giá

$$x_{2024}<\sqrt[n]{x_1^n+x_2^n+...+x_n^n}<x_{2024}.\sqrt[n]{2024},\forall n\geq 1.$$

Mà $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2024}=1$ nên theo nguyên lí kẹp, ta có:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_1^n+x_2^n+...+x_n^n}=x_{2024}=\frac{1}{2^{2024}}\cot\frac{\pi}{2^{2025}}.$$

Nhận xét. Ta chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2024}=1$ như sau: Ta có: $1<\sqrt[n]{2024}=\sqrt[n]{2024.\underbrace{1.1...1}_{n-1 \text{ so } 1}}$

$$<\frac{2024+\underbrace{1+1+...+1}_{n-1 \text{ so } 1}}{n}<1+\frac{2024}{n}.$$

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2024}{n}=0$ nên theo nguyên lí kẹp, ta suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2024}=1.$

Bài toán 8. *Tính giới hạn sau:*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n-\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right).$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức $\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\leq 1-\cos x\leq\frac{x^2}{2}$ với $x=\frac{1}{\sqrt{n+k}}$, ta có:

$$\frac{1}{2(n+k)}-\frac{1}{24(n+k)^2}\leq 1-\cos\frac{1}{\sqrt{n+k}}\leq\frac{1}{2(n+k)}.$$

Cho $k=1,2,...,n$ rồi lấy tổng, ta thu được:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}-\frac{1}{24}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}\leq n-\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{1}{\sqrt{n+k}}\leq\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\quad(1).$$

Ta có: $0<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}\leq\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{(n+1)^2}=\frac{n}{(n+1)^2}$

nên theo nguyên lý kẹp thì

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}=0\quad(2).$$

Mặt khác, ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}.\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2\quad(3).$$

Từ (1), (2), (3) và theo nguyên lí kẹp ta có được:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n-\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)=\frac{\ln 2}{2}.$$

Bài toán 9. *Cho các số nguyên dương h, m và cho đa thức $P(x)=a_0x^{m+1}+a_1x^m+...+a_mx$, $a_0\neq 0$. Xét dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi: $u_n=\sum\limits_{i=0}^{hn}P\left(\frac{1}{2n+i}\right)$, $n=1,2,...$. Tìm giới hạn*

$$\lim_{n\to+\infty}u_n.$$

Lời giải. Từ công thức xác định của dãy, ta có:

$$u_n=\sum_{i=0}^{hn}P\left(\frac{1}{2n+i}\right)$$

$$=a_0\sum_{i=0}^{hn}\left(\frac{1}{2n+i}\right)^{m+1}+a_1\sum_{i=0}^{hn}\left(\frac{1}{2n+i}\right)^{m}+...$$

$$+a_{m+1-j}\sum_{i=0}^{hn}\left(\frac{1}{2n+i}\right)^{j}+...+a_m\sum_{i=0}^{hn}\frac{1}{2n+i}\quad(1).$$

Với $j\geq 2$, ta có: $0<\sum\limits_{i=0}^{hn}\left(\frac{1}{2n+i}\right)^j<\frac{hn+1}{(2n)^j}.$

Mà $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{hn+1}{(2n)^j}=0$ do $j\geq 2$, theo nguyên lí kẹp, ta có: Với mọi $j\geq 2$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=0}^{hn}\left(\frac{1}{2n+i}\right)^j=0.$

Do đó, từ (1) suy ra:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(a_m\sum_{i=0}^{hn}\frac{1}{2n+i}\right)=a_m\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{hn}\frac{1}{2n+i}\quad(2).$$

Được quét bằng CamScanner

Đặt $S_n=\sum_{i=0}^{hn}\frac{1}{2n+i}=\frac{1}{2n}+\sum_{i=1}^{hn}\frac{1}{2n+i}$

$=\frac{1}{2n}+\sum_{i=1}^{hn}\frac{1}{2+\frac{i}{n}}.\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}+\sum_{i=1}^{hn}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$

với $f(x)=\frac{1}{2+x}$. Ta thấy $\sum_{i=1}^{hn}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$ là tổng tích phân của hàm $f(x)=\frac{1}{2+x}$ trên đoạn $[0;h]$ với các điểm chia $x_k=\frac{k}{n};k=\overline{0,hn}$ và cách chọn điểm $\Delta x_k=\frac{k}{n};k=\overline{1,hn}$.

Do f là hàm liên tục trên đoạn $[0;h]$ nên tồn tại tích phân $\int_0^h\frac{1}{2+x}dx=\ln(2+x)\Big|_0^h=\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)$.

Theo định nghĩa tích phân, ta có:

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{hn}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^h\frac{1}{2+x}dx=\ln\left(1+\frac{h}{2}\right).$$

Từ (2) ta có kết luận:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=a_m\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{hn}\frac{1}{2n+i}$$

$$=a_m\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2n}+\sum_{i=1}^{hn}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\right)=a_m\ln\left(1+\frac{h}{2}\right).$$

Nhận xét. Do tổng $\sum_{i=0}^{hn}\left(\frac{1}{2n+i}\right)^j$ có $hn+1$ số hạng và mọi số hạng $\left(\frac{1}{2n+i}\right)^j$ đều bé hơn $\frac{1}{(2n)^j}$, trừ trường hợp $i=0$ nên ta có đánh giá

$$0<\sum_{i=0}^{hn}\left(\frac{1}{2n+i}\right)^j<\frac{hn+1}{(2n)^j}.$$

3. Phương pháp sử dụng định lý Stolz – định lý trung bình Cesàro

a) Nội dung phương pháp

- **Định lý Stolz:** *Cho $\{u_n\},\{v_n\}$ là hai dãy số thỏa mãn:*

+ $\{v_n\}$ là dãy tăng thực sự và $\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty$;

+ $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n}=a.$

Khi đó, ta có $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=a.$

- **Định lý trung bình Cesàro:** Nếu $\lim_{n\to+\infty}u_n=L\in\mathbb{R}$ thì dãy trung bình cộng cũng hội tụ và $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_1+u_2+...+u_n}{n}=L.$

- **Hệ quả:** Nếu $\lim_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=L$ thì $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}=L.$

b) Một số bài toán.

