TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 584
Tháng 2 - 2026
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 63 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com



Nhà toán học Ý **Scipione del Ferro** (1465-1526)

Được quét bằng CamScanner

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUYẾT ĐỊNH BỘ SÁCH GIÁO KHOA GIÁO DỤC PHỔ THÔNG SỬ DỤNG THỐNG NHẤT TOÀN QUỐC

Ngày 26/12/2025, Bộ Giáo dục và Đào tạo (GDĐT) đã ban hành Quyết định số 3588/QĐ-BGDĐT về bộ sách giáo khoa (SGK) giáo dục phổ thông sử dụng thống nhất toàn quốc.

Theo đó, bộ SGK "Kết nối tri thức với cuộc sống" của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã được lựa chọn là bộ SGK giáo dục phổ thông sử dụng thống nhất toàn quốc từ năm học 2026-2027.

1. Sự cần thiết triển khai một bộ sách giáo khoa thống nhất toàn quốc

Việc ban hành quyết định triển khai một bộ SGK thống nhất toàn quốc nhằm thực hiện Nghị quyết số 71-NQ/TW ngày 22/8/2025 của Bộ Chính trị về đột phá phát triển giáo dục và đào tạo và Nghị quyết số 281/NQ-CP ngày 15/9/2025 ban hành Chương trình hành động của Chính phủ thực hiện Nghị quyết số 71-NQ/TW.

Cụ thể, theo Nghị quyết số 71-NQ/TW và Nghị quyết số 281/NQ-CP, từ năm học 2026-2027, Việt Nam sẽ sử dụng một bộ SGK thống nhất trên phạm vi toàn quốc, đến năm 2030 hoàn thành việc cung cấp miễn phí SGK cho tất cả học sinh (HS). Đây là định hướng chiến lược nhằm chuẩn hóa nội dung giáo dục phổ thông, bảo đảm công bằng trong tiếp cận tri thức và tạo nền tảng cho chuyển đổi số, xây dựng hệ sinh thái học liệu quốc gia.

Việc lựa chọn một bộ SGK thống nhất toàn quốc phải bảo đảm các nguyên tắc: đáp ứng yêu cầu Chương trình GDPT 2018; bảo đảm tính khoa học - sư phạm - pháp lý; có tính kế thừa; giảm gánh nặng đổi mới; tiết kiệm ngân sách; hạn chế tác động đến giáo viên (GV), HS và xã hội theo tinh thần Nghị quyết 71-NQ/TW và Nghị quyết 281/NQ-CP.

2. Ưu điểm của bộ sách giáo khoa Kết nối tri thức với cuộc sống

Trên cơ sở nghiên cứu các bộ SGK hiện hành và đối chiếu với các tiêu chí lựa chọn, Bộ GDĐT xác định: bộ SGK Kết nối tri thức với cuộc sống đáp ứng đầy đủ và nổi trội hơn cả, cụ thể như sau: bảo đảm đầy đủ, đồng bộ tất cả các môn học, hoạt động giáo dục ở cả 3 cấp học; chất lượng khoa học - sư phạm được khẳng định qua thực tiễn, được sử dụng rộng rãi tại tất cả 34 tỉnh/thành, với quy mô HS lớn nhất trong các bộ SGK hiện hành; tính ổn định, khả năng chỉnh lý và mức độ sẵn sàng cao nhất (Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam có đủ năng lực kỹ thuật, kho vận, phân phối, đảm bảo cung ứng trên phạm vi toàn quốc); hạn chế tối đa tác động đến GV - HS - phụ huynh do đây là bộ sách đang được sử dụng ổn định và phổ biến nhất.

3. Dự kiến tác động đến GV, HS và xã hội

Đối với GV, việc sử dụng một bộ SGK thống nhất trên toàn quốc sẽ giúp cho công tác dạy học được thực hiện thuận lợi. GV sẽ được tiếp cận nội dung chương trình theo cùng một thiết kế sư phạm, thống nhất về cấu trúc bài học, thuật ngữ, chuẩn kiến thức - kỹ năng, từ đó giảm áp lực lựa chọn tài liệu, tránh tình trạng chênh lệch trong cách tiếp cận bài học giữa các địa phương.

Đối với HS, một bộ SGK thống nhất sẽ góp phần bảo đảm HS các vùng miền tiếp cận tri thức bình đẳng, hạn chế chênh lệch nội dung học tập giữa các địa phương. HS được học theo mạch kiến thức xuyên suốt từ lớp 1 đến lớp 12, tạo nền tảng liên thông, đồng bộ trong phát triển năng lực, giảm rủi ro đứt gãy kiến thức khi chuyển trường giữa năm học, đặc biệt với HS vùng khó khăn, con em lao động di cư. Lộ trình tiến tới miễn phí SGK vào năm 2030 đem lại lợi ích trực tiếp cho HS và gia đình, giảm chi phí học tập thường xuyên. Khi SGK được số hóa, HS có thể tiếp cận kho học liệu mở, bài tập, video, mô phỏng, góp phần nâng cao hứng thú, khả năng tự học và năng lực học tập suốt đời.

Đối với xã hội, việc thống nhất SGK giúp ổn định chính sách học liệu quốc gia, tạo niềm tin, đồng thuận xã hội trong giáo dục phổ thông. Chi phí xã hội cho việc mua, thay mới sách hằng năm được giảm đáng kể; người dân, đặc biệt ở vùng khó, được hưởng lợi từ chính sách hỗ trợ và miễn phí SGK. Các địa phương thuận lợi hơn trong phân bổ ngân sách, tổ chức đấu thầu - cung ứng sách, giảm áp lực truyền thông và hướng dẫn triển khai. Việc thống nhất SGK cũng là nền tảng thúc đẩy chuyển đổi số học liệu, phát triển thư viện số và kho tài nguyên mở, phù hợp xu thế quốc tế và chiến lược chuyển đổi số quốc gia.

Bộ GDĐT khẳng định sẽ phối hợp chặt chẽ với các địa phương, cơ sở giáo dục, đội ngũ GV và toàn xã hội để triển khai hiệu quả bộ SGK thống nhất toàn quốc. Bộ GDĐT sẽ tiếp tục lắng nghe, tiếp thu ý kiến của nhân dân, chuyên gia, nhà giáo để không ngừng hoàn thiện học liệu, nâng cao chất lượng dạy - học, góp phần thực hiện thành công đột phá phát triển giáo dục và đào tạo theo tinh thần Nghị quyết 71-NQ/TW.

BAN TRUYỀN THÔNG *(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)*

Được quét bằng CamScanner

VẬN DỤNG MỘT TÍNH CHẤT VỀ TRỰC TÂM CỦA TAM GIÁC VÀO GIẢI TOÁN

NGUYỄN ANH TUẤN
(GV Trường THCS Hoà Hiếu, Thái Hoà, Nghệ An)

Có nhiều tính chất liên quan đến trực tâm của tam giác, trong bài viết này tác giả xin phép trao đổi với bạn đọc một tính chất cơ bản về trực tâm của tam giác và ứng dụng của nó trong giải toán. Tính chất về trực tâm này của tam giác được phát biểu thông qua bài toán sau đây:

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Gọi K là giao điểm thứ hai của AH và đường tròn (O). Chứng minh rằng H và K đối xứng với nhau qua đường thẳng BC.*

Lời giải.

Trường hợp 1: Tam giác ABC có ba góc nhọn.

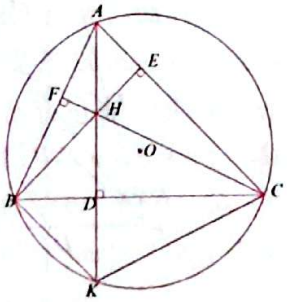
Ta có $\widehat{KCB} = \widehat{KAB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BK}$). Mặt khác $\widehat{HCB} = \widehat{KAB}$ (cùng phụ với góc $\widehat{ABC}$.

Suy ra $\widehat{KCB} = \widehat{HCB}$, do đó:

$\Delta DCH = \Delta DCK$ (g.c.g)

nên $HD = KD$.

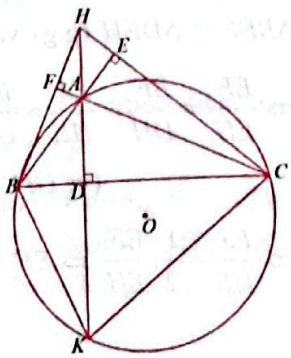
Vậy điểm K đối xứng với điểm H qua đường thẳng BC.



Trường hợp 2: Tam giác ABC tù (giả sử $\widehat{BAC} > 90°$).

Ta có $\widehat{KCB} = \widehat{BAD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BK}$).

Mặt khác, tứ giác $ADCE$ nội tiếp nên $\widehat{BAD} = \widehat{HCB}$. Từ đó suy ra $\widehat{KCB} = \widehat{HCB}$. Do đó, $\Delta DCH = \Delta DCK$ (g.c.g), suy ra $HD = KD$. Vậy điểm K đối xứng với điểm H qua đường thẳng BC.



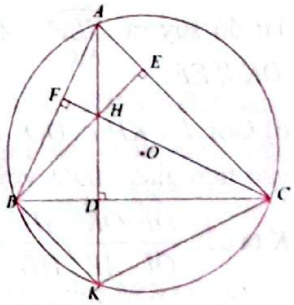
Trường hợp 3: Tam giác ABC vuông (giả sử $\widehat{BAC} = 90°$). Khi đó các điểm A, H, E, F trùng nhau và A thuộc đường tròn đường kính BC nên ta có ngay điều phải chứng minh.

Nhận xét. Bài toán 1 là một tính chất cơ bản liên quan đến trực tâm của một tam giác. Tính chất này có nhiều ứng dụng trong hình học. Ta xét một số bài toán vận dụng sau:

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O,R). Các đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. So sánh bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABH, BCH và ACH.*

Lời giải.

Kéo dài AH cắt đường tròn (O,R) tại K. Theo bài toán 1 ta có K đối xứng với H qua đường thẳng BC nên $\Delta BHC = \Delta BKC$. Suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔBHC bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔBKC. Mà bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔBKC bằng R. Do đó, bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔBHC bằng R. Chứng minh tương tự ta có bán kính của các đường tròn ngoại tiếp ΔABH và ΔACH đều bằng R. Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH, BCH và ACH bằng nhau và bằng R.



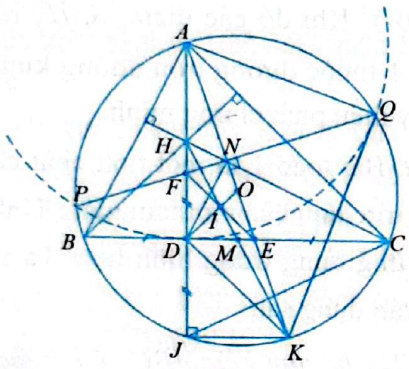
Được quét bằng CamScanner

Bài toán 3. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D, M, H lần lượt là chân đường cao hạ từ A, trung điểm của cạnh BC và trực tâm của tam giác ABC. Đường tròn tâm A bán kính AD cắt (O) tại P, Q. Đường thẳng PQ cắt AD, AO lần lượt tại F, N. Đường kính AK của (O) cắt BC tại E. Chứng minh rằng:*

a) $EF // DK$;

b) DO, EF, HK đồng quy.

Lời giải.



a) Ta có $AK \perp PQ$ (tính chất của đường nối tâm).

Suy ra tứ giác $FDEN$ nội tiếp nên $\widehat{NEF} = \widehat{ADN}$.

Mặt khác, $AD^2 = AQ^2 = AN.AK$ nên:

$$\Delta ADN \backsim \Delta AKD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{AKD} = \widehat{ADN}.$$

Từ đó suy ra $\widehat{NEF} = \widehat{AKD}$ (hai góc đồng vị) nên $DK // EF$.

b) Gọi $I = KH \cap DO$. Áp dụng định lý Menelaus vào tam giác ADO với ba điểm thẳng hàng H, I, K ta có: $\frac{DI}{OI}.\frac{OK}{AK}.\frac{AH}{HD} = 1 \Rightarrow \frac{DI}{OI}.\frac{1}{2}.\frac{AH}{HD} = 1$

$$\Rightarrow \frac{DI}{OI} = \frac{2HD}{AH} \quad (1).$$

Kéo dài AD cắt (O) tại J, ta có $DJ = HD$ (theo bài toán 1) và $JK // DE$. Suy ra:

$$\frac{KE}{AK} = \frac{DJ}{AJ} \Rightarrow \frac{KE}{2OK} = \frac{DJ}{AJ} \Rightarrow \frac{KE}{OK} = \frac{2DJ}{AJ} = \frac{HJ}{AJ}$$

$$\Rightarrow \frac{KE}{OK - KE} = \frac{HJ}{AJ - HJ} \Rightarrow \frac{KE}{OE} = \frac{HJ}{AH} = \frac{2HD}{AH} (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DI}{OI} = \frac{KE}{OE}$ nên $EI // DK$ (theo định lý Thalès đảo) (3).

Mặt khác theo câu a), ta có $EF // DK$ (4).

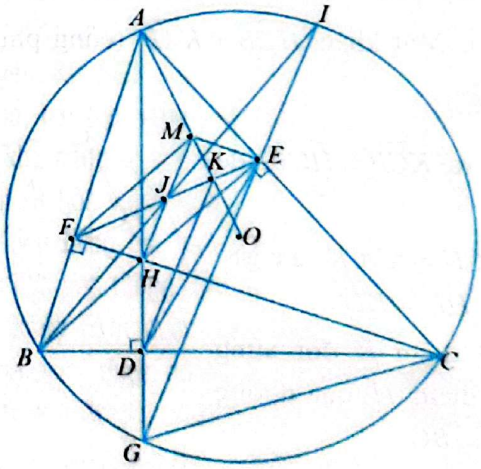
Từ (3) và (4) suy ra ba điểm E, I, F thẳng hàng, do đó DO, EF, HK đồng quy.

Bài toán 4. (Đề tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An năm học 2024-2025) *Cho tam giác ABC nhọn có $AB < BC < AC$ nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H, AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là G; GE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là I. Gọi J là giao điểm của BI và EF, K là giao điểm của OA và EF.*

a) *Chứng minh $JE = JF$ và $DK // HJ$.*

b) *Gọi P, Q lần lượt đối xứng với O qua CF và BE; N là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng $NJ \perp EF$.*

Lời giải.



a) Dễ thấy:

$\Delta BEF \backsim \Delta DEH$ (g.g) và $\Delta BFJ \backsim \Delta GHE$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{EF}{EH} = \frac{BF}{DH}; \quad \frac{FJ}{HE} = \frac{BF}{GH} = \frac{1}{2}.\frac{BF}{DH}$$

(vì $GH = 2.DH$)

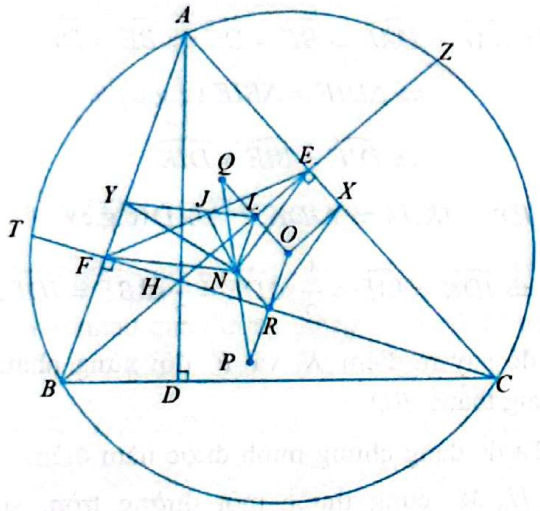
$$\Rightarrow \frac{FJ}{HE} = \frac{1}{2}.\frac{EF}{EH} \Rightarrow EF = 2.FJ \Rightarrow JE = JF$$

Được quét bằng CamScanner

Gọi M là trực tâm của ΔAEF. Suy ra $EM // FH$ và $FM // HE$ nên $EMFH$ là hình bình hành, do đó J là trung điểm của đoạn HM.

Dễ thấy $\Delta AEM \backsim \Delta ABH$ (g.g) nên $\frac{AM}{AH} = \frac{AE}{AB}$; $\Delta AKE \backsim \Delta ADB$ (g.g) (do $OA \perp EF$) nên $\frac{AK}{AD} = \frac{AE}{AB}$. Suy ra $\frac{AM}{AH} = \frac{AK}{AD}$ hay $HM // DK$, do đó ta có $HJ // DK$.

b) Gọi T, Z lần lượt là giao điểm thứ hai của CF và BE với đường tròn (O).



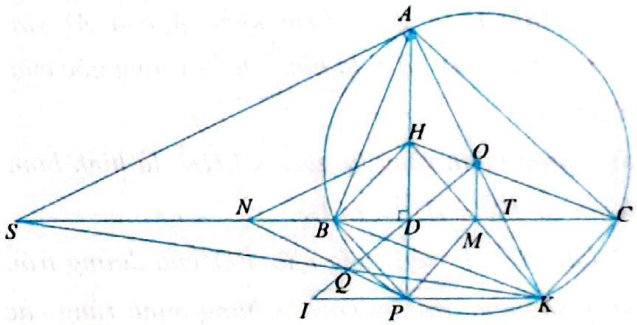
Khi đó theo bài toán 1 ta có $AZ = AH = AT$. Gọi X, Y lần lượt là trung điểm của AC và AB; L là giao điểm của OQ và BE; R là giao điểm của OP và CF. Dễ thấy $OLNR$ là hình bình hành và $OLEX$ là hình chữ nhật nên $NR = OL = EX$. Mà $NR // EX$ (cùng vuông góc với BE), do đó $ENRX$ là hình bình hành, suy ra $NE = RX = \frac{AT}{2}$.

Tương tự $NF = LY = \frac{AZ}{2}$.

Từ đó suy ra $NE = NF$, mà J là trung điểm của EF (theo câu a)), do đó $NJ \perp EF$.

Bài toán 5. (Đề kiểm tra chất lượng lần 2 năm học 2023-2024 THPT chuyên Hà Nội Amsterdam ngày 30/3/2024) *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm H. Đường thẳng AH cắt BC và đường tròn (O) lần lượt tại D, P ($P \neq A$), gọi M là trung điểm của BC. Dựng đường kính AK của đường tròn (O), tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại S. Gọi Q là giao điểm của OD và SK và N là giao điểm của PQ và SC. Chứng minh $SA // NH$ và PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O).*

Lời giải. Ta dễ dàng chứng minh được tứ giác $BHCK$ là hình bình hành. Do M là trung điểm của HK nên OM là đường trung bình của ΔAHK, suy ra $AH = 2OM$.



Ta có $DH = DP$ (theo bài toán 1) và $MH = MK$ nên DM là đường trung bình của ΔHPK, do đó $PK = 2DM$.