Bài toán 10. *Cho dãy số $\{x_n\}$ có $\lim_{n\to+\infty}x_n=2.$*

Tính giới hạn $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(x_1+\frac{x_2}{\sqrt{2}}+\frac{x_3}{\sqrt{3}}+...+\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right).$

Lời giải. Ta chọn hai dãy số $\{u_n\},\{v_n\}$ sao cho

$$u_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{i}}\text{ và }v_n=\sqrt{n},n\geq1.$$

Dễ thấy $\{v_n\}$ là dãy số tăng thực sự và $\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty$. Ta xét:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(x_{n+1}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left[x_{n+1}\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[x_{n+1}\left(1+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}\right)\right]=2\lim_{n\to+\infty}x_{n+1}=2\lim_{n\to+\infty}x_n=4.$$

Theo định lý Stolz, suy ra:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(x_1+\frac{x_2}{\sqrt{2}}+\frac{x_3}{\sqrt{3}}+...+\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)=4.$$

Bài toán 11. *Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi*

$$\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=u_n+\frac{1}{u_n},\forall n=1,2,...\end{cases}$$

Tính giới hạn $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_1+u_2+...+u_n}{n\sqrt{n}}.$

Được quét bằng CamScanner

Lời giải. Ta có $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{u_n}>0,\forall n=1,2,\ldots.$

Suy ra $\{u_n\}$ là dãy tăng thực sự và $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty.$

Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_{n+1}^2-u_n^2\right)$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(u_n+\frac{1}{u_n}\right)^2-u_n^2\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{u_n^2}\right)=2.$

Theo hệ quả, ta có:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n^2}{n}=2\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{2}.$$

Đặt $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i$ và $y_n=n\sqrt{n}$. Ta thấy $\{y_n\}$ là dãy tăng thực sự và $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=+\infty$. Ta có:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}\left[(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\right]}{3n^2+3n+1}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{u_{n+1}}{\sqrt{n}}.\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{3+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}\right].$$

Mà $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}$ nên suy ra:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{2}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{\sqrt{n}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Theo định lý Stolz, ta có:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Bài toán 12. (Đề nghị OLP 30/04/2017). *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi:*

$$\begin{cases}x_1=a>1,x_2=1\\ x_{n+2}=x_n-\ln x_n,\forall n\in\mathbb{N}^*.\end{cases}$$

Đặt $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln x_{2k-1}^{n-k}$. Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}$.

Lời giải. Ta có: $x_{2n}=1,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Hàm số $f(x)=x-\ln x$ liên tục và đồng biến trên $(1;+\infty)$ vì $f'(x)=1-\frac{1}{x}>0,\forall x>1.$

Ta có: $x_{2n+1}=f\left(x_{2n-1}\right)$. Xét dãy số $\{x_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được:

$$x_{2n-1}>1,\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Thật vậy, ta có $x_1=a>1$. Giả sử $x_{2k-1}>1$, khi đó $x_{2k+1}=f\left(x_{2k-1}\right)>f(1)=1.$

Vậy dãy số $\{x_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ bị chặn dưới bởi 1.

Vì $x_{2n-1}>1$ nên $\ln x_{2n-1}>0$. Do đó:

$$x_{2n+1}=x_{2n-1}-\ln x_{2n-1}<x_{2n-1}.$$

Vậy dãy số $\{x_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ giảm.

Theo tiêu chuẩn Weierstrass, suy ra dãy số $\{x_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ có giới hạn hữu hạn.

Gọi $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n-1}=a$. Ta có $a=a-\ln a,\ (a\ge1).$

Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n-1}=a=1$. Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=1.$

Ta có: $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln x_{2k-1}^{n-k}$

$=(n-1)\ln x_1+(n-2)\ln x_3+\ldots+\ln x_{2n-3}$

$=(n-1)(x_1-x_3)+(n-2)(x_3-x_5)+\ldots+(x_{2n-3}-x_{2n-1})$

$=nx_1-\left(x_1+x_3+x_5+\ldots+x_{2n-1}\right).$

Theo định lý trung bình Cesàro, ta có:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{2n}}{2n}=1.$$

Suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{nx_1-S_n+n}{2n}=1.$ Do đó:

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a+1}{2}-\frac{S_n}{2n}\right)=1.$ Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=a-1.$

Bài toán 13. *Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ xác định bởi*

$$u_n=2^n\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n+1\text{ dấu căn bậc hai}},\forall n=1,2,\ldots$$

Đặt $v_n=\frac{1}{\ln n}\left(\frac{u_1}{1}+\frac{u_2}{2}+\ldots+\frac{u_n}{n}\right),\forall n=1,2,\ldots.$

Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

Lời giải. Đặt $x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ dấu căn bậc hai}},\forall n=1,2,\ldots$

Bằng quy nạp, ta sẽ chứng minh

Được quét bằng CamScanner

$$x_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}, \forall n = 1,2,\ldots \quad (*).$$

Với $n=1$, ta có $x_1 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{2^{1+1}}$. Suy ra công thức (*) đúng với $n=1$.