Để chứng minh $NH // SA$ ta cần chứng minh:

$$\frac{SN}{ND} = \frac{AH}{HD} \Leftrightarrow \frac{SN}{ND} = \frac{2OM}{DP} \quad (*).$$

Thật vậy, gọi I là giao điểm của KP và OD. Khi đó $PK // SD$ (cùng vuông góc với cạnh AD). Suy ra: $\Delta NQS \backsim \Delta PQK$ nên ta có $\frac{NQ}{PQ} = \frac{NS}{PK}$ (1).

Áp dụng định lí Thalès vào tam giác NQD ta có:

$$\frac{NQ}{PQ} = \frac{ND}{IP} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{NS}{PK} = \frac{ND}{IP} \Rightarrow \frac{SN}{ND} = \frac{PK}{IP} = \frac{2DM}{IP}.$$

Do đó: $(*) \Leftrightarrow \frac{2OM}{DP} = \frac{2DM}{IP} \Leftrightarrow \frac{OM}{DP} = \frac{DM}{IP}$

$\Leftrightarrow \Delta OMD \backsim \Delta DPI$ (kết quả này là đúng).

Được quét bằng CamScanner

Vậy (*) được chứng minh hay $NH // SA$.

Suy ra $\widehat{SAP} = \widehat{NHP}$, mà $\widehat{NHP} = \widehat{NPH}$ (do tam giác NHP cân theo bài toán 1) nên $\widehat{NPH} = \widehat{SAP} = \frac{1}{2}$sđ$\widehat{AP}$ hay PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài toán 6. (Đề tuyển sinh lớp 10 môn Toán (chuyên) năm 2024-2025 trường PTNK, TP. Hồ Chí Minh) *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có tam giác ABD là tam giác nhọn và đường chéo AC đi qua tâm O của đường tròn (O). Gọi I là trung điểm BD, H là trực tâm tam giác ABD, E là giao điểm khác A của AI với đường tròn (O) và K là hình chiếu vuông góc của H lên AI.*

a) *Chứng minh rằng tứ giác $CEHK$ là hình bình hành và $IB^2 = ID^2 = IA.IK$.*

b) *Lấy điểm F trên cung nhỏ BD của đường tròn (O) sao cho $\widehat{BAF} = \widehat{DAI}$. Chứng minh rằng các điểm K và F đối xứng nhau qua đường thẳng BD.*

c) *Chứng minh các đường phân giác trong của các góc BAD và BKD cắt nhau trên BD.*

d) *Trên đường thẳng qua H và song song AC lấy điểm T sao cho $TH = TK$. Chứng minh bốn điểm O, K, F, T cùng thuộc một đường tròn.*

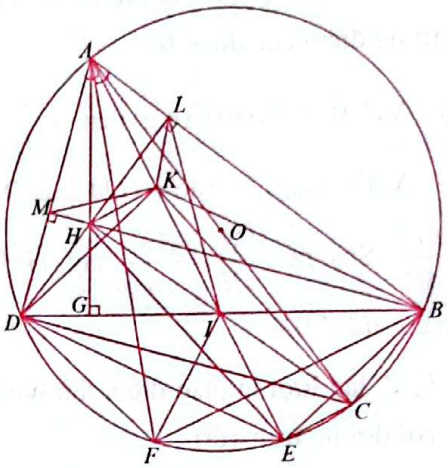
Lời giải. a) Dễ thấy tứ giác $DHBC$ là hình bình hành nên I là trung điểm của HC. Ta có $HK // CE$ (cùng vuông góc với AE) nên $\Delta KHI = \Delta ECI$ (g.c.g), suy ra $IK = IE$, do đó tứ giác $CEHK$ là hình bình hành (do có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường).

Kéo dài AH, BH, DH lần lượt cắt BD, AD, AB tại G, M, L.

Ta có các tứ giác $GHKI$, $GHLB$ nội tiếp nên $AI.AK = AH.AG = AL.AB$. Suy ra tứ giác $IKLB$ nội tiếp, do đó $\widehat{IKB} = \widehat{ILB} = \widehat{IBL}$ (vì ΔDLB vuông tại L, có IL là trung tuyến nên ΔILB cân tại I).

Vậy $\Delta IKB \backsim \Delta IBA$ (g.g) nên ta có:

$$ID^2 = IB^2 = IK.IA.$$



b) Vì $\widehat{BAF} = \widehat{DAI} \Rightarrow \widehat{BF} = \widehat{DE} \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{DF}$

$$\Rightarrow \Delta DIF = \Delta BIE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{DIF} = \widehat{BIE} = \widehat{DIK}.$$

Vì: $ID^2 = IK.IA \Rightarrow \Delta IDK \backsim \Delta IAD$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{IDK} = \widehat{IAD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{DE} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BF} = \widehat{IDF}.$$

Từ đó suy ra điểm K và F đối xứng nhau qua đường thẳng BD.

c) Ta dễ dàng chứng minh được năm điểm A, L, K, H, M cùng thuộc một đường tròn, suy ra $\Delta LDK \backsim \Delta MBK$ (g.g) nên $\frac{DK}{BK} = \frac{LD}{MB}$.

Mặt khác $\Delta LDA \backsim \Delta MBA$ (g.g) nên $\frac{AD}{AB} = \frac{LD}{MB}$.

Từ đó suy ra $\frac{DK}{BK} = \frac{AD}{AB}$. Gọi J là chân đường phân giác trong AJ của tam giác ABC.

Ta có: $\frac{JD}{JB} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{KD}{KB} = \frac{JD}{JB}$. Suy ra KJ là phân giác trong $\widehat{BKD}$. Suy ra các đường phân giác trong của $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BKD}$ cắt nhau trên đường thẳng BD.

d) Gọi N là giao điểm thứ hai của AH và (O), P là giao điểm của TH với BD.

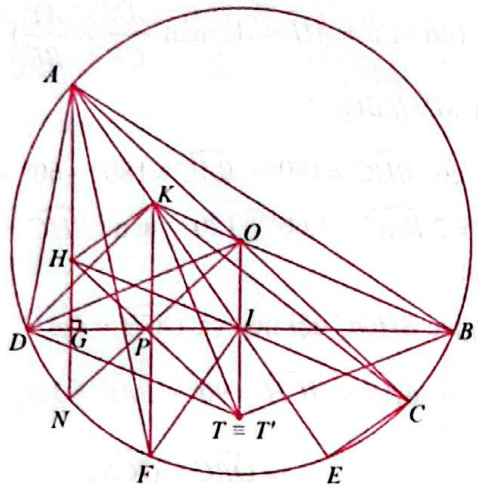
Ta có: $HP // AC \Rightarrow \widehat{PHN} = \widehat{OAN}$

$\Rightarrow \Delta PHN \backsim \Delta OAN$ (hai tam giác cân có hai góc ở đáy bằng nhau)

Được quét bằng CamScanner

$\Rightarrow \widehat{HNP} = \widehat{HNO}$ nên ba điểm N, P, O thẳng hàng $\Rightarrow \widehat{OPI} = \widehat{TPI}$ (do $\widehat{HPD} = \widehat{NPD}$).

Trên tia đối của tia PH lấy T' sao cho $PO = PT'$.



Suy ra $\Delta IPO = \Delta IPT'$ (c.g.c) nên ta có:

$\widehat{PIT'} = \widehat{PIO} = 90°$ và $IO = IT'$ nên O và T' đối xứng với nhau qua đường thẳng BD, từ đó suy ra $DT' = BT' = BO$.

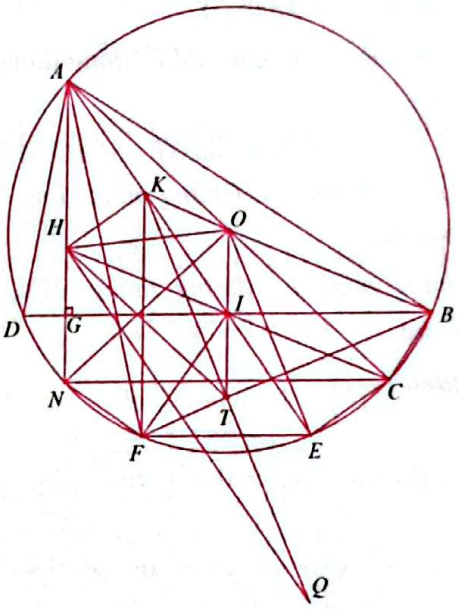
Mặt khác $HT' = PT' + PH = PO + NP = ON$. Mà $ON = OB$, Do đó $DT' = BT' = HT'$ suy ra T' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DHB, mà $DHKB$ là tứ giác nội tiếp nên $K \in (T')$ hay $KT' = HT'$. Từ đó suy ra $T \equiv T'$ hay tứ giác $OKFT$ là hình thang cân. Từ đó dễ dàng suy ra các điểm O, K, F, T cùng thuộc một đường tròn.

Ngoài ra câu d) có thể giải theo các cách sau:

Cách 2. Lấy T' đối ứng với O qua BD nên $OT' \perp BD$, suy ra $AO // HT'$ và $OT' // AH$, mà $OT' = 2.OI = AH$ nên $OAHT'$ là hình bình hành. Vậy ta có $HT' = AO = OD = OB = DT' = BT'$ nen T' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DHB, mà $DHKB$ là tứ giác nội tiếp nên $K \in (T')$ hay $KT' = HT'$. Từ đó suy ra $T \equiv T'$ hay tứ giác $OKFT$ là hình thang cân. Từ đó dễ dàng suy ra các điểm O, K, F, T cùng thuộc một đường tròn.

Cách 3. Gọi N là giao điểm thứ hai của AH và (O); Q là điểm đối xứng với K qua T. Ta có $GH = GN$ và $IH = IC$ nên IG là đường trung bình của tam giác HNC, suy ra $NC // BD$.

Mà $\widehat{DF} = \widehat{BE}$ nên $EF // BD$. Từ đó suy ra $EF // NC$. Do đó ta có $EC = NF = HK$.



Xét ΔKHQ có $TH = TK = TQ$ nên $HK \perp HQ$, mà $HK \perp AE$ suy ra $HQ // AE$. Kết hợp với $HT // AC$ (gt) nên $\widehat{THQ} = \widehat{CAE}$.

Do đó ta có:

$\widehat{HTK} = 2.\widehat{THQ} = 2.\widehat{EAC} = \text{sđ}\widehat{EC} = \text{sđ}\widehat{NF} = \widehat{NOF}$.

Vậy $\Delta ONF = THK$ (do $TH = TK$, $ON = OF$, $HK = NF$ và $\widehat{HTK} = \widehat{NOF}$).

Suy ra $TH = ON = OA$ hay tứ giác $OTHA$ là hình bình hành nên $OI // AH$ và $OT = AH = 2.OI$. Suy ra O và T đối xứng với nhau qua BD nên tứ giác $OKFT$ là hình thang cân. Từ đó dễ dàng suy ra các điểm O, K, F, T cùng thuộc một đường tròn.

Được quét bằng CamScanner

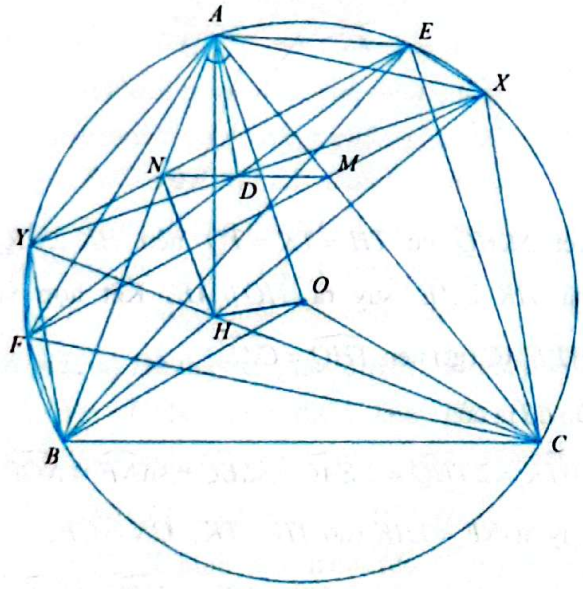
Bài toán 7. (Đề tuyển sinh lớp 10 môn Toán (chuyên) năm 2024-2025 sở GD&ĐT Vĩnh Phúc) *Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) và $\widehat{BAC}=60°$. Các đường thẳng qua C và B song song với AO cắt đường tròn (O) lần lượt tại E và F (E khác C, F khác B). Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Đường thẳng BH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là X (X khác B); đường thẳng CH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai Y (Y khác C).*

a) *Chứng minh tam giác AEF đồng dạng với tam giác HBC.*

b) *Gọi M là giao điểm của XF với AC và N là giao điểm của YE với AB. Chứng minh rằng MN song song với BC.*

c) *Chứng minh ba đường thẳng MN, XY, FE đồng quy.*

Lời giải.



a) Ta có: $\widehat{AFE}=\widehat{ECA}=\widehat{OAC}=\dfrac{180°-\widehat{AOC}}{2}$

$=90°-\widehat{ABC}=\widehat{BCH}.$

Tương tự $\widehat{AEF}=\widehat{CBH}$, suy ra $\Delta AEF\backsim\Delta HBC$ (g.g).

b) Ta có $BF//CE$ nên $BCEF$ là hình thang cân.

Vì $\widehat{AFE}=\widehat{BCH}$ nên $\widehat{AE}=\widehat{BY}$.

Tương tự: $\widehat{CX}=\widehat{AF}$ nên các tứ giác $AEBY$, $AFCX$ là các hình thang cân. Do đó, theo định lí Thalès ta có: $\dfrac{AM}{CM}=\dfrac{AX}{CF}=\dfrac{AY}{BE}=\dfrac{AN}{BN}$

(do $AX=AH=AY$ nên $\dfrac{AX}{CF}=\dfrac{AY}{BE}$)

suy ra $MN//BC$.

c) Ta có $\widehat{BHC}=180°-\widehat{BAC}=180°-60°=120°$; $\widehat{BOC}=2.\widehat{BAC}=2.60°=120°$ nên $\widehat{BHC}=\widehat{BOC}$.

Suy ra:

tứ giác $BHOC$ nội tiếp và $\widehat{OCH}=\widehat{OBH}$ (1).

Ta có: $\dfrac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AY}=\widehat{ACH}=90°-\widehat{BAC}=30°$

$=\widehat{OBC}=\widehat{OCB};$

$\widehat{FCY}=\dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\widehat{AF}-\text{sđ}\widehat{AY}\right)=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\widehat{XC}-\widehat{OBC}$

$=\widehat{XBC}-\widehat{OBC}=\widehat{OBH}$ (2).

Mà $\text{sđ}\widehat{AY}=2.\widehat{ACH}=2.30°=60°$ và

$\text{sđ}\widehat{AX}=2.\widehat{ABH}=2.(180°-60°-90°)=60°$

nên ta có:

$\widehat{EBX}=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AX}-\dfrac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AE}=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AY}-\dfrac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BY}$

$=\widehat{ACH}-\widehat{BCH}=\widehat{OCB}-\widehat{BCH}=\widehat{OCH}$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$\widehat{FCY}=\widehat{EBX}$ hay $BX//EF$.

Gọi D là giao điểm của XY và MN, ta có:

$\dfrac{YN}{ND}=\dfrac{XM}{DM}\Rightarrow\dfrac{YN}{XM}=\dfrac{ND}{DM}$ (4).

Mà các tứ giác $AEBY$, $AFCX$ là các hình thang cân nên ta có: $\dfrac{YN}{NE}=\dfrac{AN}{NB}=\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{MX}{MF}$

$\Rightarrow\dfrac{YN}{MX}=\dfrac{NE}{MF}$ (5).

Từ (4) và (5) suy ra:

$\dfrac{ND}{DM}=\dfrac{NE}{MF}\Rightarrow\Delta DNE\backsim\Delta DMF$ (c.g.c).

Từ đó suy ra ba điểm E, D, F thẳng hàng hay ba đường thẳng MN, XY, FE đồng quy.

Được quét bằng CamScanner

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN

Năm học 2026-2027

Bài 1. a) *Cho đa thức* $P(x)=ax^2+bx+c$. *Biết* $P(x)$ *chia cho* $x+1$ *dư* 3, $P(x)$ *chia cho* x *dư* 1 *và* $P(x)$ *chia cho* $x-1$ *dư* 5. *Tìm các hệ số* a, b, c.

b) *Cho các số* a, b, x, y *thoả mãn* $ab\neq 0, a+b\neq 0$,

$$\frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{1}{a+b};\ x^2+y^2=1.$$

Chứng minh rằng:

b$_1$) $ay^2=bx^2$;

b$_2$) $\frac{x^{200}}{a^{100}}+\frac{y^{200}}{b^{100}}=\frac{2}{(a+b)^{100}}$;

c) *Tìm tất cả các số* x, y *nguyên dương thoả mãn phương trình* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{617}$.

Lời giải.

a) Vì $P(x)$ chia cho $x+1$ dư 3 nên $P(x)-3$ chia hết cho $x+1$. Suy ra $P(x)-3=f(x).(x+1)$.

Thay $x=-1$ vào đẳng thức trên ta có:

$P(-1)-3=f(-1).(-1+1)\Rightarrow P(-1)=3$ (1).

Tương tự: $P(x)$ chia cho x dư 1 nên $P(0)=1$ (2).

$P(x)$ chia cho $x-1$ dư 5 nên $P(1)=5$ (3).

Từ (1), (2), (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}a.(-1)^2+b.(-1)+c=3\\ a.0^2+b.0+c=1\\ a.1^2+b.1+c=5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a-b+c=3\\ c=1\\ a+b+c=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=1\\ c=1\end{cases}.$$

Suy ra $P(x)=3x^2+x+1$.

Thử lại, ta thấy $P(x)$ thoả mãn đề bài.

Vậy đa thức cần tìm là $P(x)=3x^2+x+1$.

b$_1$) Ta có:

$$\frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{1}{a+b}\Leftrightarrow\frac{x^4b+y^4a}{ab}=\frac{1}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow(a+b)(x^4b+y^4a)=ab$$

$$\Leftrightarrow abx^4+a^2y^4+b^2x^4+aby^4-ab=0$$

$$\Leftrightarrow ab\left(x^4+y^4-1\right)+\left(ay^2\right)^2+\left(bx^2\right)^2=0\ (*).$$

Mặt khác, ta có: $x^2+y^2=1\Rightarrow\left(x^2+y^2\right)^2=1$

$$\Rightarrow x^4+y^4-1=-2x^2y^2.$$

Do đó: $(*)\Leftrightarrow -2abx^2y^2+\left(ay^2\right)^2+\left(bx^2\right)^2=0$

$$\Leftrightarrow\left(ay^2-bx^2\right)^2=0\Leftrightarrow ay^2=bx^2\ (\text{đpcm}).$$

b$_2$) Vì $ab\neq 0$ nên $ay^2=bx^2\Leftrightarrow\frac{x^2}{a}=\frac{y^2}{b}$.