Giả sử công thức (*) đúng với $n=k$ $(k \geq 1, k \in \mathbb{N})$, tức là

$$x_k = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}, \forall k \geq 1.$$

Ta sẽ chứng minh công thức (*) đúng với $n=k+1$, $(k \geq 1, k \in \mathbb{N})$, tức là

$$x_{k+1} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}, \forall k \geq 1.$$

Thật vậy, ta có $x_{k+1} = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{k+1 \text{ dấu căn bậc hai}}$. Theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$x_{k+1} = \sqrt{2+x_k} = \sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}.$$

Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta có $x_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}, \forall n = 1,2,\ldots$ Ta có:

$$u_n = 2^n\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} = 2^n\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$$

$$= 2^n\sqrt{2.2\sin^2\frac{\pi}{2^{n+2}}} = 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}, \ \forall n = 1,2,\ldots$$

Khi $n \to +\infty$ thì $\frac{\pi}{2^{n+2}} \to 0$ suy ra:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{\pi}{2}.$$

Xét hai dãy số $\{a_n\}, \{b_n\}$ với $a_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{u_i}{i}$ và $b_n = \ln n$. Ta thấy dãy $\{b_n\}_{n\geq 2}$ tăng thực sự và $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. Ta có:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n+1}.\frac{u_{n+1}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[u_{n+1}.\frac{n}{n+1}.\frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right].$$

Suy ra $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{2}$.

Theo định lý Stolz, ta có $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\pi}{2}$. Vậy

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\left(\frac{u_1}{1}+\frac{u_2}{2}+\ldots+\frac{u_n}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\pi}{2}.$$

Nhận xét. Bài toán trên đã sử dụng hai kết quả giới hạn thường gặp: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ và $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Khi $n \to +\infty$ thay x bởi $\frac{1}{n}$, ta dễ dàng tìm được $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1$.

4. Bài tập rèn luyện

Bài 1. (*HSG Tây Ninh, 2023*). Cho dãy số thực $\{u_n\}$ xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n\sqrt{1+u_n^2}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Đặt $S_n = \frac{u_1^2}{u_2^2}+\frac{u_2^2}{u_3^2}+\ldots+\frac{u_n^2}{u_{n+1}^2}$. Tìm $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Bài 2. (*HSG QG 2001, Bảng B*). Cho dãy số $\{u_n\}$, $n = 1,2,\ldots$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{2}{3} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2(2n+1)u_n+1} \end{cases}.$$

Tính giới hạn $\lim_{n\to+\infty} S_n$ với $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$.

Bài 3. (*Chọn Đội tuyển HSG QG Tuyên Quang, 2022*). Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(u_n^3-2\right), \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

Được quét bằng CamScanner

1) Chứng minh rằng: $u_n > 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2) Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(u_i+1)^2(u_i-2)}{u_{i+1}u_i}\right)$.

Bài 4. (*HSG QG, 2009*). Cho dãy số $\{x_n\}$ như sau: $x_1 = \dfrac{1}{2}$

và $x_n = \dfrac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2}, \forall n = 2,3,...$

Chứng minh rằng dãy $\{y_n\}$, với $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i^2}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$ và tìm giới hạn đó.

Bài 5. (*Đề xuất OLP TSV ĐH Ngân hàng TP.HCM, 2016*). Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k\sqrt{e}}\right)$.

Bài 6. Cho dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{(8x_n - 1)^{2024}}{2024} + x_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

Đặt $y_n = \dfrac{(8x_1-1)^{2023}}{8x_2-1} + \dfrac{(8x_2-1)^{2023}}{8x_3-1} + ... + \dfrac{(8x_n-1)^{2023}}{8x_{n+1}-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

Bài 7. (*Chọn Đội tuyển HSG PTNK, TP. Hồ Chí Minh, 2022*). Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm giới hạn

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\left(\frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + ... + \frac{u_n}{n}\right).$$

Bài 8. (*T9/405, TH&TT*). Cho $k \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R}$. Xét dãy số $\{a_n\}$ thỏa mãn:

$$a_n = \frac{\lfloor 1^k.\alpha \rfloor + \lfloor 2^k.\alpha \rfloor + ... + \lfloor n^k.\alpha \rfloor}{n^{k+1}}, \forall n = 1,2,...$$

trong đó $\lfloor x \rfloor$ là kí hiệu phần nguyên của x. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Bài 9. (*Trường Đông Toán học, 2020*). Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_1 = 2020$ và

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{n}x_n^2}{1+\sqrt{n+1}x_n}, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Với mỗi $n \in \mathbb{Z}^+$, đặt $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x_{k+1}}{x_k}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Bài 10. (*Đề chọn Đội tuyển HSG TP. Đà Nẵng, 2023*). Xét dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n^3}, \forall n \ge 1 \end{cases}.$$

Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\log_{2023} n}\left(\dfrac{x_1^4}{1^2} + \dfrac{x_2^4}{2^2} + ... + \dfrac{x_n^4}{n^2}\right)$.

Bài 11. (*HSG Lâm Đồng dự thi HSG QG, 2024*). Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 4}{6 - u_n}, \forall n \ge 1 \end{cases}.$$

1) Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

2) Đặt $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{u_k - 4}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{T_n}{8n+2024}$.

Bài 12. (*HSG Quảng Nam, 2023*). Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 2023 \\ u_{n+1} = \dfrac{2022u_n^3 + 2022u_n}{2022u_n^2 - u_n + 2022}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{u_i^2}{1+u_i^2}$.

Bài 13. (*HSG Thừa Thiên Huế, 2023*). Cho dãy số $\{x_n\}_{n\ge1}$ xác định bởi: $\begin{cases} x_1 = x_2 = 1 \\ x_{n+1} = x_n^2\left(1 + \dfrac{1}{x_{n-1}}\right), n \ge 2 \end{cases}$.

1) Chứng minh rằng $x_n \ge 2^{n-2}$ với mọi $n \ge 1$.

2) Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{x_n}{2x_{n+1}+2}(x_1 + x_2 + ... + x_n)\right]$.