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x^2}{a}=\frac{y^2}{b}=\frac{x^2+y^2}{a+b}=\frac{1}{a+b}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x^2}{a}\right)^{100}=\left(\frac{y^2}{b}\right)^{100}=\frac{1}{(a+b)^{100}}$$

$$\Rightarrow\frac{x^{200}}{a^{100}}+\frac{y^{200}}{b^{100}}=\frac{2}{(a+b)^{100}}\ (\text{đpcm}).$$

c) Ta có: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{617}\Leftrightarrow\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{617}$

$$\Leftrightarrow xy-617(x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow xy-617x-617y+617^2=617^2$$

$$\Leftrightarrow(x-617)(y-617)=617^2.$$

Vì x, y nguyên dương nên $x-617$ và $y-617$ là ước lớn hơn -617 của 617^2.

Do 617 là số nguyên tố nên xảy ra 3 trường hợp:

Được quét bằng CamScanner

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-617=617\\y-617=617\end{cases}\\\begin{cases}x-617=1\\y-617=617^2\end{cases}\\\begin{cases}x-617=617^2\\y-617=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=1234\\x=618;\ y=381306.\\x=381306;\ y=618\end{array}\right.$$

Vậy các cặp $(x;y)$ nguyên dương cần tìm là:

$(1234;1234), (618;381306), (381306;618)$.

Bài 2. a) *Rút gọn biểu thức*:

$$A=\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}.$$

b) *Tìm m để phương trình*:

$$(x-2)(x-3)(x+4)(x+5)=m,$$

có 4 nghiệm phân biệt.

Lời giải. a) $A=\dfrac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{4+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}+\dfrac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{4-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$

$$=2\left[\frac{3+\sqrt{5}}{4+\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}}+\frac{3-\sqrt{5}}{4-\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}\right]$$

$$=2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}+\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right)$$

$$=2\left[\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)+\left(3-\sqrt{5}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)}{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)}\right]$$

$$=2\frac{15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5+15+3\sqrt{5}-5\sqrt{5}-5}{25-5}$$

$=2.\dfrac{20}{20}=2$. Vậy $A=2$.

b) $(x-2)(x-3)(x+4)(x+5)=m$

$\Leftrightarrow \left(x^2+2x-8\right)\left(x^2+2x-15\right)=m$ (1).

Đặt $x^2+2x+1=(x+1)^2=y\ (y>0)$, phương trình (1) trở thành:

$(y-9)(y-16)=m \Leftrightarrow y^2-25y+144-m=0$ (2).

Nhận xét: Với mỗi giá trị $y>0$ thì phương trình $(x+1)^2=y$ có 2 nghiệm phân biệt. Do đó phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt hay:

$$\begin{cases}\Delta>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=4m+49>0\\25>0\\144-m>0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{49}{4}<m<144.$$

Vậy với $-\dfrac{49}{4}<m<144$ thì phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 3. a) *Giải phương trình*:

$$x^2-x-4=2\sqrt{x-1}(1-x).$$

b) *Giải hệ phương trình*: $\begin{cases}x^3+xy^2-10y=0\\x^2+6y^2=10\end{cases}$.

Lời giải.

a) Điều kiện: $x\ge 1$ (*). Ta có:

$$x^2-x-4=2\sqrt{x-1}(1-x)$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x\sqrt{x-1}+x-1-2\left(x+\sqrt{x-1}\right)-3=0.$$

Đặt $x+\sqrt{x-1}=y\ (y\ge 1)$ (**), phương trình trên trở thành:

$$y^2-2y-3=0\Leftrightarrow (y+1)(y-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1\\y=3\end{array}\right.$$

• Với $y=-1$ không thoả mãn điều kiện (**).

• Với $y=3$ ta có phương trình:

$$x+\sqrt{x-1}=3\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=3-x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\x-1=9-6x+x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\x^2-7x+10=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 3\\\left[\begin{array}{l}x=2\\x=5\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Đối chiếu điều kiện (*), $x=2$ thoả mãn.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=2$.

b) $\begin{cases}x^3+xy^2-10y=0\\x^2+6y^2=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+xy^2-\left(x^2+6y^2\right)y=0\ (1)\\x^2+6y^2=10\end{cases}$ (2)

Được quét bằng CamScanner

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^3+xy^2-x^2y-6y^3=0$

$\Leftrightarrow x^3-2x^2y+x^2y-2xy^2+3xy^2-6y^3=0$

$\Leftrightarrow (x-2y)\left(x^2+xy+3y^2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2y \\ x^2+xy+3y^2=0 \end{array}\right.$.

• Trường hợp 1: Thay $x=2y$ vào phương trình (2) ta có:

$4y^2+6y^2=10 \Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-1 \end{array}\right.$.

Với $y=1$ thì $x=2$. Với $y=-1$ thì $x=-2$.

• Trường hợp 2: $x^2+xy+3y^2=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{11y^2}{4}=0 \Leftrightarrow x=y=0.$

Thay $x=y=0$ vào phương trình (2) và không thoả mãn phương trình.

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm:

$$(x;y)\in\{(2;1);(-2;-1)\}.$$

Bài 4. *Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung $BC=R\sqrt{3}$ cố định. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi E là điểm đối xứng với B qua AC và F và điểm đối xứng với C qua AB. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và ACF cắt nhau tại K (K không trùng A). Gọi H là giao điểm của BE và CF.*

a) *Chứng minh KA là phân giác trong góc BKC và tứ giác $BHCK$ nội tiếp.*

b) *Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác $BHCK$ lớn nhất, tính diện tích lớn nhất của tứ giác đó theo R.*

c) *Chứng minh AK luôn đi qua một điểm cố định.*

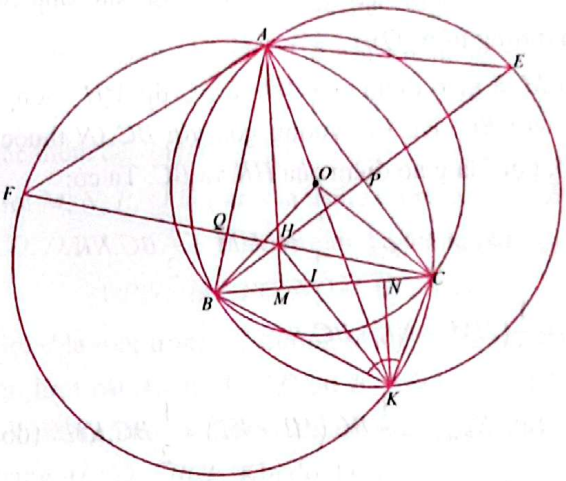
Lời giải. a)

• Chứng minh KA là đường phân giác trong của góc BKC.

Ta có $\overset{\frown}{AKB}=\overset{\frown}{AEB}$ (vì cùng chắn cung AB của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB).

Mà $\overset{\frown}{ABE}=\overset{\frown}{AEB}$ (tính chất đối xứng), suy ra $\overset{\frown}{AKB}=\overset{\frown}{ABE}$ (1).

Ta có $\overset{\frown}{AKC}=\overset{\frown}{AFC}$ (vì cùng chắn cung AC của đường tròn ngoại tiếp tam giác AFC).



Mà $\overset{\frown}{ACF}=\overset{\frown}{AFC}$ (tính chất đối xứng), suy ra $\overset{\frown}{AKC}=\overset{\frown}{ACF}$ (2).

Mặt khác $\overset{\frown}{ABE}=\overset{\frown}{ACF}$ (cùng phụ với $\overset{\frown}{BAC}$) (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\overset{\frown}{AKB}=\overset{\frown}{AKC}$ hay KA là đường phân giác trong của góc BKC.

• Chứng minh tứ giác $BHCK$ nội tiếp.

Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm của BE với AC và CF với AB.

Ta có $BC=R\sqrt{3}$ nên:

$$\overset{\frown}{BOC}=120^\circ,\ \overset{\frown}{BAC}=\frac{\overset{\frown}{BOC}}{2}=60^\circ.$$

Trong ΔABP vuông có $\overset{\frown}{APB}=90^\circ$, $\overset{\frown}{BAC}=60^\circ$, suy ra $\overset{\frown}{ABP}=30^\circ$ hay $\overset{\frown}{ABE}=\overset{\frown}{ACF}=30^\circ$.

Tứ giác $APHQ$ có:

$\overset{\frown}{AQH}+\overset{\frown}{APH}=180^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{PAQ}+\overset{\frown}{PHQ}=180^\circ$

$\Rightarrow \overset{\frown}{PHQ}=120^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BHC}=120^\circ$ (đối đỉnh).

Ta có: $\overset{\frown}{AKC}=\overset{\frown}{ABE}=30^\circ$;

$\overset{\frown}{AKB}=\overset{\frown}{ACF}=\overset{\frown}{ABE}=30^\circ$ (theo chứng minh trên). Mà $\overset{\frown}{BKC}=\overset{\frown}{AKC}+\overset{\frown}{AKB}=\overset{\frown}{AFC}+\overset{\frown}{AEB}=60^\circ$ nên suy ra $\overset{\frown}{BHC}+\overset{\frown}{BKC}=180^\circ$.

Vậy tứ giác $BHCK$ nội tiếp.

Được quét bằng CamScanner

b) Gọi (O') là đường tròn đi qua bốn điểm B, H, C, K. Ta có dây cung $BC = R\sqrt{3}$, $\widehat{BKC} = 60° = \widehat{BAC}$ nên bán kính đường tròn (O') bằng bán kính R của đường tròn (O).

Gọi M là giao điểm của AH và BC thì MH vuông góc với BC. Kẻ KN vuông góc với BC (N thuộc BC), gọi I là giao điểm của HK và BC. Ta có:

$$S_{BHCK} = S_{BHC} + S_{BCK} = \frac{1}{2}BC.HM + \frac{1}{2}BC.NK$$

$$= \frac{1}{2}(HM + NK).BC.$$

Suy ra: $S_{BHCK} \le \frac{1}{2}BC(HI + KI) = \frac{1}{2}BC.KH$ (do $HM \le HI$, $NK \le KI$).

Ta có KH là dây cung của đường tròn $(O'; R)$ suy ra $KH \le 2R$ (không đổi).

Nên S_{BHCK} lớn nhất khi:

$$KH = 2R \text{ và } HM + NK = HK = 2R.$$

Giá trị lớn nhất $S_{BHCK} = \frac{1}{2}R\sqrt{3}.2R = R^2\sqrt{3}$.

Khi HK là đường kính của đường tròn (O') thì M, I, N trùng nhau, suy ra I là trung điểmcủa BC nên ΔABC cân tại A. Khi đó A là điểm chính giữa cung lớn BC.

c) Ta có: $\widehat{BOC} = 120°$, $\widehat{BKC} = 60°$

nên $\widehat{BOC} + \widehat{BKC} = 180°$ nên tứ giác $BOCK$ nội tiếp đường tròn.

Ta có $OB = OC = R$ nên $\widehat{BKC} = \widehat{CKO}$ hay KO là phân giác góc BKC. Theo a), AK là phân giác $\widehat{BKC}$ nên K, O, A thẳng hàng hay AK đi qua O cố định.

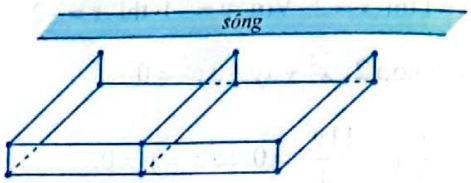
Bài 5. a) *Cho 3 số thực dương x, y, z thoả mãn:*

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 1.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{y^2z^2}{x(y^2+z^2)} + \frac{z^2x^2}{y(z^2+x^2)} + \frac{x^2y^2}{z(x^2+y^2)}.$$

b) *Bác Nam lên kế hoạch làm hàng rào cho khu đất hình chữ nhật, để bảo vệ rau trồng của mình. Bác rào 3 mặt xung quanh và 1 hàng rào ở giữa, chia đôi khu đất, để trồng rau, một mặt không rào hướng về phía bờ sông (như hình vẽ). Biết rằng chi phí để rào hàng rào chiều dài khu đất là 60 nghìn đồng/mét. 3 hàng rào theo chiều rộng có chi phí là 50 nghìn đồng/mét và tổng chi phí cho làm hàng rào là 15 triệu đồng. Hỏi bác Nam có thể rào được khu đất có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?*



c) *Cho hình bình hành $ABCD$, kẻ 17 đường thẳng sao cho mỗi đường thẳng chia $ABCD$ thành hai hình thang có tỉ số diện tích bằng $\frac{1}{3}$. Chứng minh rằng trong 17 đường thẳng có 5 đường thẳng đồng quy.*

Lời giải.

a) Ta có:

$$P = \frac{1}{x\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{y^2}\right)} + \frac{1}{y\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2}\right)} + \frac{1}{z\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)}.$$

Đặt $\frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b, \frac{1}{z} = c$ thì

$$a, b, c > 0 \text{ và } a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Khi đó: $P = \frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2}$

$$= \frac{a^2}{a(1-a^2)} + \frac{b^2}{b(1-b^2)} + \frac{c^2}{c(1-c^2)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta có: $a^2(1-a^2)^2 = \frac{1}{2}.2a^2(1-a^2)(1-a^2)$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{2a^2+1-a^2+1-a^2}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$$

Được quét bằng CamScanner

$$\Rightarrow a\left(1-a^2\right)\le\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{a\left(1-a^2\right)}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\ (1).$$

Tương tự: $\frac{b^2}{b\left(1-b^2\right)}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}b^2\ (2);$

$$\frac{c^2}{c\left(1-c^2\right)}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}c^2\ (3).$$

Từ (1); (2); (3) ta có:

$$P\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$ hay $x=y=z=\sqrt{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

b) Gọi x (m) là chiều rộng của khu đất với $0<x<50$, y (m) là chiều dài của đất với $0<y<60$.

Số tiền dùng để làm chiều rộng hàng rào là:

$$3.50x=150x \text{ (nghìn đồng).}$$

Số tiền dùng để làm chiều dài hàng rào là:

$$60y \text{ (nghìn đồng).}$$

Tổng chi phí để làm hàng rào là:

$$150x+60y=15000 \text{ (nghìn đồng).}$$

Do đó: $y=\frac{15000-150x}{60}=\frac{500-5x}{2}$.

Diện tích của khu đất là:

$$S_{kd}=x\left(\frac{500-5x}{2}\right)=\frac{-5x^2+500x}{2}$$

$$=\frac{-5\left(x-50\right)^2+12500}{2}\le\frac{12500}{2}=6250.$$

Suy ra giá trị lớn nhất của S_{kd} bằng 6250 khi $x=50$ (thoả mãn).

Vậy nhà bác Nam có thể rào được khu đất có diện tích lớn nhất là 6250 m^2.

c) Gọi tập hợp gồm 17 đường thẳng là tập hợp "thỏ". Muốn chứng minh trong 17 đường thẳng đó có 5 đường thẳng đồng quy thì phải tạo ra được tập hợp "lồng", là các điểm đặc biệt trong hình bình hành gồm $\left(17-1\right):\left(5-1\right)=4$ điểm. Căn cứ vào các điều kiện còn lại của bài toán để xác định các điểm đặc biệt đó.

Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Vì $ABCD$ là hình bình hành, nên ta có:

$$MP \,//\, AD \,//\, BC, NQ \,//\, AB \,//\, CD.$$

Gọi d là một trong 17 đường thẳng đã cho. Nếu d lần lượt cắt AB tại E, CD tại F, NQ tại L thì LQ, LN tương ứng là đường trung bình của các hình thang $AEFD$, $EBCF$. Khi đó, ta có:

$$\frac{S_{AEFD}}{S_{EBCF}}=\frac{1}{3}\ (\text{hoặc}\ \frac{S_{EBCF}}{S_{AEFD}}=\frac{1}{3})$$

hay $\frac{LQ}{LN}=\frac{1}{3}$ (hoặc $\frac{LN}{LQ}=\frac{1}{3}$).

Trên QN lấy 2 điểm L_1; L_2 thoả mãn điều kiện:

$$\frac{L_1Q}{L_1N}=\frac{L_2N}{L_2Q}=\frac{1}{3}.$$

Khi đó L trùng với L_1 hoặc L trùng với L_2, nghĩa là nếu d cắt AB và CD thì d phải qua L_1 hoặc L_2.

Tương tự, trên MP lấy 2 điểm K_1; K_2 thoả mãn điều kiện $\frac{L_1M}{L_1P}=\frac{L_2P}{L_2M}=\frac{1}{3}$ khi đó nếu d cắt AD và BC thì d phải qua K_1 hoặc K_2.

Tóm lại, mỗi đường thẳng trong số 17 đường thẳng đã cho phải đi qua một trong 4 điểm L_1, L_2, K_1, K_2.

Vì $17>4.4$ nên theo nguyên lý Dirichlet, trong 17 đường thẳng đó sẽ có ít nhất 5 đường thẳng $\left(5=4+1\right)$ cùng đi qua một trong 4 điểm L_1, L_2, K_1, K_2 hay có 5 đường thẳng đồng quy.

HÀ VĂN NHÂN
(GV THCS Hoằng Xuân, Hoằng Giang, Thanh Hóa)

Giới thiệu

Được quét bằng CamScanner

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THÀNH PHỐ HÀ NỘI

Năm học 2025 - 2026

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài I *(5,0 điểm)*

1) Giải phương trình $x+4\sqrt{5-x}=9$.

2) Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a^2+1)(b+c)=(b^2+1)(c+a)=-10$. . Tính giá trị của biểu thức:

$$P=(a+b)(b+c)(c+a).$$

Bài II *(5,0 điểm)*

1) Một tiệm bánh ngọt dự định sản xuất hai loại bánh cho một đơn hàng. Lượng đường cần cho mỗi chiếc bánh loại I và loại II lần lượt là 40 g và 60 g. Lợi nhuận thu được khi bán mỗi chiếc bánh loại I và loại II lần lượt là 12 nghìn đồng và 15 nghìn đồng. Biết rằng tiệm chỉ còn 14 kg đường để làm bánh và tiệm phải làm ít nhất 80 chiếc bánh loại I và 100 chiếc bánh loại II. Hỏi tiệm nên làm bao nhiêu chiếc bánh mỗi loại để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

2) Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^2-6b^2=1$ và $a^2+4ab+4b^2=11c+1$. Chứng minh c chia hết cho 40.

Bài III *(2,0 điểm)*

Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a(1-b)}{3-a}+\frac{b(1-c)}{3-b}+\frac{c(1-a)}{3-c}.$$

Bài IV *(6,0 điểm)*

Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$, các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại điểm H.

1) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh bốn điểm D, F, E, I cùng thuộc một đường tròn.

2) Đường thẳng DF cắt đường thẳng BH tại điểm K. Gọi L là điểm đối xứng với điểm K qua điểm H. Gọi P là giao điểm của đường thẳng IE và đường thẳng CH. Chứng minh đường thẳng LP song song với đường thẳng HI.

3) Đường thẳng qua điểm B và vuông góc với AB cắt đường trung trực của đoạn thẳng BE tại điểm G. Gọi Q là điểm đối xứng với điểm D qua điểm H. Chứng minh $\widehat{EQL}=\widehat{EGC}$.