Được quét bằng CamScanner

Bài 14. (*HSG Cà Mau, 2024*). Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{6u_n}{\sqrt{2u_n + 9} + 3}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

Đặt $v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k^2$. Chứng minh dãy $\{v_n\}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 15. (*Olympic TSV Quốc tế, 1995*).
Cho dãy số thực dương $\{x_n\}$ xác định bởi:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = 2 + \sqrt{x_{n-1}} - 2\sqrt{1 + \sqrt{x_{n-1}}}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $y_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k x_k$. Chứng minh $\{y_n\}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 16. (*Kỷ yếu Olympic TSV 2019, ĐH Đồng Tháp*). Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^{2020} + 2018u_n^{2019} + u_n \quad \forall n \geq 1 \end{cases}.$$

1) Chứng minh rằng: Dãy $\{u_n\}$ không bị chặn trên.

2) Tính giới hạn

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{u_1^{2019}}{u_2 + 2018} + \frac{u_2^{2019}}{u_3 + 2018} + \ldots + \frac{u_n^{2019}}{u_{n+1} + 2018} \right).$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Tài Chung. *Bồi dưỡng HSG Chuyên khảo dãy số*. NXBĐHQG Hà Nội, 2014.

[2] Văn Phú Quốc. *Bồi dưỡng HSG môn Toán II*. NXB ĐHQG Hà Nội, 2014.

[3] Phan Huy Khải. *Các bài toán về dãy số BD HSG*. NXBGD, 2007.

[4] Nguyễn Tất Thu. *Dãy số và giới hạn của dãy số*.

[5] *Tuyển tập đề thi Olympic 30/04 lần thứ XX XXI XXII XXIII*.

[6] *Group Hướng tới Olympic Toán VN*. https://www.facebook.com/groups/vmo.tst/?ref=share&mibextid=NSMWB

[7] *Kỉ yếu Olympic Toán Sinh viên 2014 – 2019*.

[8] TS. Lê Phương (chủ biên). *Hướng dẫn ôn thi Olympic Toán sinh viên (Giải tích)*.

$$m + 2S(m) = n,$$

trong đó $S(m)$ là tổng các chữ số của m.

****

BẠN ĐỌC ... (*Tiếp theo trang 19*)

vectơ chỉ phương của đường thẳng AC là $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{AC} = \left(\frac{32}{3}; \frac{16}{3}\right)$. Ta có theo quy tắc hình bình hành thì $\vec{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = \left(\frac{16}{3}; \frac{32}{3}\right) + \left(\frac{32}{3}; \frac{16}{3}\right) = (16;16)$.

Khi đó vectơ $\vec{u}$ chính là chỉ phương của đường phân giác trong. Do đường phân giác trong và phân giác ngoài vuông góc với nhau nên vectơ chỉ phương đường phân giác ngoài là: $\vec{v'} = (-16;16) = 16(-1;1)$ hay ta lấy $\vec{v} = (-1;1)$ vectơ chỉ phương chỉ phương của phương trình đường phân giác ngoài. Vậy phương trình đường phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$ là:

$$\frac{x + \frac{14}{3}}{-1} = \frac{y + \frac{16}{3}}{1} \Leftrightarrow x + y + 10 = 0.$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;5), B(-4;-5), C(4;-1)$. Tìm phương trình đường phân giác ngoài của góc A?

Đáp số: $y - 5 = 0$

Bài 2. Cho tam giác ABC có $A(-2;-1), B(-1;3), C(6;1)$. Viết phương trình đường phân giác ngoài góc A của tam giác ABC.

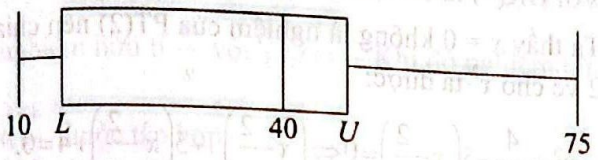
Đáp số: $x + y + 3 = 0$

Được quét bằng CamScanner

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 124

PROBLEM. *A research student weighed lizard eggs in grams and recorded the results. The following box and whisker diagram shows a summary of the results where L and U are the lower and upper quartiles respectively.*



The interquartile range is 20 grams and there are no outliers in the results. Find the minimum possible value of U.

Solution. Since there is no outlier, $75 \le U + 1.5IQR$, where $IQR = U - L$. Therefore, in this case, we have $75 \le U + 1.5 \times 20 = U + 30$. Hence $45 \le U$ and the minimum value for U is 45.

Remark: This problem is collected from an International Baccalaureate Math exam paper.

TỪ VỰNG/KÍ HIỆU

box and whisker diagram : *biểu đồ hộp và ria (một số SGK gọi là biểu đồ hộp)*

lower quartile : *tứ phân vị thứ nhất* Q_1

upper quartile : *tứ phân vị thứ ba* Q_3

IQR (inter quartile range): *khoảng tứ phân vị*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 122

BÀI TOÁN. *Xét tam giác Pascal*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

Nếu ta ghép các số trong mỗi hàng lại với nhau để tạo thành một số mới thì ta sẽ thu được số nào và tại sao?

Lời giải. Nếu ta ghép các số trong mỗi hàng lại với nhau, ta sẽ thu được dãy số:

$$1, 11, 121, 1331, 14641, \ldots$$

Đây chính là dãy các lũy thừa của 11:

$$11^0, 11^1, 11^2, 11^3, 11^4, \ldots$$

Ta biết rằng tam giác Pascal bao gồm các hệ số trong khai triển nhị thức Newton.

Xét một khai triển cụ thể:

$$(10+1)^3 = 1.10^3 + 3.10^2 + 3.10^1 = 1331$$

Từ đó ta thấy rằng các số trong hàng thứ n của tam giác Pascal tương ứng với các hệ số của các hệ số của 10^i trong khai triển của $(10 + 1)^n$. Do đó, ta nhận được dãy các lũy thừa của 11.