Bài V *(2,0 điểm)*

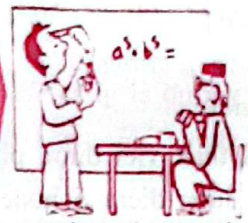
1) Tìm tất cả số nguyên tố p, q để $pq+p+4$ và $pq+q+4$ đồng thời là các số chính phương.

2) Hai bạn An và Bình cùng nhau tiết kiệm tiền để ủng hộ người nghèo. Biết rằng hai bạn bắt đầu tiết kiệm vào cùng một ngày. Sau 365 ngày, mỗi bạn đều tiết kiệm được một triệu đồng. Chứng minh trong 365 ngày nói trên, tồn tại 183 ngày mà tổng số tiền tiết kiệm của mỗi bạn trong 183 ngày đó không nhỏ hơn 500000 đồng.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG
(GV THCS Giảng Võ 2, TP. Hà Nội)

Giới thiệu

Được quét bằng CamScanner



KHAI THÁC GIẢ THIẾT HÌNH HỌC ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN TRONG MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

DƯƠNG ĐÌNH DŨNG
(GV THPT Triệu Sơn 4, Thanh Hoá)

(*Kỳ 1*)

Trong chương VII của Toán 10 bộ sách *Kết nối Tri thức với cuộc sống*, phương pháp toạ độ trong mặt phẳng tập trung chủ yếu vào các dạng toán xác định toạ độ điểm thoả mãn điều kiện cho trước, lập phương trình đường thẳng và các yếu tố liên quan đến đường tròn. Đa số học sinh khi gặp dạng toán này thường đại số hoá để đưa về việc giải phương trình hoặc hệ phương trình nên nhiều lúc sẽ gặp khó khăn thậm chí bế tắc. Việc khai thác các tính chất hình học phẳng để định hướng tìm lời giải bài toán hình học trong mặt phẳng toạ độ. Việc chỉ ra bản chất hình học phẳng sẽ bổ trợ cho giải toán chứ không đơn thuần là giải một bài toán hình học phẳng thuần tuý, qua đó giúp học sinh nhận thức được rằng: "*Mỗi bài toán hình học trong mặt phẳng toạ độ có thể luôn chứa đựng một bài toán hình học phẳng tương ứng*".

1. Một số bài toán khai thác các tính chất của hình tam giác, hình tứ giác

Xét bài toán: *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $B(-4;1)$, trọng tâm $G(1;1)$ và đường thẳng chứa phân giác trong của $\widehat{BAC}$ có phương trình $x-y-1=0$. Tìm toạ độ đỉnh A.*

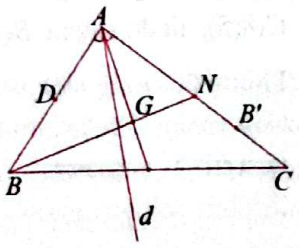
Lời giải đề xuất. Gọi N là trung điểm cạnh AC.

Khi đó $\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{GN}$ nên $N\left(\frac{7}{2};1\right)$.

Gọi A thuộc đường thẳng d có phương trình $x-y-1=0$ nên $A(t;t-1)$. Khi đó:

$\overrightarrow{AB}=(-4-t;2-t)$;

$\overrightarrow{AN}=\left(\frac{7}{2}-t;2-t\right)$.



Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\vec{u}(1;1)$ và là đường phân giác của $\widehat{BAC}$ nên ta có:

$$\left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\vec{u}\right)\right|=\left|\cos\left(\overrightarrow{AN},\vec{u}\right)\right|$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2+2t|}{\sqrt{(t+4)^2+(2-t)^2}}=\frac{\left|\frac{11}{2}-2t\right|}{\sqrt{\left(\frac{7}{2}-t\right)^2+(2-t)^2}}.$$

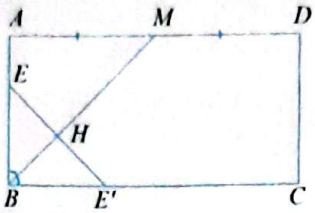
Phương trình này có thể giải được, song xét cho toàn bài thì đây không phải là cách giải tối ưu. Tuy nhiên nếu biết khai thác tính chất của đường phân giác góc trong của tam giác: Nếu lấy điểm B' đối xứng với B qua đường thẳng d thì B' thuộc đường thẳng AC khi đó có lời giải rất ngắn gọn. Tức là từ giả thiết, tìm ra điểm B', khi đó đường thẳng AC chính là đường thẳng NB', A là giao điểm của hai đường thẳng NB' và d.

Việc sử dụng tính chất hình học phẳng đã giảm được khá nhiều công việc tính toán nếu làm theo cách lối mòn bằng cách tham số hoá toạ độ điểm $A(x;y)$. Sau đây là một số ví dụ minh hoạ cho các tính hình học chất này:

Thí dụ 1. *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có đường phân giác trong $\widehat{ABC}$ đi qua trung điểm M của cạnh AD, đường thẳng BM có phương trình là $x-y+2=0$, điểm D nằm trên đường thẳng Δ có phương trình là $x+y-9=0$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$ biết đỉnh B có hoành độ âm và đường thẳng AB đi qua điểm $E(-1;2)$.*

Được quét bằng CamScanner

Lời giải. Gọi E' là điểm đối xứng với điểm E qua đường thẳng BM thì E' thuộc cạnh BC. EE' cắt BM tại H thì H là trung điểm của đoạn EE'.



Phương trình đường thẳng EE' là $x+y-1=0$.

Vì $H=EE'\cap BM$ nên $H\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ và H là trung điểm của đoạn EE'. Suy ra $E'(0;1)$.

Do $B\in BM$ nên đặt $B(b;b+2)$ và $b<0$. Ta có:

$\overrightarrow{BE}(-1-b;-b)$, $\overrightarrow{BE'}(-b;-b-1)$ và $BE\perp BE'$ nên

$2b(b+1)=0$ và do $b<0$ suy ra $b=-1$.

Vậy $B(-1;1)$ và phương trình cạnh AB là $x+1=0$.

Gọi $A(-1;a)$ thuộc cạnh AB $(a\neq 1)$ và $D(d;9-d)$ thuộc đường thẳng Δ thì $M\left(\frac{d-1}{2};\frac{9-d+a}{2}\right)$ và do $M\in BM$ nên ta có:

$$a-2d+6=0 \quad (1).$$

Mặt khác ta có $\overrightarrow{AD}(d+1;9-d-a)$, $\overrightarrow{AB}(0;1-a)$ và $AB\perp AD$ nên $(1-a)(9-d-a)=0$, do $a\neq 1$ suy ra $9-d-a=0$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $a=4$, $d=5$, suy ra toạ độ các điểm cần tìm là:

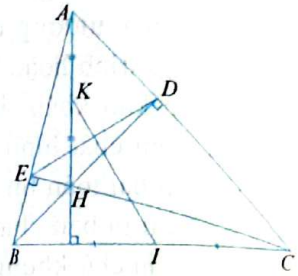
$$A(-1;4),\ B(-1;1),\ C(5;1),\ D(5;4).$$

Nhận xét. Nếu giải theo hướng quen thuộc là gọi vectơ pháp tuyến của đường thẳng đi qua hai điểm A, B là $\vec{n}(a;b)$ thì đường thẳng AB có phương trình dạng $ax+by+a-2b=0$, suy ra phương trình đường thẳng BC là $bx-ay+c=0$. Sau đó sử dụng đẳng thức $\cos\widehat{CBM}=\cos\widehat{ABM}$ để lập phương trình thì lời giải sẽ phức tạp hơn.

Thí dụ 2. *Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H(3;0)$ và trung điểm của BC là $I(6;1)$. Đường thẳng AH có phương trình $x+2y-3=0$. Gọi D, E lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC. Xác định toạ độ các đỉnh của tam giác ABC, biết đường thẳng DE có phương trình $x-2=0$ và điểm D có tung độ dương.*

Phân tích: Từ giả thiết viết được phương trình cạnh BC, nếu tìm được điểm E hoặc D thì viết được phương trình đường tròn (C) tâm I ngoại tiếp tứ giác $BCED$ và B, C sẽ là giao điểm của (C) với cạnh BC, A là giao điểm của CD với AH. Tuy nhiên, việc tìm toạ độ điểm E hoặc D bằng cách nào, từ phương trình đường thẳng DE, tham số hoá toạ độ điểm $D(2;d)$ có thể xác định được giá trị d hay không, chúng ta hãy xem lời giải sau.

Lời giải. Gọi K là trung điểm của AH thì K là tâm đường tròn (C_1) ngoại tiếp tứ giác $AEHD$, điểm I là tâm đường tròn (C_2) ngoại tiếp tứ giác $BCDE$. Đường tròn (C_1) cắt đường tròn (C_2) tại hai điểm E, D nên $IK\perp ED$. Từ đó ta có phương trình đường thẳng IK là $y-1=0$. Vậy suy ra điểm $K(1;1)$ là trung điểm của đoạn thẳng AH nên $A(-1;2)$.



Gọi $D(2;d)$ thuộc đường thẳng ED, ta có:

$$KA=KD\Leftrightarrow 5=1+(d-1)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=3\\d=-1\end{array}\right.$$

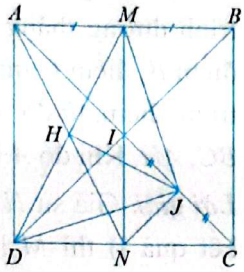
Suy ra $D(2;3)$ do $d>0$. Phương trình đường thẳng AD là $x-3y+7=0$ và đường thẳng BC là $2x-y-11=0$. Lập hệ tạo bởi phương trình hai đường thẳng và giải hệ phương trình ta được $C(8;5)$, từ đó suy ra $B(4;-3)$.

Thí dụ 3. *Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình vuông ABCD có tâm I. Trung điểm cạnh AB là $M(0;3)$, trung điểm đoạn thẳng CI là $J(1;0)$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình vuông, biết đỉnh D thuộc đường thẳng $\Delta: x-y+1=0$.*

Lời giải. Gọi N là trung điểm đoạn thẳng CD và H là tâm hình chữ nhật $AMND$. Gọi (C) là đường

Được quét bằng CamScanner

tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $AMND$. Từ giả thiết, suy ra $NJ \parallel DI$, do đó $NJ \perp AC$ hay J thuộc (C) (vì AN là đường kính của (C)). Mà MD cũng là đường kính của (C) nên JM vuông góc với JD (1).



Do $D \in \Delta$ nên gọi $D(t;t+1)$ ta có: $\overrightarrow{JD} = (t-1;t+1)$,

$\overrightarrow{JM} = (-1;3)$.

Theo (1) ta có: $\overrightarrow{JD}.\overrightarrow{JM} = 0 \Leftrightarrow -t+1+3t+3 = 0$

$\Rightarrow t = -2 \Rightarrow D(-2;-1)$.

Gọi a là độ dài cạnh hình vuông $ABCD$. Dễ thấy:

$$DM = 2\sqrt{5} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} \Rightarrow a = 4.$$

Gọi $A(x;y)$. Vì $AM = 2$, $AD = 4$ nên ta có:

$$\begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = 4 \\ (x+2)^2 + (y+1)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2; y = 3 \\ x = \frac{6}{5}; y = \frac{7}{5}. \end{array}\right.$$

• Với $A(-2;3)$ suy ra $B(2;3)$; $I(0;1)$; $C(2;-1)$ và từ đó ta có toạ độ điểm $J(1;0)$ thoả mãn bài toán.

• Với $A\left(\frac{6}{5};\frac{7}{5}\right)$ suy ra $B\left(-\frac{6}{5};\frac{23}{5}\right)$; $I\left(\frac{-8}{5};\frac{9}{5}\right)$; $C\left(\frac{-22}{5};\frac{11}{5}\right)$ từ đó suy ra $J(-3;2)$ không thoả mãn yêu cầu.

Vậy toạ độ các đỉnh hình vuông $ABCD$ là: $A(-2;3)$, $B(2;3)$, $C(2;-1)$, $D(-2;-1)$.

Nhận xét: Mấu chốt của bài toán này là chứng minh được $JM \perp JD$ từ đó xác định toạ độ điểm D, suy ra toạ độ điểm A.

2. Một số bài toán liên quan đến đường tròn

Trước hết nhắc lại một số tính chất thường gặp trong đường tròn: *Cho đường tròn (C) tâm I ngoại tiếp tam giác ABC với H là trực tâm, G là trọng tâm. Gọi N, F, P là chân đường cao nằm trên các cạnh BC, AB, AC; gọi M, K lần lượt là trung điểm của cạnh BC, AH. Biết đường thẳng AH cắt đường tròn (C) tại D, AE là đường kính (C).*

Khi đó ta có các kết quả sau:

i) *Điểm E đối xứng với điểm H qua điểm M.*

ii) *Tứ giác $BCDE$ là hình thang cân.*

iii) *Điểm D đối xứng với điểm H qua cạnh BC.*

iv) $MK \perp FP$.

v) *Các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, HBC, HBA, HAC là bằng nhau.*

vi) $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GI}$.

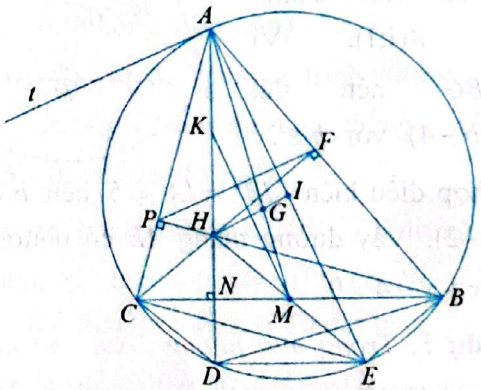
Chứng minh.

I) Ta chứng minh được tứ giác $BHCE$ là hình bình hành vì $BH \parallel EC$ (cùng vuông góc với AC) và $CH \parallel EB$, do vậy M là trung điểm của hai đường chéo nên M là trung điểm đoạn thẳng EH.

ii) Tứ giác $BCDE$ là hình thang (do $BC \parallel DE$ vì cùng vuông góc cạnh AD) nội tiếp đường tròn tâm (C) nên là hình thang cân.

iii) Trong ΔHDE, có $MN \perp DH$, $DE \perp DH$ (tính chất của góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), suy ra $MN \parallel ED$, kết hợp với M là trung điểm đoạn HE, nên MN là đường trung bình của tam giác. Vậy điểm D đối xứng với điểm H qua cạnh BC.

iv) Kẻ tiếp tuyến At, khi đó ta có tứ giác $BCPF$ nội tiếp đường tròn (C) (do $\widehat{BFC} = \widehat{BPC} = 90°$) suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{AFP}$ (cùng bù với $\widehat{BFP}$).



Mặt khác $\widehat{ACB} = \widehat{BAt}$ nên $\widehat{AFP} = \widehat{BAt}$ (so le trong) do đó $At \parallel FP$. Mà $At \perp AI$ nên $FP \perp AI$ và $MK \parallel AI$ nên $MK \perp FP$.

v) Bằng phép lấy phép đối xứng trục BC ($Đ_{BC}$) thì $\Delta ABC \xrightarrow{Đ_{BC}} \Delta A'BC$ và $(I) \xrightarrow{Đ_{BC}} (I')$ là

Được quét bằng CamScanner

đường tròn đi qua H, B, C (do $H \xrightarrow{D_{BC}} D$, hay $(I) = (I')$, ngoài ra, ta còn có D là trực tâm của tam giác $A'BC$).

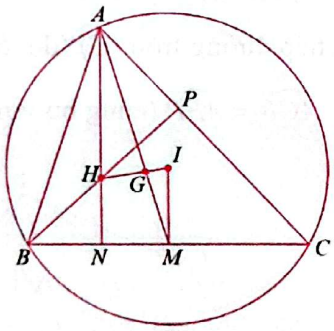
vi) Dễ thấy G là trọng tâm của tam giác HAE nên $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GI}$.

Thí dụ 4. *Cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng BC: $x - y - 4 = 0$. Gọi $H(2;0)$, $I(3;0)$ lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Hãy lập phương trình cạnh AB, biết điểm B có hoành độ không lớn hơn 3.*

Phân tích. Theo kết quả vi) ta tìm được toạ độ trọng tâm G, lập được phương trình đường thẳng MI, tìm được toạ độ điểm M là giao của MI và BC, từ đó suy ra toạ độ điểm A. Lại có $IB = IA$ nên tìm được toạ độ điểm B.

Lời giải. Gọi $G(x;y)$ là trọng tâm tam giác ABC thì ta có: $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GI} \Rightarrow G\left(\frac{8}{3};0\right)$.

Gọi M là trung điểm cạnh BC, khi đó $MI \perp BC$ nên đường thẳng MI có phương trình là $x + y - 3 = 0$. Do M là giao điểm của MI và BC nên điểm M có toạ độ $\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)$.



Lại có $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$ nên $A(1;1)$. Vì $B \in BC$ nên đặt $B(b;b-4)$ với $b \le 3$.

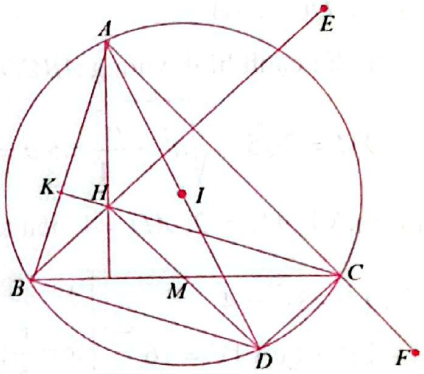
Kết hợp điều kiện $IB^2 = IA^2 = 5$ nên $b = 2$ hay $B(2;-2)$. Vậy đường thẳng AB có phương trình là: $3x + y - 4 = 0$.

Thí dụ 5. *Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có trung điểm cạnh BC là $M(3;-1)$. Điểm $E(-1;-3)$ nằm trên đường thẳng Δ chứa đường cao đi qua đỉnh B và đường thẳng AC đi qua $F(1;3)$. Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C biết đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có đường kính AD với $D(4;-2)$.*

Phân tích: Mấu chốt lời giải là tìm được trực tâm H của tam giác ABC. Khi đó, ta lập được phương trình đường thẳng BH, AC. Việc xác định toạ độ điểm B, điểm C theo phương trình 1 ẩn và có M là trung điểm, từ đó suy ra phương trình đường thẳng BC, AH. Khi đó A là giao điểm của AH và AC.

Lời giải. Giả sử H là trực tâm tam giác ABC, theo kết quả i) thì M là trung điểm đoạn DH mà có $D(4;-2)$, $M(3;-1)$ nên $H(2;0)$.

Đường thẳng BH đi qua H và E nên có phương trình là $x - y - 2 = 0$.



Đường thẳng AC đi qua F và vuông góc với BH nên có phương trình là $x + y - 4 = 0$.

Gọi $B(b;b-2)$ thuộc đường thẳng BH, $C(c;4-c)$ thuộc đường thẳng AC và do M là trung điểm cạnh BC nên ta có:

$$\begin{cases} b + c = 6 \\ b - c + 2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = 5 \end{cases}.$$

Suy ra $B(1;-1)$, $C(5;-1)$.