Chú thích. Bài toán này do thầy *Nghiêm Xuân Lực*, Trường THPT Thăng Long, 44 Tạ Quang Bửu, Bạch Mai, Hà Nội đề xuất.

Nhận xét. Hoan nghênh các bạn: *Bùi Tùng Lâm*, 11 Toán 1, THPT chuyên **Hà Tĩnh**, *Nguyễn Hùng Cường*, phường An Nhơn, **Gia Lai** đã có bài dịch tốt.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

****

THÔNG BÁO

Bạn đọc có thể đặt mua các ấn phẩm của Tạp chí Toán học và Văn học trong nhà trường tại các bưu cục của VNPT trên cả nước với mã đặt như sau: *Toán học và Tuổi trẻ* (C168); *Toán Tuổi thơ 1* (C169); *Toán Tuổi thơ 2* (C169.1); *Văn học và Tuổi trẻ* (C668); *Văn Tuổi thơ* (C668.1).

****

Được quét bằng CamScanner



BÀI TOÁN 103. *Giải phương trình*

$$\frac{x^4+4}{x^2-2}-5x=0 \quad (1).$$

Lời giải. ĐK: $x^2-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\sqrt{2}$ và $x\neq-\sqrt{2}$ (*).

Cách 1. *Phương pháp đặt ẩn phụ*

Với ĐK(*) ta có: $(1)\Leftrightarrow\dfrac{x^4-4x^2+4+4x^2}{x^2-2}-5x=0$

$$\Leftrightarrow\frac{(x^2-2)^2+4x^2}{x^2-2}-5x=0\Leftrightarrow x^2-2+4\frac{x^2}{x^2-2}-5x=0.$$

Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm nên chia 2 vế cho x ta được: $\dfrac{x^2-2}{x}+4\dfrac{x}{x^2-2}-5=0.$

Đặt $t=\dfrac{x^2-2}{x}$, $t\neq 0\Rightarrow\dfrac{x}{x^2-2}=\dfrac{1}{t}$. PT trở thành:

$$t+\frac{4}{t}-5=0\Leftrightarrow t^2-5t+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=4\end{array}\right.$$

Với $t=1\Rightarrow\dfrac{x^2-2}{x}=1\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow x=-1, x=2$

(thỏa mãn ĐK(*)).

Với $t=4\Rightarrow\dfrac{x^2-2}{x}=4\Rightarrow x^2-4x-2=0$

$$\Rightarrow x=2-\sqrt{6}, x=2+\sqrt{6}$$ (thỏa mãn ĐK(*)).

Vậy PT(1) có 4 nghiệm:

$$x=-1,\ x=2,\ x=2-\sqrt{6},\ x=2+\sqrt{6}.$$

Cách 2. *Phương pháp đưa về phương trình tích*

Với ĐK(*) ta có: $(1)\Leftrightarrow x^4-5x^3+10x+4=0$ (2)

$$\Leftrightarrow x^4+x^3-6x^3+6x+4x+4=0$$
$$\Leftrightarrow x^3(x+1)-6x(x^2-1)+4(x+1)=0$$
$$\Leftrightarrow(x+1)(x^3-6x^2+6x+4)=0$$
$$\Leftrightarrow(x+1)\left[(x^3-8)-6(x^2-x-2)\right]=0$$
$$\Leftrightarrow(x+1)\left[(x-2)(x^2+2x+4)-6(x+1)(x-2)\right]=0$$
$$\Leftrightarrow(x+1)(x-2)(x^2-4x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\x-2=0\\x^2-4x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\\x=2\pm\sqrt{6}\end{array}\right.$$ (thỏa mãn ĐK(*)).

Vậy PT(1) có 4 nghiệm:

$$x=-1, x=2, x=2-\sqrt{6}, x=2+\sqrt{6}.$$

Cách 3. *Phương pháp đưa về phương trình bậc hai*

Với ĐK(*) ta có: $(1)\Leftrightarrow x^4-5x^3+10x+4=0$ (2).

Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của PT(2) nên chia 2 vế cho x^2 ta được:

$$x^2+\frac{4}{x^2}-5\left(x-\frac{2}{x}\right)=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{2}{x}\right)^2-5\left(x-\frac{2}{x}\right)+4=0.$$

Đặt $u=x-\dfrac{2}{x}$. PT trở thành:

$$u^2-5u+4=0\Leftrightarrow u=1, u=4.$$

Với $u=1\Rightarrow x-\dfrac{2}{x}=1\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow x=-1, x=2.$

Với $u=4\Rightarrow x-\dfrac{2}{x}=4\Rightarrow x^2-4x-2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2-\sqrt{6}\\x=2+\sqrt{6}\end{array}\right.$.

Các nghiệm tìm được đều thỏa mãn ĐK(*).

Vậy phương trình có 4 nghiệm:

$$x=-1, x=2, x=2-\sqrt{6}, x=2+\sqrt{6}.$$

Cách 4. *Phương pháp hệ số bất định*

Với ĐK(*) ta có: $(1)\Leftrightarrow x^4-5x^3+10x+4=0$ (2).

Giả sử vế trái của PT(2) được phân tích thành:

$$x^4-5x^3+10x+4=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$$

(với $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$)

$$\Leftrightarrow x^4-5x^3+10x+4=x^4+(c+a)x^3+(b+d+ac)x^2+(ad+bc)x+bd$$

Đồng nhất hệ số ta có: $\left\{\begin{array}{l}c+a=-5\\b+d+ac=0\\ad+bc=10\\bd=4\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a=-1\\b=-2\\c=-4\\d=-2\end{array}\right.$.