Đường thẳng AH qua H và vuông với BC nên AH có phương trình là $x - 2 = 0$ và A là giao điểm của AH và AC nên ta có $A(2;2)$.

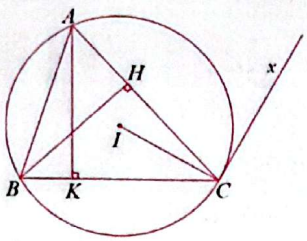
Vậy toạ độ các điểm cần tìm là:

$$A(2;2),\ B(1;-1),\ C(5;-1).$$

Thí dụ 6. *Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (T) có phương trình $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$. Các điểm $K(-1;1)$, $H(2;5)$ lần lượt là chân đường cao hạ từ A, B của tam giác ABC. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng đỉnh C có hoành độ dương.*

Được quét bằng CamScanner

Lời giải. Đường tròn (T) có tâm $I(1;2)$. Gọi Cx là tiếp tuyến của (T) tại C. Ta có $\widehat{HCx} = \widehat{ABC}$ (1).



Do tứ giác $AHKB$ là tứ giác nội tiếp nên ta có $\widehat{ABC} = \widehat{KHC}$ (cùng bù với $\widehat{AHK}$) (2).

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{HCx} = \widehat{KHC}$ (so le trong) nên $HK \,//\, Cx$. Mà $IC \perp Cx$ nên $IC \perp HK$.

Do đó, đường thẳng IC có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{KH} = (3;4)$ nên đường thẳng IC có phương trình là $3x + 4y - 11 = 0$.

Do C là giao điểm của IC và (T) nên toạ độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 11 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}; \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases}.$$

Do hoành độ của C dương nên $C(5;-1)$.

Đường thẳng AC đi qua điểm C và H nên có phương trình là $2x + y - 9 = 0$.

Do A là giao điểm của đường thẳng AC và đường tròn (T) nên toạ độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x + y - 9 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases}; \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases} \text{(loại)}.$$

Do đó $A(1;7)$.

Đường thẳng BC đi qua điểm C và K nên có phương trình là $x + 3y - 2 = 0$.

Do B là giao điểm của đường thẳng BC và đường tròn (T) nên toạ độ điểm B là nghiệm của hệ:

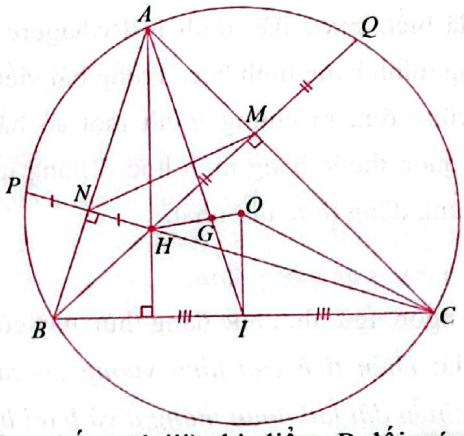
$$\begin{cases} x + 3y - 2 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases} \text{(loại)}.$$

Do đó $B(-4;2)$.

Nhận xét. Mấu chốt bài toán là chứng minh được $HK // Cx$, suy ra $IC \perp HK$ để có được phương trình đường thẳng IC. Việc chứng minh $HK // Cx$ hoàn toàn dựa vào tính chất hình học đã học ở cấp THCS.

Thí dụ 7. *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 = 25$ ngoại tiếp tam giác nhọn ABC có các chân đường cao hạ từ B, C lần lượt là $M(-1;-3)$, $N(2;-3)$. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác ABC biết A có tung độ âm.*

Lời giải. Gọi $H(a;b)$ là trực tâm của tam giác ABC, kéo dài CH cắt (C) tại P, BH cắt (C) tại Q,



khi đó theo kết quả iii) thì điểm P đối xứng với điểm H qua đường thẳng AB, điểm Q đối xứng với điểm H qua đường thẳng AC. Do đó, ta có $P(4-a;-6-b)$; $Q(-2-a;-6-b)$, từ đó có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (4-a)^2 + (6+b)^2 = 25 \\ (2+a)^2 + (6+b)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, b = -2 \\ a = 1, b = -10 \end{cases}.$$

Kiểm tra lại thấy với $H(1;-10)$ thì $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{HN} > 0$ hay $\widehat{BAC}$ tù (không thoả mãn).

Vậy $H(1;-2)$, từ đó phương trình đường thẳng AC là $2x + y + 5 = 0$; đường thẳng AB là $x - y - 5 = 0$, suy ra $A(0;-5)$.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, I là trung điểm đoạn thẳng BC, theo kết quả vi) ta có $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GO}$ và $OI // AH$ nên theo định lí Thalès ta có:

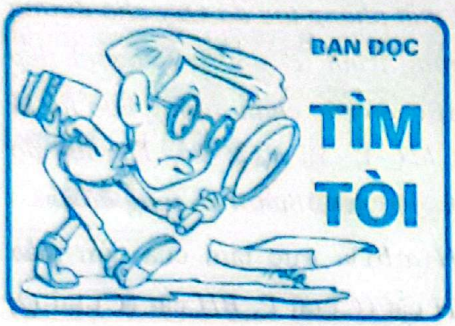
$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GI} \text{ và } \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OI}.$$

Từ đó suy ra $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$, phương trình đường thẳng BC là $x + 3y - 5 = 0$.

Vậy $A(0;-5)$, $B(5;0)$, $C(-4;3)$.

(Kỳ sau đăng tiếp)

Được quét bằng CamScanner



CHỨNG MINH MỘT SỐ HẰNG ĐẲNG THỨC BẰNG HÌNH HỌC

VŨ HOÀNG THÁI (*Hà Nội*)

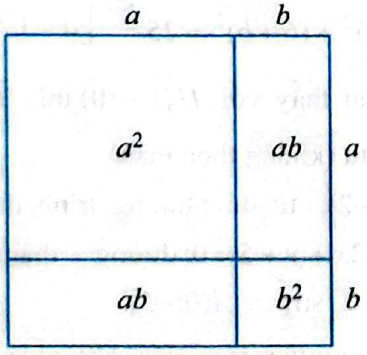
Ta đã biết, trước đây định lý Pythagore đã được chứng minh bằng hình học. Trong bài viết này, tác giả cũng đưa ra chứng minh một số hằng đẳng thức quen thuộc bằng hình học. Chúng ta bắt đầu với hằng đẳng thức thứ nhất.

1. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Theo ngôn ngữ hình học đẳng thức này có thể phát biểu là: *Diện tích của hình vuông có cạnh bằng tổng chiều dài hai đoạn thẳng a và b thì bằng tổng diện tích của*:

- *Một hình vuông cạnh a.*
- *Một hình vuông cạnh b.*
- *Hai hình chữ nhật có các cạnh là a và b.*

Ta dễ thấy điều đó được thể hiện trên hình 1.



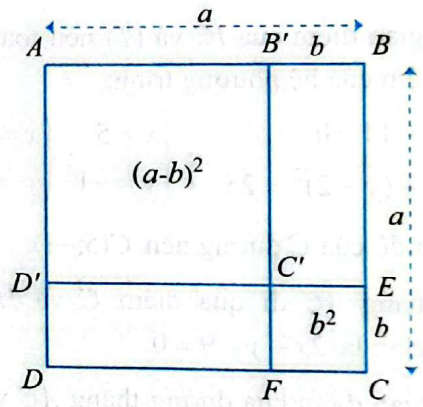
Hình 1

2. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

Tương tự trên, đẳng thức này có thể phát biểu là: *Diện tích của hình vuông có cạnh bằng hiệu hai đoạn thẳng a và b (a > b) thì bằng tổng diện tích của một hình vuông cạnh a, một hình vuông cạnh b trừ đi diện tích của hai hình chữ nhật có các cạnh là a và b.*

Trên hình 2: hình vuông cạnh a là $ABCD$ hình vuông cạnh b là $C'ECF$ có chung nhau chính là hình vuông $C'ECF$ cạnh b.

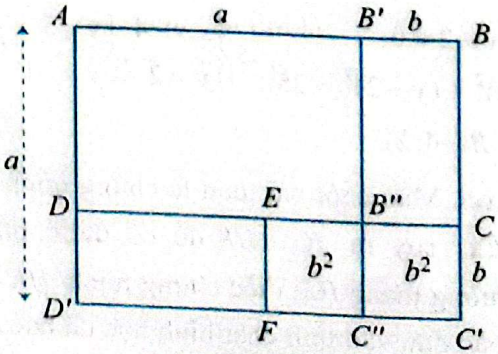
Hai hình chữ nhật cạnh a, b là $B'BCF$ và $D'ECD$ cũng có chung nhau là hình vuông $C'ECF$ cạnh b.



Hình 2

3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Theo ngôn ngữ hình học đẳng thức này có thể phát biểu là: *Diện tích hình chữ nhật có chiều dài bằng tổng hai đoạn thẳng a và b, chiều rộng bằng hiệu hai đoạn thẳng đó (a > b) thì bằng hiệu diện tích hai hình vuông: một hình vuông cạnh a, một hình vuông cạnh b.*



Hình 3

Được quét bằng CamScanner

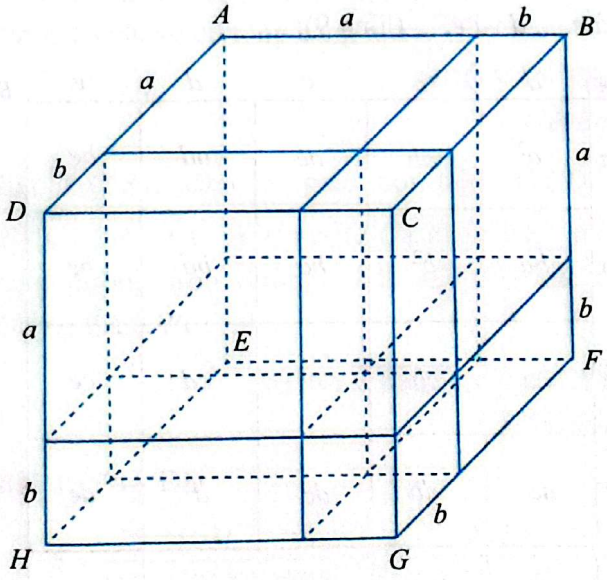
Từ hình 3, hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = a + b$, chiều rộng $BC = a - b$ $(= DE)$.

Hai hình chữ nhật $B'BCB''$ và $D'DEF$ bằng nhau vì cùng có hai cạnh là $a - b$ và b nên diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng diện tích hình chữ L $AB'B''EFD'$, và bằng diện tích hình vuông $AB'C''D'$ (cạnh a) trừ đi diện tích hình vuông $EB''C''F$ (cạnh b). Đây là điều phải chứng minh.

4. $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$.

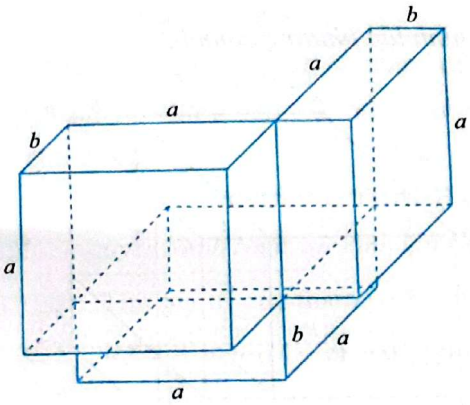
Theo ngôn ngữ hình học đẳng thức này có thể phát biểu là: *Thể tích hình lập phương có cạnh bằng tổng chiều dài hai đoạn thẳng a và b thì bằng tổng thể tích của*:

- *Một hình lập phương cạnh a.*
- *Một hình lập phương cạnh b.*
- *Ba hình lăng trụ đứng đáy là hình vuông cạnh a, chiều cao b.*
- *Ba hình lăng trụ đứng đáy là hình vuông cạnh b, chiều cao a.*



Hình 4

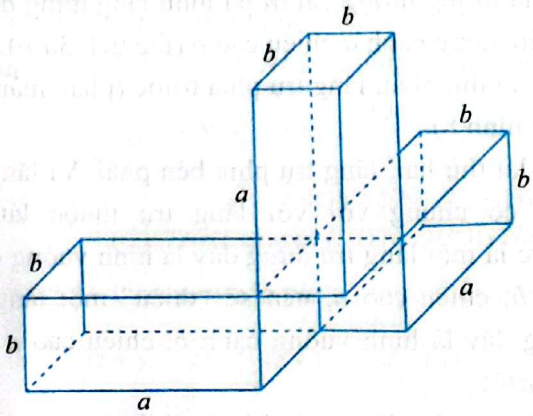
Trên hình 4 dễ thấy hai hình lập phương cạnh a và cạnh b có vị trí chéo nhau qua tâm hình lập phương $ABCD.EFGH$.



Hình 5

Hình 5 biểu diễn ba hình lăng trụ đứng đáy là hình vuông cạnh a chiều cao b (thể tích là $3a^2b$).

Hình 6 biểu diễn ba hình lăng trụ đứng đáy là hình vuông cạnh b chiều cao a (thể tích là $3ab^2$).



Hình 6

Nếu ghép hình 5 và hình 6 lại, sẽ cho ta một hình, mà chỉ còn thiếu hai hình lập phương cạnh a và cạnh b nữa là sẽ có hình lập phương cạnh $a + b$ (hình 4).

5. $(a - b)^3 = a^3 + 3ab^2 - 3a^2b - b^3$.

Theo ngôn ngữ hình học đẳng thức này có thể phát biểu là: *Thể tích hình lập phương có cạnh bằng hiệu chiều dài hai đoạn thẳng a và b $(a > b)$ thì bằng tổng thể tích của*:

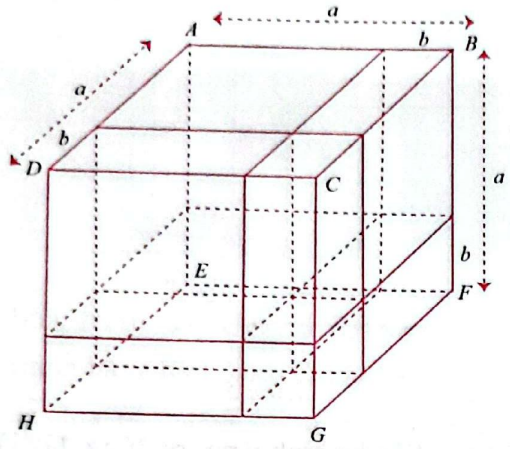
- *Một hình lập phương cạnh a.*
- *Ba hình lăng trụ đứng đáy là hình vuông cạnh b, chiều cao a.*

Trừ đi thể tích:

- *Ba hình lăng trụ đứng đáy là hình vuông cạnh a, chiều cao b.*

Được quét bằng CamScanner

- *Một hình lập phương cạnh b.*



Hình 7

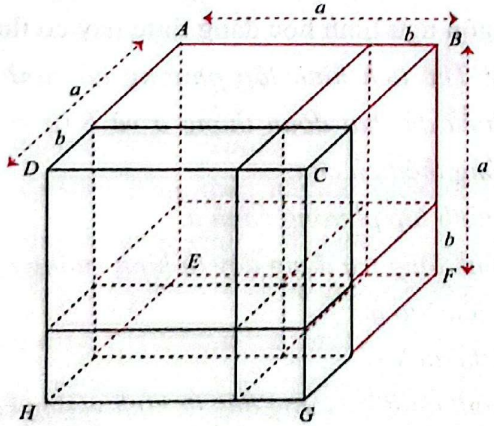
Trường hợp này hơi phức tạp.

Từ hình lập phương *ABCD.EFGH* cạnh a (hình 7), ta tưởng tượng cắt đi ba hình lăng đứng đáy là hình vuông cạnh a chiều cao b (thể tích $3a^2b$).

Cắt lát thứ nhất, lăng trụ phía trước (phần mầu đen trên hình 8).

Cắt lát thứ hai, lăng trụ phía bên phải. Vì lăng trụ này có chung với với lăng trụ thuộc lát cắt trước là một lăng trụ đứng đáy là hình vuông cạnh đáy b, chiều cao a, nên sẽ "thiếu" một lăng trụ đứng đáy là hình vuông cạnh b, chiều cao a (thể tích ab^2).

Cắt lát thứ ba, lăng trụ phía dưới. Lăng trụ này có chung với hai lăng trụ thuộc hai lát cắt trước là hai lăng trụ đứng đáy là hình vuông cạnh b, chiều cao a, mà hai lăng trụ này có chung một hình lập phương cạnh b, nên sẽ thiếu "hai lăng trụ đứng đáy là hình vuông cạnh b, chiều cao a, trừ đi hình lập phương cạnh b (thể tích b^3).



Hình 8

Như vậy, hình lập phương *ABCD.EFGH* cạnh a, sau khi cắt đi ba hình lăng trụ đứng đáy là hình vuông cạnh a, chiều cao b nói trên, thì phần còn lại chính là hình lập phương cạnh $a - b$ với thể tích là $(a - b)^3$. Đây là điều cần chứng minh.

6. Trong đại số, ta có mệnh đề: *Bình phương một tổng, bằng tổng bình phương của mỗi số hạng, cộng hai lần tích của mỗi số hạng với từng số hạng đứng sau nó.*

Thí dụ: $(a+b+c+d+e+...)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+...$

$+2(ab+ac+ad+ae+...$

$+bc+bd+be+...+cd+ce+...+de+...).$

Theo ngôn ngữ hình học đẳng thức này có thể phát biểu là: *Diện tích hình vuông có cạnh bằng tổng chiều dài các đoạn thẳng lần lượt là a, b, c, d, e, ... bằng tổng diện tích các hình vuông lần lượt có cạnh là a, b, c, d, e, ... cộng với từng cặp hình chữ nhật lần lượt có cạnh là a và b, a và c, a và d, a và e, ... b và c, b và d, b và e, ... c và d, c và e, ... d và e, ...* (hình 9).

A	a	b	c	d	e	B
a	a^2	ab	ac	ad	ae	
b	ba	b^2	bc	bd	be	
c	ca	cb	c^2	cd	ce	
d	da	db	dc	d^2	de	
e	ea	eb	ec	ed	e^2	
D						C

Hình 9

Được quét bằng CamScanner



CÁC LỚP THCS

Bài T1/584 (Lớp 6). Cho 340 số tự nhiên 1; 3; 5; 7; ...; 677; 679. Hãy tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho lấy n số phân biệt từ 340 số này luôn tìm được hai số a, b sao cho $a + b + 2024$ là số chính phương?

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/584. Tìm các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn $x^3 = 3^y + 2194$.

NGUYỄN HÀM THÀNH
(GV THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An)

Bài T3/584 (Lớp 7). Cho dãy số: 1, 2, ..., $9n$, trong đó n là số nguyên dương lớn hơn 1. Hãy chia dãy đó thành 9 nhóm sao cho mỗi nhóm có đúng n số hạng có tổng bằng nhau.

NGÔ VĂN THÁI
(Thái Bình)

Bài T4/584. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có $\widehat{B}+\widehat{C}=90^0$ và $AD^3 = AB.BC.CD$. Chứng minh rằng đường tròn đường kính AD tiếp xúc với đường thẳng BC.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(Hải Phòng)

Bài T5/584. Đặt

$$S=\frac{2!}{1!.3!}+\frac{3!}{2!.4!}+\frac{4!}{3!.5!}+...+\frac{2025!}{2024!.2026!}.$$

Chứng minh rằng phương trình $x^2 - x + S^2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 khác $\frac{1}{2}$ và $0 < x_1 < x_2 < 1$.

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/584. Tìm ba nghiệm số thực đúng của phương trình $x^3 - 3u^2x + u^3 = 0$, với u là số thực khác 0 cho trước.

TRƯƠNG THANH CƯỜNG
(GV THCS Nguyễn Minh Nhựt, xã Vĩnh Lợi,Cà Mau)

Bài T7/584. Tìm giá trị của tham số m để phương trình $3^{(x-1)^2} + 3^{(x-3)^2} = mx(4-x)$ có nghiệm duy nhất.

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG
(GV THCS Trần Duy Hưng, Yên Hòa, Hà Nội)

Bài T8/584. Cho tam giác ABC với $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ và P là một điểm bất kỳ bên trong tam giác. Kí hiệu R_a, R_b, R_c và S_a, S_b, S_c tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp và diện tích của các tam giác BPC, CPA, APB. Chứng minh rằng

$$R_aS_a + R_bS_b + R_cS_c \ge \frac{abc}{4}.$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T9/584. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{4}(xy + yz + zx + 1).$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (x^3 + y^3 + z^3)(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3)$.

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT Tiên Du số 1, Bắc Ninh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/584. Cho dãy số $(a_n), n = 0,1,2,...$ thỏa mãn $a_0 \ge 2; a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1, \forall n \ge 0$.

a) Đặt $S_n = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}, \forall n \ge 0$. Chứng minh rằng dãy (S_n) có giới hạn hữu hạn khi n dần đến vô cùng và tính giới hạn đó.

b) Chứng minh rằng

$$\log_{a_0}(a_n - 1).\log_{a_1}(a_n - 1)...\log_{a_{n-1}}(a_n - 1) \ge n^n, \forall n \ge 1.$$

HOÀNG ĐỨC NGUYÊN
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Được quét bằng CamScanner

Bài T11/584. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f\left(x-f(y)-y\right)=3f(x), \forall x,y\in\mathbb{R}$.

NGUYỄN ANH VŨ
(*GV THPT chuyên Chu Văn An, Bình Định*)

Bài T12/584. Cho tam giác nhọn ABC. Điểm M thay đổi trong tam giác. H, K, L theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên BC, CA, AB. Tìm quỹ tích những điểm M sao cho:

$$BH+CK+AL=CH+AK+BL.$$

NGUYỄN TIẾN MINH (*Can Lộc, Hà Tĩnh*)
NGUYỄN MINH HÀ (*Hà Nội*)

Bài L1/584. Một xi-lanh cách nhiệt được đặt thẳng đứng, chứa một lượng khí lí tưởng. Xi-lanh được đậy kín bằng một pít-tông mỏng, dẫn nhiệt tốt, có khối lượng M và diện tích S. Ban đầu, hệ đang ở trạng thái cân bằng, pít-tông cách đáy xi-lanh một đoạn h_0 và nhiệt độ của khí là T_0. Áp suất khí quyển bên ngoài là p_0. Giả sử pít-tông bị kẹt không thể di chuyển. Nếu nhiệt độ khối khí tăng lên một lượng Δt thì áp suất của khối khí sẽ tăng thêm một lượng Δp. Biểu thức Δp phụ thuộc nhiệt độ ban đầu T_0 như thế nào?

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/584. Một khung dây hình chữ nhật có điện trở 0,02 Ω, chiều dài 2 dm, chiều rộng 1,14 dm. Khung dây đặt trong từ trường đều có vectơ $\vec{B}$ vuông góc với mặt phẳng khung, với $B=0{,}1\ T$. Người ta uốn nhanh khung dây nói trên thành một vòng dây hình tròn ngay trong từ trường đều nói trên. Điện lượng di chuyển trong khung bằng bao nhiêu mC? (*Kết quả làm tròn đến phần nguyên*).

THANH LÂM (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/584 (Grade 6). Given 340 natural numbers 1, 3, 5, 7, ..., 677, and 679. Find the smallest positive integer n such that when we take n numbers from the given 340 numbers, we always find two number a, b satisfying $a+b+2024$ is a perfect number.

Problem T2/584 (Grade 7). Find all pairs of natural numbers $(x; y)$ that satisfy

$$x^3=3^y+2194.$$

Problem T3/584 (Grade 7). Given the sequence 1, 2, …, 9n , where n is a positive integer greater than 1. Divide the sequence into 9 groups satisfying: each group has exactly n terms and the sums of the groups are equal.

Problem T4/584. Given a cyclic quadrilateral $ABCD$ with $\hat{B}+\hat{C}=90^0$ and $AD^3=AB.BC.CD$. Prove that the circle with diameter AD is tangent to the line BC.

Problem T5/584. Let

$$S=\frac{2!}{1!.3!}+\frac{3!}{2!.4!}+\frac{4!}{3!.5!}+\ldots+\frac{2025!}{2024!.2026!}.$$

Prove that the equation $x^2-x+S^2=0$ has two solutions x_1, x_2 which are different from $\frac{1}{2}$ and $0<x_1<x_2<1$.

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/584. Find three real solutions of the equation $x^3-3u^2x+u^3=0$, where u is a given non-zero real number.

Problem T7/584. Find the value of the parameter m so that the equation $3^{(x-1)^2}+3^{(x-3)^2}=mx(4-x)$ has a unique solution.

Problem T8/584. Given triangle ABC with $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ and P is any point inside the triangle. Let R_a, R_b, R_c and S_a, S_b, S_c denote circumradii and the areas of triangles BPC, CPA, APB respectively. Prove that

$$R_aS_a+R_bS_b+R_cS_c\ge\frac{abc}{4}.$$

Problem T9/584. Let x, y, z be the real numbers such that $x^2+y^2+z^2=\frac{3}{4}(xy+yz+zx+1)$. Find minimum and maximum values of the expression $P=(x^3+y^3+z^3)(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3)$.

(*Xem tiếp trang 45*)

Được quét bằng CamScanner



Bài T1/580. *Cho a và b là hai số nguyên dương thỏa mãn $a^3+a^2=b^4+1$. Tìm a và b để tổng $A=a^2+2a+2b^2$ là số nguyên tố.*

Lời giải. Từ giả thiết $a^3+a^2=b^4+1$ có

$$a^3-1=b^4-a^2$$

hay là $(a-1)(a^2+a+1)=(b^2-a)(b^2+a)$ (*).

Với $a=1$ thì vế trái của (*) bằng 0 nên

$b^2-a=b^2-1=0$, do đó $b=1$, suy ra

$A=a^2+2a+2b^2=1+2+2=5$ là số nguyên tố.

Vậy $a=b=1$ thỏa mãn đề bài.

Với $a\geq 2$ thì $a-1>0$ nên $b^2-a>0$, tức là các thừa số ở hai vế của (*) đều là số nguyên dương,

Từ (*) đặt $\dfrac{a^2+a+1}{b^2+a}=\dfrac{b^2-a}{a-1}=\dfrac{m}{n}$ với $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản, với các số nguyên dương m, n thỏa mãn $(m,n)=1$. Lúc đó:

$$a^2+a+1=md \text{ và } b^2+a=nd,$$

còn $b^2-a=me$ và $a-1=ne$ với d, e đều là số nguyên dương. Lúc đó:

$$\begin{aligned}A&=a^2+2a+2b^2\\&=a^2+a+1+a-1+b^2+a+b^2-a\\&=md+ne+nd+me=m(d+e)+n(d+e)\\&=(d+e)(m+n)\end{aligned}$$

là hợp số vì $d+e$ và $m+n$ đều lớn hơn 1, không thỏa mãn đề bài. Vậy chỉ có $a=b=1$ thỏa mãn đề bài, lúc đó $A=5$ là số nguyên tố.

Nhận xét. 1) Từ cách giải trên có thể xét Bài toán tổng quát hơn với giả thiết $a^{2r+1}+a^{2s}=b^{2p}+1$, trong đó r, s, p là các số nguyên dương. Để giải bài toán này ta cần dùng bổ đề sau với cách chứng minh tương tự như trên.

Bổ đề. *Nếu các số nguyên dương x, y, z, t thỏa mãn $xy=zt$ thì tổng $x+y+z+t$ là hợp số.*

2) Một số bạn đặt $\dfrac{x}{z}=\dfrac{t}{y}=p$ rồi biến đổi được $x+y+z+t=(y+z)(p+1)$ và kết luận $x+y+z+t$ là hợp số, nhưng điều đó không đúng khi p là phân số tối giản với mẫu số lớn hơn 1.

3) Từ $A=a^2+2(a+b^2)$ là số nguyên tố lẻ, một số bạn suy ra rằng a là số lẻ và b cũng là số lẻ (do $a^3+a^2=b^4+1$) nên $a+b^2$ là số chẵn, từ đó $2(a+b^2)$ chia hết cho 4.

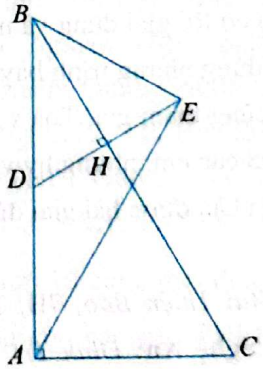
Vì $A=a^2+2(a+b^2)>2$ là số nguyên tố lẻ nên chỉ có dạng $4k+1$ hoặc $4k+3$, mà bình phương của số lẻ chỉ có thể có dạng $4k+1$, do đó a^2 có dạng $4k+1$. Đến đây các bạn đó coi a^2 là số dư khi chia A cho 4 nên rút ra $a^2=1$. Chú ý rằng $a^2=1$ chỉ là trường hợp riêng của dạng $4k+1$, còn chưa xét các số lẻ $a>1$.

4) Chỉ có bạn *Đặng Văn Hoàng*, 7A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc, **Nghệ An** giải đúng bài này.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/580. *Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC}=30^0$. Gọi D là trung điểm cạnh AB, qua D dựng $DH\perp BC$ ($H\in BC$). Trên tia đối của tia HD lấy điểm E sao cho $HD=HE$. Tính tỷ số $\dfrac{AE}{BC}$.*

Lời giải.



Hai tam giác vuông BDH và BHE có: BH chung; $\widehat{BHD}=\widehat{BHE}=90°$; $HD=HE$ nên

$$\Delta BHD=\Delta BHE \text{ (c.g.c).}$$

Do đó $BD=BE$, $\widehat{DBH}=\widehat{EBH}=30°$. Suy ra:

$$\widehat{DBE}=\widehat{DBH}+\widehat{EBH}=60°.$$

Được quét bằng CamScanner

Từ đó tam giác BDE đều nên $DE = EB = BD$ và $\widehat{BDE} = 60°$. Suy ra:

$$\widehat{ADE} = 180° - \widehat{BDE}$$
$$= 180° - 60° = 120°.$$

Vậy tam giác ADE cân tại D có $\widehat{ADE} = 120°$ nên

$$\widehat{AED} = \widehat{DAE} = \frac{180° - 120°}{2} = 30°.$$

Từ đó: $\widehat{AEB} = \widehat{AED} + \widehat{DEB}$
$= 30° + 60° = 90°.$

Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác vuông AEB tại E ta có:

$$AE^2 = AB^2 - BE^2 = AB^2 - BD^2$$
$$= AB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}AB^2.$$

Suy ra: $AE = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$ (1).

Tam giác ABC là nửa tam giác đều cạnh BC nên

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2}BC, \text{ suy ra } BC = \frac{2AB}{\sqrt{3}} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) dẫn đến tỉ số:

$$\frac{AE}{BC} = \frac{AB\sqrt{3}}{2} : \frac{2AB}{\sqrt{3}} = \frac{3}{4}.$$

Nhận xét. Đây là một bài toán không khó nên hầu hết các bạn đều có lời giải đúng và ngắn gọn, một số bạn có lời giải đúng nhưng trình bày hơi dài. Có bạn ở các lớp trên cũng tham gia, Toà soạn đánh giá cao sự nhiệt tình của các em, nhưng hy vọng trong các kì tới Tòa soạn sẽ nhận được bài giải đúng khối lớp của các em.

Thanh Hoá: *Mai Thiện Bảo*, 7B, THCS Chu Văn An, Nga Sơn; **Nghệ An:** *Đinh Trí Dũng, Thái Bùi Hà Anh, Hoàng Sang, Hoàng Văn Đồng*, 7E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Việt Anh*, 7A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc; **Quảng Ngãi:** *Trần Văn Phụng*, 7C, THCS Nguyễn Kim Vang, Đình Cương; *Bùi Quỳnh Nhã Trúc*, 6A, THCS Nghĩa Mỹ, Vệ Giang.

TRẦN THỊ KIM THANH

Bài T3/580. *Cho $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ là các số nguyên tố sao cho $p_{k+1} = 2p_k + 1$ với $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Chứng minh rằng $\sum_{1 \le i < j \le 6} p_i p_j$ chia hết cho 15.*

Lời giải. Đặt $S = \sum_{1 \le i < j \le 6} p_i p_j$. Nhận thấy tổng S có $\frac{5.6}{2} = 15$ số hạng dạng $p_i p_j$ với $1 \le i < j \le 6$.

• Chứng minh S chia hết cho 3.

- Nếu $p_1 \equiv 0 \pmod 3$, do p_1 là số nguyên tố nên $p_1 = 3$. Khi đó $p_2 = 2.3+1 = 7$; $p_3 = 2.7+1 = 15$ là hợp số nên không thoả mãn.

- Nếu $p_1 \equiv 1 \pmod 3$ thì $p_2 \equiv 2.1+1 \equiv 0 \pmod 3$ mà $p_2 > 3$ nên p_2 là hợp số.

- Vậy $p_1 \equiv 2 \pmod 3$, suy ra $p_2 \equiv 2.2+1 \equiv 2 \pmod 3$.

Tương tự tính được $p_3 \equiv 2 \pmod 3$; $p_4 \equiv 2 \pmod 3$; $p_5 \equiv 2 \pmod 3$; $p_6 \equiv 2 \pmod 3$.

Do đó $p_i p_j \equiv 2.2 \equiv 1 \pmod 3$ với $1 \le i < j \le 6$.

Vậy $S \equiv 15.1 \equiv 0 \pmod 3$ (1).

• Chứng minh S chia hết cho 5.

- Nếu $p_1 \equiv 0 \pmod 5$, do p_1 là số nguyên tố nên $p_1 = 5$. Khi đó: $p_2 = 2.5+1 = 11$; $p_3 = 2.11+1 = 23$; $p_4 = 2.23+1 = 47$; $p_5 = 2.47+1 = 95$ là hợp số (không thoả mãn).

- Nếu $p_1 \equiv 1 \pmod 5$ thì $p_2 \equiv 2.1+1 \equiv 3 \pmod 5$; $p_3 \equiv 2.3+1 \equiv 2 \pmod 5$, $p_4 \equiv 2.2+1 \equiv 0 \pmod 5$ mà $p_4 > 5$ nên p_4 là hợp số (không thoả mãn).

- Nếu $p_1 \equiv 2 \pmod 5$ thì $p_2 \equiv 2.2+1 \equiv 0 \pmod 5$. Do p_2 là số nguyên tố nên $p_2 = 5$. Khi đó tính được $p_3 = 11$; $p_4 = 23$; $p_5 = 47$; $p_6 = 95$ là hợp số (không thoả mãn).

- Nếu $p_1 \equiv 3 \pmod 5$ thì $p_2 \equiv 2.3+1 \equiv 2 \pmod 5$; $p_3 \equiv 2.2+1 \equiv 0 \pmod 5$ mà $p_3 > 5$ nên p_3 là hợp số (không thoả mãn).

Được quét bằng CamScanner

- Vậy $p_1 \equiv 4 \pmod 5$ suy ra $p_2 \equiv 2.4+1 \equiv 4 \pmod 5$.

Tương tự tính được $p_3 \equiv 4 \pmod 5$; $p_4 \equiv 4 \pmod 5$; $p_5 \equiv 4 \pmod 5$; $p_6 \equiv 4 \pmod 5$.

Do đó $p_i p_j \equiv 4.4 \equiv 1 \pmod 5$ với $1 \le i < j \le 6$.

Vậy $S \equiv 15.1 \equiv 0 \pmod 5$ (2).

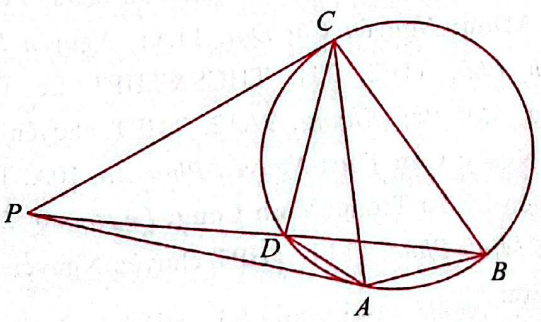
• Từ (1), (2) và ƯCLN (3, 5) = 1 suy ra $S \equiv 0 \pmod{15}$. Vậy S chia hết cho 15.

Nhận xét. Đây là một bài toán hay về chứng minh sự chia hết. Mấu chốt cần phải biết tổng số số hạng của S và phân chia trường hợp để chứng minh S chia hết cho 3 và 5. Có ít bạn tham gia gửi bài đều giải theo cách trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Phú Thọ:** *Chu Ngọc Anh*, 9A, THCS Lý Nam Đế, Vạn Xuân; **Quảng Trị:** *Nguyễn Cảnh Quân*, 9/2, THCS Đông Hải; **Lâm Đồng:** *Hồ Quốc Việt*, 9A10, THCS Quang Trung; **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, 9A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, Trường Quốc tế Song ngữ 2,3 GIBS, TP. Graz; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Bá Đức Anh*, 8A, TH&THCS Lương Chí, Tĩnh Gia; **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, xã Hùng Châu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/580. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và $AC = 2AB$. Các đường thẳng tiếp xúc với (O) tại A và C cắt nhau ở P. Chứng minh rằng BP đi qua điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{BAC}$.*

Lời giải.



Gọi D là giao điểm thứ hai của PB với đường tròn (O). Theo tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung ta có: $\widehat{DCP} = \widehat{CBD}$.

Suy ra: $\Delta PCD \backsim \Delta PBC$, nên có $\dfrac{CD}{BC} = \dfrac{PC}{PB}$.

Tương tự: $\Delta PAD \backsim \Delta PBA$ nên có $\dfrac{AD}{BA} = \dfrac{PA}{PB}$.

Lại có $PA = PC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Từ đó: $\dfrac{CD}{BC} = \dfrac{AD}{BA}$ hay $AB.CD = AD.BC$ (1).