Khi đó: $x^4-5x^3+10x+4=(x^2-x-2)(x^2-4x-2)$

Do đó: $(2)\Leftrightarrow(x^2-x-2)(x^2-4x-2)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x-2=0\\x^2-4x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\\x=2\pm\sqrt{6}\end{array}\right.$$ (thỏa mãn ĐK(*)).

Vậy PT(1) có 4 nghiệm:

Được quét bằng CamScanner

$$x=-1, x=2, x=2-\sqrt{6}, x=2+\sqrt{6}.$$

Cách 5. Phương pháp tìm nghiệm hữu tỉ

Với ĐK(*) ta có: $(1)\Leftrightarrow x^4-5x^3+10x+4=0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^3-6x^2+6x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x^3-6x^2+6x+4=0 \end{array}\right.$$

Xét $g(x)=x^3-6x^2+6x+4$. Giả sử $g(x)$ có nghiệm hữu tỉ $\frac{r}{s}$ với $(r,s)=1$. Khi đó nghiệm hữu tỉ $\frac{r}{s}$ thuộc tập hợp:

$$\left\{\frac{r}{s}: r|4, s|1, \frac{g(1)}{s-r}\in\mathbb{Z}, \frac{g(-1)}{s+r}\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$=\left\{\frac{r}{s}: r|4, s|1, \frac{5}{s-r}\in\mathbb{Z}, \frac{-9}{s+r}\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$=\{-2,2,-4,4\}.$$

Dùng sơ đồ Horner thử 4 giá trị trên ta được nghiệm hữu tỉ $x=2$. Khi đó:

$$g(x)=(x-2)(x^2-4x-2)$$

$$g(x)=0\Leftrightarrow (x-2)(x^2-4x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x^2-4x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=2\pm\sqrt{6} \end{array}\right. \text{ (thỏa mãn ĐK (*)).}$$

Vậy PT(1) có 4 nghiệm:

$$x=-1, x=2, x=2-\sqrt{6}, x=2+\sqrt{6}.$$

Cách 6. Phương pháp giải phương trình bậc 4 tổng quát

Với ĐK(*) ta có: $(1)\Leftrightarrow x^4-5x^3+10x+4=0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-\frac{5x}{2}\right)^2=\frac{25}{4}x^2-10x-4.$$

Cộng hai vế của phương trình với tổng $\left(x^2-\frac{5x}{2}\right)y+\frac{y^2}{4}$ ta được:

$$\left(x^2-\frac{5x}{2}+\frac{y}{2}\right)^2=\left(\frac{25}{4}+y\right)x^2-5\left(\frac{y}{2}+2\right)x+\frac{y^2}{4}-4 \quad (*).$$

Ta chọn y sao cho vế phải là bình phương của một nhị thức. Biệt thức:

$$\Delta=25\left(\frac{y}{2}+2\right)^2-4\left(\frac{25}{4}+y\right)\left(\frac{y^2}{4}-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow y^3-66y-200=0.$$

Đây là phương trình bậc 3 theo y. Ta tìm được nghiệm $y=-4$ và thay vào phương trình (*) ta được: $\left(x^2-\frac{5x}{2}-2\right)^2=\frac{9}{4}x^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-\frac{5x}{2}-2=\frac{3}{2}x \\ x^2-\frac{5x}{2}-2=-\frac{3}{2}x \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-2=0 \\ x^2-4x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \\ x=2\pm\sqrt{6} \end{array}\right. \text{ (thỏa mãn ĐK(*)).}$$

Vậy PT(1) có 4 nghiệm:

$$x=-1, x=2, x=2-\sqrt{6}, x=2+\sqrt{6}.$$

TRẦN VĂN HẠNH

(GV Trường Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

Nhận xét. Các bạn: *Mai Thiện Ân*, 9B, THCS Chu Văn An, xã Nga Sơn, **Thanh Hóa**, *Huỳnh Thanh Trúc*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**, *Nguyễn Hùng Cường*, phường An Nhơn, **Gia Lai**, *Vũ Đức Duy*, phường Bình Lợi Trung, **TP. Hồ Chí Minh**, mỗi bạn đóng góp 2 cách giải. Các bạn: *Hồ Thành Đạt*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**; *Lê Ánh Dương*, 12 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**; *Dương Bảo Minh*, *Trần Nguyễn Anh Huy*, 11A1, *Nguyễn Đức Quang Minh*, *Nguyễn Hương Giang*, 11E1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, **TP. Hồ Chí Minh**; *Trần Phương Dung*, 9A, THCS Bắc Sơn, **Quảng Ninh**, mỗi bạn đóng góp 1 cách giải. Những cách giải của các bạn tương tự như những cách giải trên của bạn *Trần Văn Hạnh*, người giới thiệu bài toán. Hoan nghênh tất cả các bạn.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 105 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 28/2/2026.

BÀI TOÁN 105. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AB=BC=CD=2, AD=4$, cạnh bên $SA=2\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính côsin góc phẳng nhị diện $[B;SC;D]$.*

NGUYỄN QUANG NAM

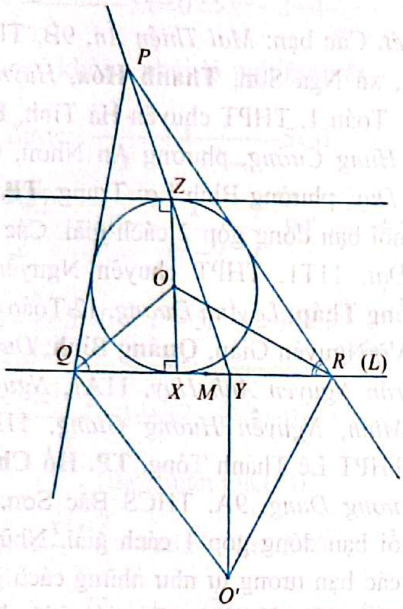
(GV Trường THPT Quỳ Hợp 2 - Nghệ An)

Được quét bằng CamScanner



BÀI TOÁN 111 (IMO 1992). *(L) là tiếp tuyến của đường tròn (C) và M là điểm trên (L). Hãy tìm quỹ tích các điểm P thỏa mãn tính chất: tồn tại hai điểm R, Q trên (L) sao cho RM = QM và tam giác PQR nhận (C) là đường tròn nội tiếp.*

Lời giải.



Gọi X là tiếp điểm của (L) và (C), O là tâm của (C). Giả sử XO cắt (C) tại điểm thứ hai Z. Gọi Y là điểm trên QR sao cho M là trung điểm của XY.

Gọi (C') là đường tròn tiếp xúc với các đường thẳng QR, PQ, PR nhưng ở khác phía với (C) so với cạnh QR (tức là đường tròn bàng tiếp góc P của tam giác PQR). Giả sử (C') tiếp xúc với QR tại Y'.

Phép vị tự tâm P, tỷ số $\frac{PY'}{PZ}$ biến (C) thành (C'), tiếp tuyến với (C) tại Z biến thành đường thẳng QR, suy ra Z biến thành Y'. Ta sẽ chứng minh $QX = RY'$. Thật vậy, hiển nhiên X và Y' là chân các đường vuông góc trên QR hạ từ O và O' tương ứng. Ta cũng có: $\widehat{OQO'} = \widehat{ORO'} = 90^0$.

Từ đó suy ra: $\Delta QY'O' \sim \Delta OXQ$. Do đó:

$$\frac{QY'}{Y'O'} = \frac{OX}{XQ}.$$

Cũng vậy, $\Delta RXO \sim \Delta O'Y'R$ nên $\frac{RX}{XO} = \frac{O'Y'}{Y'R}$.

Suy ra: $QY'.XQ = Y'O'.OX = RX.Y'R$.

Từ đó ta được:

$$\frac{QX}{RX} = \frac{RY'}{QY'} \Leftrightarrow \frac{QX}{RX+QX} = \frac{RY'}{QY'+RY'} \Leftrightarrow \frac{QX}{QR} = \frac{RY'}{QR}$$

suy ra: $QX = RY'$. Mặt khác, $QX = RY$ vì M vừa là trung điểm của XY, vừa là trung điểm QR, do đó ta có $Y \equiv Y'$. Như vậy, điểm P di động nhưng luôn nằm trên tia YZ (dễ thấy Z cố định, Y cố định nên tia YZ cố định).

Đảo lại, lấy điểm P bất kỳ trên tia YZ thì bằng cách lý luận tương tự như trên ta cũng có $QX = RY$. Nhưng M là trung điểm của XY nên suy ra M là trung điểm của QR.

Vậy quỹ tích của P là tia YZ.

Nhận xét. Hoan nghênh bạn *Vũ Đức Duy*, phường Bình Lợi Trung, **TP. Hồ Chí Minh** đã có lời giải đúng cho bài toán này.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30/1/2026.

BÀI TOÁN 113. *Cho hệ phương trình với* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *là các ẩn số:*

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = x_2 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ax_{n-1}^2 + bx_{n-1} + c = x_n \\ ax_n^2 + bx_n + c = x_1 \end{cases}$$

trong đó a, b, c là các số thực và $a \neq 0$. *Chứng minh rằng:*

a) *hệ không có nghiệm thực nếu* $(b-1)^2 - 4ac < 0$.

b) *hệ có một nghiệm duy nhất nếu* $(b-1)^2 - 4ac = 0$.

c) *hệ có hơn một nghiệm thực nếu* $(b-1)^2 - 4ac > 0$.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Được quét bằng CamScanner



GIẢI ĐÁP: BIỂU DIỄN BỞI BAO NHIÊU ĐIỂM ?

(Đề đăng trên TH&TT số 579, tháng 9 năm 2025)

Phân tích sai lầm. Học sinh đã mắc sai lầm: hai họ nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ và $x=\frac{-\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3}$ có chung họ nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$, do đó nghiệm của phương trình biểu diễn trên đường tròn lượng giác bởi 4 điểm. Chọn **B**.

Nhận xét. Không có bạn nào phát hiện được sai lầm trong bài này.

KIHIVI

AI SAI, AI ĐÚNG ?



Trong bài kiểm tra có câu hỏi trắc nghiệm sau

Tập nghiệm của bất phương trình:

$$\log_{\frac{2025}{2026}}\left(\log_6\frac{x^2+x}{x+4}\right)<0 \text{ là:}$$

A. $S=(-\infty;-4)\cup(-3;8)$

B. $S=(-4;-3)\cup(8;+\infty)$

C. $S=(-4;2)\cup(2;+\infty)$

D. $S=(-4;-1)\cup(0;+\infty)$

Khi chấm thầy giáo thấy có 3 học sinh chọn ba kết quả khác nhau A, C, D. Giờ chữa bài thầy giáo cho ba học sinh lên trình bày lời giải bài toán. Ba học sinh có lời giải như sau:

Lời giải của học sinh 1: Ta có:

$$\log_{\frac{2025}{2026}}\left(\log_6\frac{x^2+x}{x+4}\right)<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x+4}>0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-4<x<-1\\ x>0\end{array}\right.$$

Vậy đáp án đúng là đáp án **D**.

Lời giải của học sinh 2: Ta có:

$$\log_{\frac{2025}{2026}}\left(\log_6\frac{x^2+x}{x+4}\right)<0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{x^2+x}{x+4}>0\\ \log_6\frac{x^2+x}{x+4}>0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{x^2+x}{x+4}>0\\ \frac{x^2+x}{x+4}>1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x+4}>1 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x+4}>0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-4<x<2\\ x>2\end{array}\right.$$

Vậy đáp án đúng là đáp án **C**.