Mặt khác, áp dụng định lí Ptolemy ta có:

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD \quad (2).$$

Kết hợp (1), (2), và $AC = 2AB$, ta có:

$$2AB.CD = 2AB.BD.$$

Suy ra $CD = BD$. Do đó D là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BAC}$.

Nhận xét. Các bạn sau đây cho lời giải tốt: **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, 9A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt; **Thanh Hóa:** *Hoàng Ngọc Tùng*, *Mai Thiện Ân*, 9B, THCS Chu Văn An, Nga Sơn, *Nguyễn Bá Đức Anh*, 8A, TH&THCS Lương Chí, Tĩnh Gia; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, Trường Quốc tế Song ngữ cấp 2,3 GIBS, TP. Graz; **Quảng Trị:** *Nguyễn Chính Quân*, 9/2, THCS Đồng Hải; **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, xã Hùng Châu; **Ninh Bình:** *Đào Việt Trung*, 9B, THCS Thanh Sơn; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thanh Mai*, 9A, THCS Lý Nam Đế, Vạn Xuân; **Quảng Ninh:** *Trịnh Tuấn Kiệt*, 9D1, THCS Móng Cái 2; **TP. Hồ Chí Minh:** *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung.

Có một bạn ở lớp 10 cũng giải đúng bài này, nhưng do bài T4 dành cho các bạn THCS nên bạn đó đã không được khen ở đây.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/580. *Cho a, b, c, d là các số thực không âm thỏa mãn $2a + 3b + 4c + 5d \le 60$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (29a + 19b + 14c + 10d).$$

Được quét bằng CamScanner

Lời giải. Do a, b, c, d là các số thực không âm thỏa mãn $2a + 3b + 4c + 5d \le 60$ (1) nên:

$$2a \le 60,\ 3b \le 60,\ 4c \le 60,\ 5d \le 60$$

$$\Rightarrow 0 \le a \le 30,\ 0 \le b \le 20,\ 0 \le c \le 15,\ 0 \le d \le 12$$

$$\Rightarrow a(a-30)+b(b-20)+c(c-15)+d(d-12) \le 0 \ (2)$$

và $b + 2c + d \ge 0$ (3).

Ta có: $P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (29a + 19b + 14c + 10d)$

$$= [a(a-30)+b(b-20)+c(c-15)+d(d-12)]$$
$$-\frac{1}{2}(b+2c+d)+\frac{1}{2}(2a+3b+4c+5d) \ (4).$$

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra: $P \le 0 - \frac{1}{2}.0 + \frac{1}{2}.60 = 30.$

Dấu "=" xảy ra khi $a = 30, b = c = d = 0$.

Vậy $\max P = 30$.

Nhận xét. Các bạn: *Nguyễn Phúc An*, 10A, THPT chuyên Lý Tự Trọng, **Cần Thơ**; *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, **TP. Hồ Chí Minh**; *Nguyễn Thành Nam*, 9A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, **Hà Nội** đã có lời giải đúng bài này.

NHƯ HOÀNG

Bài T6/580. *Giải phương trình sau trên tập số thực:*

$$x^5 - 15x^4 + 10x^3 - 30x^2 + 5x - 3 = 0 \ (1).$$

Lời giải. Cách 1. (Của *Nguyễn Phương Linh*, *Nguyễn Thanh Mai*, *Lưu Minh Vĩ* và nhiều bạn khác) Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow 2x^5 - 10x^4 + 20x^3 - 20x^2 + 10x - 2$$
$$= x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^5 = (x+1)^5$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[5]{2}(x-1) = (x+1)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[5]{2}x - x = \sqrt[5]{2} + 1$$
$$\Leftrightarrow x\left(\sqrt[5]{2} - 1\right) = \sqrt[5]{2} + 1$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt[5]{2}+1}{\sqrt[5]{2}-1}.$$

Cách 2 (của *Trần Hoàng Bách* và tác giả) Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$$
$$= 10x^4 + 20x^2 + 2 \Leftrightarrow (x-1)^5 = 10x^4 + 20x^2 + 2 \ (2).$$

Vì $10x^4 + 20x^2 + 2 = (x+1)^5 - (x-1)^5$ nên

$$(2) \Leftrightarrow (x-1)^5 = (x+1)^5 - (x-1)^5$$
$$\Leftrightarrow 2(x-1)^5 = (x+1)^5$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt[5]{2}+1}{\sqrt[5]{2}-1}.$$

Nhận xét. Bài này dễ nên nhiều bạn, thậm chí các bạn ở THCS cũng tham gia giải và giải đúng.

Cộng hòa Áo: *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, Trường Quốc tế Song ngữ GIBS, Thành phố Graz; **An Giang:** *Lưu Minh Vĩ*, 8/7, THCS Lê Quý Đôn, *Đoàn Khanh Bảng*, 10T1, *Lưu Minh Trí*, 10 Toán, *Trần Hoàng Bách*, *Nguyễn Đức Mạnh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, thành phố Rạch Giá; **Hà Nội:** *Nguyễn Phương Linh*, 9C, THCS Mỹ Hưng, Tam Hưng, *Nguyễn Thành Nam*, 9A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Anh Dũng*, *Ngô Bùi Anh Khoa*, *Lê Minh Mạnh*, *Nguyễn Viết Thế Tài*, 11Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh. **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, *Dương Trường Giang*, *Phạm Văn Phong*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** *Nguyễn Đức Dũng*, 11A1, THPT Yên Thành 2, xã Quan Thành, *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 11A3, THPT Hoàng Mai, phường Hoàng Mai; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thanh Mai*, *Vũ Tuấn Minh* 9A, THCS Lý Nam Đế, xã Vạn Xuân; **Quảng Trị:** *Hoàng Hà Uyên Nhi*, *Nguyễn Văn Phúc*, 10 Toán 2, *Nguyễn Văn Hợp*, 12 Toán 2, THPT Võ Nguyên Giáp; **Tây Ninh:** *Nguyễn Thanh Mai*, *Trần Lê Trọng Phúc*, 11T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chí Đại*, 11A1, *Nguyễn Phạm Minh Phú*, 11E2, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Cần Thơ:** *Nguyễn Phúc An*, 10A, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Vĩnh Long:** *Lê Hoàng Khang*, *Thái Minh Phúc*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

TẠ DUY PHƯỢNG

Được quét bằng CamScanner

Bài T7/580. *Cho các số thực a, b thỏa mãn*

$$a+b=ab+5+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-2a+5}.\sqrt{b^2-2b+5}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|a-b|$.

Lời giải (theo đa số các bạn). Điều kiện đã cho có thể viết lại thành:

$$(a-1)(b-1)+4+\frac{1}{2}\sqrt{(a-1)^2+4}.\sqrt{(b-1)^2+4}=0.$$

Đặt $a-1=x, b-1=y$ thì điều kiện đã cho trở thành

$$-2xy-8=\sqrt{x^2+4}.\sqrt{y^2+4}.$$

Với chú ý $xy\le -4$, bình phương hai vế ta được:

$$(2xy+8)^2=(x^2+4)(y^2+4)$$

hay $3(xy)^2+32xy+48=4(x^2+y^2)$

hay $3(xy)^2+24xy+48=4(x-y)^2$.

Mặt khác, từ đẳng thức trên chúng ta có:

$$-2xy-8=\sqrt{(x^2+4)(y^2+4)}=\sqrt{4(x+y)^2+(xy-4)^2}$$
$$\ge 4-xy.$$

Suy ra $xy\le -12$. Do đó:

$$4(x-y)^2=3(xy)^2+24xy+48$$
$$=3(xy+12)(xy-4)+192\ge 192$$

hay $|x-y|\ge 4\sqrt{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}x+y=0\\xy=-12\end{cases}$$

hay $(x,y)=(2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ hoặc $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$.

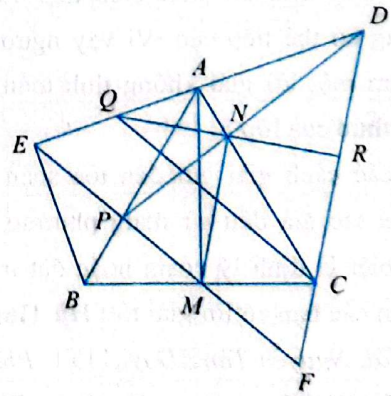
Vậy $\min P=4\sqrt{3}$ khi $(a,b)=(1+2\sqrt{3}, 1-2\sqrt{3})$ hoặc $(1-2\sqrt{3}, 1+2\sqrt{3})$.

Nhận xét. Ngoài cách tiếp cận bằng công cụ thuần túy đại số như trên còn có một hướng tiếp cận khác bằng tọa độ hóa và hình học. Bài toán này không khó nên có khá nhiều bạn gửi lời giải và tất cả đều đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Nghệ An**: *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 11A3, THPT Hoàng Mai; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP Graz; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chí Đại*, 11A1, *Lê Ích Dũng*, 10E1, *Nguyễn Trần Mỹ Anh*, 11E4, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Hà Tĩnh:** *Đặng Sỹ Phước Đức*, 10 Toán 1, *Phan Viết Lê Huy*, 11 Toán 2, *Lê Minh Mạnh*, *Nguyễn Tùng Duy*, *Ngô Bùi Anh Khoa*, *Nguyễn Viết Thế Tài*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hà Nội:** *Nguyễn Minh Dương*, *Nguyễn Thành Nam*, 9A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Mai; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Bá Đức Anh*, 8A, TH&THCS Lương Chí, Tĩnh Gia; **Tây Ninh:** *Lê Nguyễn Anh Thư*, 11T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Quảng Trị:** *Hoàng Hà Uyên Nhi*, *Nguyễn Văn Phúc*, 10 Toán 1, *Nguyễn Văn Hợp*, 12 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Hưng Yên:** *Phạm Văn Phong*, 11 Toán 1, *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **An Giang:** *Trần Hoàng Bách*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt.

NGUYỄN VIỆT HÙNG

Bài T8/580. *Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $MB = MC$, $NC = 3NA$, $PA = 2PB$. Đường thẳng qua C và song song với MN cắt PN tại D. Đường thẳng MP cắt DA tại E và DC tại F. Chứng minh DEE là tam giác đều.*

Lời giải. (Của người chấm bài)



Ta có $\frac{CN}{CM}=\frac{3}{2}=\frac{BM}{BP}$ nên

$$\Delta MCN\sim\Delta PBM \text{ (c.g.c) (1).}$$

Từ đó $\widehat{PMB}=\widehat{MNC}$, suy ra:

Được quét bằng CamScanner

$$\widehat{PMN}=180^0-\widehat{PMB}-\widehat{NMC}$$
$$=180^0-\widehat{MNC}-\widehat{NMC}=60^0.$$

Suy ra $\widehat{EFD}=\widehat{PMN}=60^0$. Mặt khác cũng từ (1) ta thu được $\frac{MP}{MN}=\frac{MB}{CN}=\frac{CM}{CN}$.

Suy ra $\Delta NMP\sim\Delta NCM$ (c.g.c).

Từ đó $\widehat{NDC}=\widehat{PNM}=\widehat{MNC}=\widehat{NCD}$, suy ra:

$$ND=NC \quad (2).$$

Dựng điểm D' trên DF sao cho $\widehat{D'AC}=\widehat{NMC}$, ta thu được $\Delta CAD'\sim\Delta NMC$. Suy ra:

$$\frac{D'A}{D'C}=\frac{MC}{NC}=\frac{2}{3}.$$

Gọi R là trung điểm của CD'. RN cắt AD' tại Q. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác $AD'C$ với ba điểm Q,N,R thẳng hàng ta có:

$$\frac{QA}{QD'}\cdot\frac{RD'}{RC}\cdot\frac{NC}{NA}=1.$$

Suy ra $\frac{QA}{QD'}=\frac{1}{3}$. Ta thu được $D'Q=\frac{3}{2}D'A=D'C$.

Mà $\widehat{AD'C}=\widehat{MCN}=60^0$ nên tam giác $D'QC$ đều.

Từ đó $QR\perp D'C$. Suy ra $ND'=NC$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $D'\equiv D$. Do đó $\widehat{EDF}=60^0$. Vậy tam giác DEF đều.

Nhận xét. Bài toán có phát biểu đẹp và học sinh THCS cũng có thể tiếp cận. Vì vậy người chấm đã cố gắng tìm một lời giải không tính toán và chỉ sử dụng kiến thức của lớp 8.

Phần lớn các cách giải gửi đến tòa soạn cũng như đáp án của tác giả đều sử dụng phương pháp tính toán, đặc biệt là định lý côsin hoặc đặt trục tọa độ. Xin nêu tên các bạn có lời giải tốt: **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Viết Thế Tài, Nguyễn Tùng Duy*, 11T1, *Phan Viết Lê Huy*, 11T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** *Hoàng Ngọc Tùng*, 9B, THCS Chu Văn An, Nga Sơn; **TP. Hồ Chí Minh:** *Huỳnh Quốc Trọng Tín*, 11E1, *Nguyễn Chí Đại*, 11A1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Đà Nẵng:** *Lê Nguyễn Khánh Triều*, 12/5, THPT Thái Phiên; **An Giang:** *Nguyễn Đức Mạnh, Nguyễn Hoài Nhanh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt.

NGUYỄN VĂN LINH

Bài T9/580. *Cho hàm số $f(x)=x^2-3|x|+4$, gọi A là tập hợp hữu hạn các số thực có tính chất: Nếu x thuộc A thì $f(x)$ cũng thuộc A. Hỏi số phần tử của A là bao nhiêu?*

Lời giải. Xét các phương trình:

$$f(x)=x \quad (1) \text{ và } f(x)=2 \quad (2).$$

• $(1)\Leftrightarrow x^2-3|x|+4=x$ (3).

Nếu $x\ge 0$ thì $(3)\Leftrightarrow x^2-3x+4=x$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+4=0\Leftrightarrow (x-2)^2=0\Leftrightarrow x=2.$$

Nếu $x<0$ thì $(3)\Leftrightarrow x^2+3x+4=x$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+4=0\Leftrightarrow (x+1)^2+3=0,$$

phương trình vô nghiệm.

• $(2)\Leftrightarrow x^2-3|x|+4=2$ (4).

Nếu $x\ge 0$ thì $(4)\Leftrightarrow x^2-3x+4=2$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$$

Nếu $x<0$ thì $(4)\Leftrightarrow x^2+3x+4=2$

$$\Leftrightarrow x^2+3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-2\end{array}\right.$$

Xét hàm số:

$$g(x)=f(x)-x=\begin{cases}(x-2)^2 & \text{với } x\ge 0\\(x+1)^2+3 & \text{với } x<0\end{cases}$$

$\Rightarrow g(x)>0,\forall x\ne 2$.

Giả sử tập A có chứa một phần tử x_0 mà $x_0\notin\{-1;1;-2;2\}$. Khi đó:

$$f(x_0)=x_0^2-3|x_0|+4=\left(|x_0|-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\ge\frac{7}{4}.$$

Mặt khác $f(x_0)\ne 2$ (vì nếu $f(x_0)=2$ thì $x_0\in\{\pm 1;\pm 2\}$ mâu thuẫn với giả sử trên) nên suy ra:

Được quét bằng CamScanner

$$f(x_0)\notin\{\pm1;\pm2\}.$$

Theo tính chất của tập A thì $x_0\in A$ thì

$$f(x_0)\in A\Rightarrow g(f(x_0))>0\Leftrightarrow f(x_0)>x_0,$$

tức là x_0 và $f(x_0)$ là hai phần tử phân biệt của tập hợp A. Tương tự ta cũng suy ra $f(f(x_0))\in A$ và $f(f(x_0))>f(x_0)>x_0$. Tiếp tục quá trình này suy ra tập A có vô hạn phần tử, điều này mâu thuẫn với giả thiết A là tập hữu hạn. Chứng tỏ $A\subset\{-1;1;-2;2\}$. Mặt khác

$$f(-1)=f(1)=f(-2)=f(2)=2,$$

nên bằng cách thử trực tiếp ta thấy:

- số phần tử của A bằng 0 nếu $A=\Phi$.
- số phần tử của A bằng 1 nếu $A=\{2\}$.
- số phần tử của A bằng 2 nếu hoặc $A=\{-1;2\}$ hoặc $A=\{1;2\}$ hoặc $A=\{-2;2\}$.
- số phần tử của A bằng 3 nếu hoặc $A=\{-1;1;2\}$ hoặc $A=\{-1;-2;2\}$ hoặc $A=\{-2;1;2\}$.
- số phần tử của A bằng 4 nếu hoặc $A=\{-1;1;-2;2\}$.

Nhận xét. Đa số các bạn có lời giải tương tự như trên. Một số bạn sau khi chứng minh các phần tử của A chỉ có thể là các phần tử thuộc tập hợp $\{-1;1;-2;2\}$ đã kết luận tập hợp A có 4 phần tử. Điều này chỉ đúng khi câu hỏi của đề bài là: *... số phần tử nhiều nhất của A có thể có là bao nhiêu*? Còn với câu hỏi như đề bài đã cho thì đáp án như lời giải trên mới đầy đủ và chặt chẽ. Một số bạn làm ra kết quả sai. Xin nêu tên các bạn sau có lời giải đúng, lập luận chặt chẽ: *Lê Minh Mạnh, Nguyễn Viết Thế Tài, Nguyễn Tùng Duy, Bùi Tùng Lâm, Nguyễn Anh Dũng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh.**

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/580. *Cho dãy số $(x_n)_{n\ge1}$ xác định bởi:* $x_1=6$ *và* $x_{n+1}=\dfrac{2n+3}{2n+1}x_n-\dfrac{12}{(n+1)(2n+1)}$ *với mọi* $n\ge1$. *Đặt* $y_n=\dfrac{x_n}{n}, n=1,2,\ldots$. *Tìm giới hạn:* $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$.