Lời giải của học sinh 3: Ta có:

$$\log_{\frac{2025}{2026}}\left(\log_6\frac{x^2+x}{x+4}\right)<0$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{2025}{2026}}\left(\log_6\frac{x^2+x}{x+4}\right)<\log_{\frac{2025}{2026}}1$$

$$\Leftrightarrow \log_6\frac{x^2+x}{x+4}<1$$

$$\Leftrightarrow \log_6\frac{x^2+x}{x+4}<\log_6 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x+4}<6$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-5x-24}{x+4}<0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-3<x<8\\ x<-4\end{array}\right.$$

Vậy đáp án đúng là đáp án **A**.

Theo bạn ba học sinh trên ai sai, ai đúng?

NGUYỄN THANH GIANG

(Trường THPT Chuyên Hưng Yên)

Được quét bằng CamScanner

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 583 (1.2026)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
NGUYỄN TIẾN THANH
Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam
PHẠM VĨNH THÁI
Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD
LÊ HỒNG SƠN

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

***Phụ trách Tạp chí*: TS. LÊ HỒNG MAI** ***Thư kí Tòa soạn*: CN. VÕ THỊ HỒNG THU**

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* TRẦN HỮU NAM, *TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Nguyễn Văn Bản – Thêm một cách giải cho bài toán 5 điểm và một vài áp dụng.

5 Hướng dẫn giải đề thi vào lớp 10 THPT chuyên tỉnh Nghệ An, năm học 2025 – 2026.

10 Đề thi thử vào lớp 10 THPT chuyên, năm học 2026 – 2027.

11 **Diễn đàn dạy học toán**
Nguyễn Thanh Hải – Những sai lầm thường gặp trong bài toán tổ hợp – xác suất và hướng khắc phục.

19 **Bạn đọc tìm tòi**
Trần Minh Tuấn – Phương pháp xác định đường phân giác trong, đường phân giác ngoài của một góc tam giác.

20 **Đề ra kỳ này** *Problems in This Issue*
T1/583, ..., T12/583, L1/583, L2/583.

23 **Giải bài kì trước**
Solutions to Previous Problems
T1/579, ..., T12/579, L1/579, L2/579

32 **Phương pháp giải toán**
Hồ Phạm Quốc Toàn – Một số phương pháp xác định giới hạn của dãy số dạng tổng.

43 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 124 – Bài dịch số 122.

44 **Nhiều cách giải cho một bài toán** – Giải bài toán 103 – Đề bài toán 105.

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay** – Giải bài toán 111. Đề bài toán 113.

47 **Sai lầm ở đâu?**

***Biên tập*:** KIM THANH, NHƯ HOÀNG
***Trị sự, phát hành*:** TRẦN THỊ MINH HIỀN
***Mĩ thuật*:** QUỐC HIỆP, THANH LONG
***Thiết kế, chế bản*:** MINH HÒA

Được quét bằng CamScanner

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu BỘ SÁCH

BÀI TẬP NÂNG CAO VÀ MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ

(DÀNH CHO HS THCS – THEO CHƯƠNG TRÌNH GDPT 2018)

TÁC GIẢ: BÙI VĂN TUYÊN



Bộ sách "Bài tập nâng cao và một số chuyên đề" môn Toán cấp THCS được biên soạn theo hướng phát triển năng lực, giúp củng cố và nâng cao kiến thức, bồi dưỡng học sinh khá giỏi hơn về môn Toán.

Cuốn sách có ba phần: Số học, Hình học và Thống kê – Xác suất. Mỗi phần có các chương, mỗi chương gồm nhiều bài. Mỗi bài bao gồm các mục:

- *BỔ SUNG: Phần này giới thiệu thêm những kiến thức liên quan đến chủ đề của bài học mà sách giáo khoa chưa đề cập.*
- *Ví dụ: Mỗi bài có một, hai ví dụ minh họa các vận dụng kiến thức cơ bản để giải toán và cách trình bày bài giải. Cuối mỗi ví dụ thường có nhận xét, lưu ý hoặc bình luận về phương pháp giải.*
- *Bài tập: Phần này có các bài tập được phân loại từ cơ bản đến nâng cao.*

Ngoài ra còn có các chuyên đề, được sắp xếp xen kẽ trong các chương, tương ứng với kiến thức đang học.

Cuối sách là phần hướng dẫn giải, chỉ dẫn hoặc đáp số. Các bạn có thể kiểm tra lời giải của mình, đối chiếu với lời giải trong sách để rút ra những kinh nghiệm giải toán.

Cuốn sách còn là tài liệu tham khảo cho các thầy giáo cô giáo chọn bài cho tiết luyện tập, bồi dưỡng học sinh. Các bậc phụ huynh cũng có thể dùng cuốn sách này để hướng dẫn con em học tập.

BẠN ĐỌC TÌM MUA SÁCH TẠI

CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

Địa chỉ: Tầng 4, Tòa Diamond Flower, số 48 Lê Văn Lương, Q. Thanh Xuân, TP Hà Nội

Điện thoại: 024.35121533 (số máy lẻ 112) - 0904893398 | Fax: 024.35123278

Email: kinhdoanh.heps@gmail.com | Website: http://xbgiaoduc.vn/

Được quét bằng CamScanner

OLYMPIC TOÁN TUỔI THƠ

NƠI EM TỎA SÁNG - CÙNG TOÁN CHINH PHỤC ƯỚC MƠ



Viện Nghiên cứu Sách và Học liệu giáo dục
&VietED phối hợp

Quét để đăng ký

olympictuoitho.vn

1900 099937 | Support@vieted.com

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT1M26
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2026

Giá: 22.000 đồng
Hai mươi hai nghìn đồng

Được quét bằng CamScanner