Lời giải. (Dựa theo bạn *Nguyễn Hoài Nhan* 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, **An Giang**

Ta viết lại công thức xác định dãy dưới dạng sau

$$\frac{x_{n+1}}{2n+3}=\frac{x_n}{2n+1}-\frac{12}{(n+1)(2n+1)(2n+3)}.$$

Đặt $u_n=\dfrac{x_n}{2n+1}$ với mọi $n\ge1$, ta có:

$$u_{n+1}=u_n-\frac{12}{(n+1)(2n+1)(2n+3)}$$
$$=u_n+12\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right).$$

Do đó: $u_n=u_{n-1}+12\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right);$

$$u_{n-1}=u_{n-2}+12\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right);$$

...

$$u_3=u_2+12\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right);$$

$$u_2=u_1+12\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right).$$

Cộng theo vế các đẳng thức trên ta thu được:

$u_n=u_1+12S_n=2+12S_n$, trong đó

$$S_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)+\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}.$$

Lại có: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)$

$$+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

Suy ra: $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}\right)$

$$-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$$

hay: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}=1+2\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}\right)$

$$-2\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

Suy ra:

Được quét bằng CamScanner

$$S_n=\frac{4}{3}-\frac{1}{2n+1}-2\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

Mặt khác $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=0$ và

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2.$$

Do đó:

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{4}{3}-2\ln 2 \text{ và } \lim_{n\to+\infty}u_n=18-24\ln 2.$$

Suy ra:

$$\lim_{n\to+\infty}y_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)u_n=36-48\ln 2.$$

Nhận xét. Đa số các bạn đều tìm được công thức tổng quát của dãy (x_n) nhưng gặp khó khăn trong bước tính giới hạn và đã phải sử dụng các kiến thức vượt quá chương trình phổ thông. Chỉ có duy nhất bạn *Nhanh* có lời giải sơ cấp dựa vào tích phân. Về việc sử dụng tích phân để tính giới hạn, bạn đọc có thể tham khảo trong sách giáo khoa Toán lớp 12 theo chương trình cũ. Ngoài bạn *Nhanh* có lời giải tốt, các bạn sau đây có lời giải đúng:

An Giang: *Trần Hoàng Bách, Thái Đức Huy, Nguyễn Hoài Nhanh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 11A3, THPT Hoàng Mai, phường Hoàng Mai; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Viết Thế Tài, Bùi Tùng Lâm*, 11 Toán 1, *Phan Viết Lê Huy*, 11 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Đăng Khoa*, 11 Toán 1, THPT chuyên Tiền Giang.

HOÀNG NGỌC MINH

Bài T11/580. *Với n là số nguyên dương, tính tổng sau (theo n):*

$$T_n=\sum_{\substack{i,j,k,l\in\mathbb{N}\\ i+j+2(k+l)=n}}\frac{(i+j+k+l)!}{i!\,j!\,k!\,l!}.$$

Lời giải. (Dựa theo ý theo đa số các bạn)

Ta sử dụng các đồng nhất thức tổ hợp quen biết:

$$C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}=C_n^k;\ \sum_{k=0}^{n}C_n^k=2^n.$$

Đặt $i+j=u, k+l=v$, $u,v\in\mathbb{N}$, ta có biến đổi:

$$T_n=\sum_{\substack{i,j,k,l\in\mathbb{N}\\ i+j+2(k+l)=n}}\frac{(i+j+k+l)!}{i!\,j!\,k!\,l!}$$

$$=\sum_{\substack{i,j,k,l\in\mathbb{N}\\ i+j+2(k+l)=n}}\left(\frac{((i+j)+(k+l))!}{(i+j)!(k+l)!}\cdot\frac{(i+j)!}{i!\,j!}\frac{(k+l)!}{k!\,l!}\right)$$

$$=\sum_{\substack{i,j,k,l\in\mathbb{N}\\ u+2v=n}}\left(C_{u+v}^uC_u^iC_v^k\right)=\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{N}\\ u+2v=n}}\left(C_{u+v}^u2^u2^v\right).$$

Ta có $T_1=2$, $T_2=6$ và

$$T_{n+2}=\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{N}\\ u+2v=n+2}}\left(C_{u+v}^u2^u2^v\right)$$

$$=\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{N}\\ u+2v=n+2}}\left((C_{u+v-1}^u+C_{u+v-1}^{u-1})2^{u+v}\right)$$

$$=\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{N}\\ u+2v=n+2}}\left(C_{u+v-1}^u2^{u+v}\right)+\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{N}\\ u+2v=n+2}}\left(C_{u+v-1}^{u-1}2^{u+v}\right)$$

$$=\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{N}\\ u+2(v-1)=n}}\left(C_{u+v-1}^{v-1}u2^{u+(v-1)}2\right)+\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{N}\\ (u-1)+2v=n+1}}\left(C_{u+v-1}^{u-1}2^{(u-1)+v}2\right)$$

$$=\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{N}\\ u+2w=n}}2\left(C_{u+w}^wu2^{u+w}\right)+\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{N}\\ (u-1)+2v=n+1}}2\left(C_{u+v-1}^{u-1}2^{(u-1)+v}\right)$$

$$=2T_n+2T_{n+1}.$$

Suy ra: $T_{n+2}=2T_{n+1}+2T_n$, $T_1=2$, $T_2=6$.

Ta thu được dãy sai phân bậc hai với đa thức đặc trưng $\lambda^2-2\lambda-2$ có nghiệm $\lambda_{1,2}=1\mp\sqrt{3}$ và công thức tính nghiệm của phương trình sai phân:

$$T_n=\frac{3+\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^n+\frac{3-\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n,\ n=1,2,\ldots$$

Nhận xét. Đây là dạng toán cơ bản về tính toán dãy số trong tổ hợp. Đa số các bạn giải theo cách đã trình bày ở trên. Một số bạn còn sử dụng phương pháp đếm theo hai cách hoặc sử dụng hàm sinh để tính toán cũng cho lời giải đúng và đẹp. Các bạn gửi bài đều cho kết quả đúng: **Đà Nẵng:** *Lê Nguyễn Khánh Triều*, 12/1, THPT Thái Phiên; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Viết Thế Tài, Bùi Nguyễn Anh Khoa, Bùi Tùng Lâm,*

Được quét bằng CamScanner

Nguyễn Tùng Duy, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, A10, THCS Quang Trung.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/580. *Cho tứ giác ABCD. Các điểm M, N theo thứ tự thuộc AC, BD sao cho* $\frac{\overline{MA}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{NB}}{\overline{ND}}\neq 0$. *O là giao điểm của AN và BM; CO, DO theo thứ tự cắt AB tại P, Q (A, B, P, Q đôi một phân biệt). Đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAP và OBQ cắt nhau tại G khác O. Chứng minh rằng OG chia đôi đoạn CD.*

Lời giải. Trong lời giải này kí hiệu $S[ABC]$ chỉ diện tích đại số của tam giác *ABC*.

Ta cần có hai bổ đề.

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC và điểm O không thuộc AB, AC. M là giao điểm của AO và BC. Khi đó:* $\frac{S[OAB]}{S[OAC]}=\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$.

Phép chứng minh bổ đề trên rất đơn giản, có thể tìm thấy nó trong *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Toán 10, Hình học*, trang 151, NXBGD Việt Nam, 2022).

Bổ đề 2. *Cho tam giác OAB. Các điểm A', B' khác O và theo thứ tự thuộc các đường thẳng OA, OB. Khi đó:* $\frac{S[OAB]}{S[OA'B']}=\frac{\overline{OA}.\overline{OB}}{\overline{OA'}.\overline{OB'}}$.

Chứng minh. Theo bổ đề 1, ta có

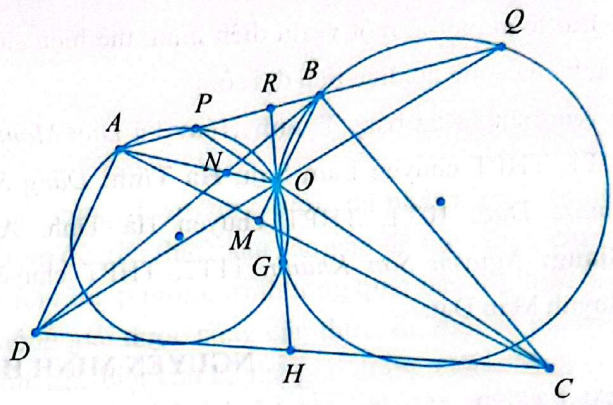
$$\frac{S[OAB]}{S[OA'B']}=\frac{S[OAB]}{S[OA'B]}.\frac{S[OA'B]}{S[OA'B']}=\frac{S[BOA]}{S[BOA']}.\frac{S[A'OB]}{S[A'OB']}$$
$$=\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}.\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}.$$

Trở lại giải bài toán T12.

Gọi *H* là trung điểm của *CD*; *R* là giao điểm của *OH* và *AB* (h.1).

Theo bổ đề 1, chú ý rằng $\frac{\overline{MA}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{NB}}{\overline{ND}}$, ta có:

$$\frac{S[OAB]}{S[OCB]}=\frac{\overline{MA}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{NB}}{\overline{ND}}=\frac{S[OBA]}{S[ODA]}=-\frac{S[OAB]}{S[ODA]}.$$



Hình 1

Nói cách khác $S[OCB]=-S[ODA]$ (1).

Từ đó, lại theo bổ đề 1, suy ra:

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{QA}}=\frac{S[OPB]}{S[OQA]}=-\frac{S[ODA]}{S[OQA]}.\frac{S[OPB]}{S[OCB]}$$
$$=-\frac{\overline{OD}}{\overline{OQ}}.\frac{\overline{OP}}{\overline{OC}}\ (2).$$

Chú ý rằng *H* là trung điểm của *CD*, theo bổ đề 2, ta có:

$$\frac{\overline{RP}}{\overline{RQ}}=-\frac{\overline{RP}}{\overline{RQ}}.\frac{\overline{HD}}{\overline{HC}}=-\frac{\overline{RP}}{\overline{HC}}.\frac{\overline{HD}}{\overline{RQ}}$$
$$=-\frac{S[ORP]}{S[OHC]}.\frac{S[OHD]}{S[ORQ]}$$
$$=-\frac{\overline{OP}.\overline{OR}}{\overline{OH}.\overline{OC}}.\frac{\overline{OH}.\overline{OD}}{\overline{OR}.\overline{OQ}}$$
$$=-\frac{\overline{OP}.\overline{OD}}{\overline{OC}.\overline{OQ}}\ (3).$$

Kết hợp (2) và (3), áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{\overline{RP}}{\overline{RQ}}=\frac{\overline{PB}}{\overline{QA}}=\frac{\overline{RP}+\overline{PB}}{\overline{RQ}+\overline{QA}}=\frac{\overline{RB}}{\overline{RA}}.$$

Do đó:

$$P_{R/(OAP)}=\overline{RA}.\overline{RP}=\overline{RB}.\overline{RQ}=P_{R/(OBQ)}.$$

Vậy *OG* chia đôi *CD*.

Được quét bằng CamScanner

Nhận xét. 1) Bài toán này khó, chỉ có ba bạn tham gia giải và cả ba bạn, ở những mức độ khác nhau, đều sử dụng khái niệm điện tích.

2) Bài toán này là một ví dụ điển hình, thể hiện sức mạnh của công cụ điện tích đại số.

3) Xin nêu cả ba bạn: **Thanh Hóa:** *Vũ Duy Mạnh*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn; **Hà Tĩnh:** *Đặng Sỹ Phước Đức*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **An Giang:** *Nguyễn Sơn Khánh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/580. *Một khí cầu có thể tích* $V = 336\ \text{m}^3$ *và khối lượng vỏ* $m = 84$ kg *được bơm không khí nóng tới áp suất không khí bên ngoài. Không khí nóng phải có nhiệt độ bằng bao nhiêu để khí cầu bắt đầu bay lên? Biết không khí bên ngoài có nhiệt độ* $27\ ^\circ\text{C}$ *và áp suất* 1 atm; *khối lượng mol của không khí ở điều kiện chuẩn là* 29.10^{-3} kg/mol.

Lời giải. Gọi ρ_1 và ρ_2 là khối lượng riêng của không khí ở nhiệt độ $T_1 = 300$ K và nhiệt độ T_2 là nhiệt độ khi khí cầu bắt đầu bay lên.

$$F_{\text{Ác-si-mét}} = P_{\text{vỏ khí cầu}} + P_{\text{của không khí nóng;}}$$

$$\rho_1 gV = mg + \rho_2 gV;$$

$$\rho_2 = \rho_1 - \frac{m}{V}.$$

Ở điều kiện chuẩn, khối lượng riêng của không khí là:

$$\rho_0 = \frac{29\ g}{22{,}4\ L} = 1{,}295\ \text{g/dm}^3 = 1{,}295\ \text{kg/m}^3 \quad (1).$$

Vì thể tích của một lượng khí tỉ lệ thuận với nhiệt độ tuyệt đối khi áp suất không đổi nên khối lượng riêng của một lượng khí tỉ lệ nghịch với nhiệt độ tuyệt đối khi áp suất không đổi.

Ta có: $\rho_1 = \frac{T_0}{T_1}\rho_0 \quad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra: $\rho_1 \approx 1{,}178\ \text{kg/m}^3$.

Do đó $\rho_2 = 0{,}928\ \text{kg/m}^3$.

Vì $\rho_2 = \frac{T_0}{T_2}\rho_0$, nên

$$T_2 = \frac{T_0\rho_0}{\rho_2} = \frac{273.1{,}295}{0{,}928} \approx 381\,\text{K};\ t_2 \approx 108^0\text{C}.$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: **Hà Tĩnh:** *Đặng Văn Lê Mạnh*, 11 Toán, *Đinh Văn Trường*, *Trương Khánh Toàn*, *Nguyễn Lê Khánh Hà*, 11 Lý, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** *Trần Mai Anh*, 11 Lý, THPT chuyên Hưng Yên; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung; **Đồng Tháp:** *Thành Ngô Bảo Long*, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/580. *Một mẫu chất phóng xạ, có chu kì bán rã* $T_1 = 2$ *ngày, gồm* $6{,}4.10^{11}$ *hạt nhân nguyên tử. Một mẫu chất phóng xạ khác, có chu kì bán rã* $T_2 = 3$ *ngày, gồm* 8.10^{10} *hạt nhân nguyên tử. Sau bao nhiêu ngày số hạt nhân nguyên tử chưa phóng xạ của hai mẫu đó bằng nhau?*

Lời giải. Tại thời điểm hiện tại, hai mẫu có số hạt nhân còn lại như nhau: $N_1 = N_2$

$$\Rightarrow N_{01}.2^{-\frac{t}{T_1}} = N_{02}2^{-\frac{t}{T_2}}$$

$$\Rightarrow 2^{-\frac{t}{T_1}+\frac{t}{T_2}} = \frac{N_{02}}{N_{01}} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow t\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = 3 \Rightarrow t = \frac{3}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}} = 18 \text{ (ngày).}$$

Vậy sau 18 ngày hai mẫu có số hạt như nhau.

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: **TP. Hồ Chí Minh:** *Lê Phước Nguyên*, 11E2, *Trần Minh Huy*, *Nguyễn Đức Nhật Huy*, 11E5, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông; **Hà Tĩnh:** *Đặng Văn Lê Mạnh*, 11 Toán, *Đinh Văn Tùng*, *Trương Khánh Toàn*, 11 Lý, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đồng Tháp:** *Thành Ngô Bảo Long*, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **An Giang:** *Lưu Minh Trí*, 10 Toán 2, *Đào Đức Phúc Nguyên*, 11 Toám 1, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Lâm Đồng:** *Hà Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Được quét bằng CamScanner



PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Phương trình bậc ba đã được nghiên cứu từ rất sớm, xuất hiện trong các công trình của các nhà toán học Ấn Độ cổ đại từ khoảng năm 400 TCN đến 200 CN. Đến thế kỷ XI, nhà toán học Ba Tư *Omar Khayyám* đã giải phương trình bậc ba bằng phương pháp hình học, dựa vào giao điểm của các đường conic, và cho rằng có thể tìm nghiệm số bằng lượng giác.

Sang thế kỷ XVI, *Scipione del Ferro* tìm ra cách giải một dạng phương trình bậc ba, thực chất mọi phương trình bậc ba đều có thể đưa về dạng này. Tuy nhiên, lời giải dẫn đến căn bậc hai của số âm – khái niệm chưa được chấp nhận lúc bấy giờ – nên ông giữ kín kết quả. Sau đó, *Niccolò Tartaglia* cũng tìm được phương pháp giải và đã thắng *Antonio Fiore* trong một cuộc thách đấu toán học nổi tiếng. *Tartaglia* sau này tiết lộ bí quyết cho *Gerolamo Cardano*, người đã công bố phương pháp này trong tác phẩm *Ars Magna* (1545). Việc này gây ra nhiều tranh cãi, nhưng đồng thời đánh dấu bước tiến quan trọng trong lịch sử giải phương trình bậc ba.

Cardano nhận thấy rằng việc giải phương trình bậc ba đôi khi dẫn đến căn bậc hai của số âm và đã đặt nền móng ban đầu cho việc nghiên cứu các số này, tức số phức. *Rafael Bombelli* sau đó đã phát triển và làm rõ hơn khái niệm này. Trong một số trường hợp, người ta dùng phương pháp lượng giác để giải phương trình bậc ba, nhưng cách này chỉ cho nghiệm gần đúng và không thuần đại số.

Sau khi giải được phương trình bậc ba, các nhà toán học tiếp tục nghiên cứu các phương trình bậc cao hơn. Năm 1545, *Lodovico Ferrari* đã tìm ra lời giải cho phương trình bậc bốn. Tuy nhiên, với các phương trình bậc lớn hơn bốn, *Niels Henrik Abel* chứng minh rằng không thể tìm được công thức nghiệm tổng quát chỉ bằng các phép toán đại số thông thường.

Cuối cùng, *Évariste Galois* đã phát triển lí thuyết nhóm để giải thích sâu sắc vấn đề này. Ông chứng minh rằng phương trình tổng quát bậc lớn hơn bốn không giải được bằng căn thức, dù một số phương trình đặc biệt vẫn có thể giải được. Công trình của *Galois* đã mở ra đại số hiện đại và đặt nền tảng cho toán học ngày nay.

Người ta đã chứng minh được rằng mọi phương trình đa thức một biến (khác đa thức hằng) bậc n ($n\in\mathbb{N}^*$) với hệ số phức có n nghiệm phức, nếu mỗi nghiệm được tính với số bội của nó. Với phương trình bậc ba hệ số thực (1), nó luôn có ít nhất một nghiệm thực và có không quá ba nghiệm thực.

1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA TRÊN TẬP SỐ THỰC

Phương trình bậc ba có dạng $ax^3+bx^2+cx+d=0$ (1), với $a,b,c,d\in\mathbb{R},a\neq 0$.

Giá trị $x=x_0$ được gọi là nghiệm của phương trình (1) nếu $ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d=0$ là mệnh đề đúng. Khi đó, đa thức vế trái của (1) phân tích được thành tích của nhân tử bậc nhất $(x-x_0)$ và một nhân tử bậc hai:

$$ax^3+bx^2+cx+d=(x-x_0)(ax^2+a_1x+a_2),\ a_1,a_2\in\mathbb{R}.$$

Ta lưu ý rằng, nếu các hệ số a,b,c,d của (1) đều là số nguyên, và (1) có nghiệm hữu tỉ $x_0\neq 0$ được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản $x_0=\frac{u}{v}$ ($u\in\mathbb{Z}^*,v\in\mathbb{N}^*$) thì u là ước của d và v là ước của a (như thế, nếu $|a|=1$ thì mọi nghiệm hữu tỉ (nếu có) của (1) đều là nghiệm nguyên).

2. ĐỊNH LÍ VIÈTE VỚI PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

François Viète (1540 - 1603), là một nhà toán học, luật sư, chính trị gia người Pháp. Về toán học, ông hoạt động trong lĩnh vực đại số và nổi tiếng với

Được quét bằng CamScanner

việc đề ra cách giải thống nhất các phương trình bậc 2, 3 và 4. Ông cũng là người sáng tạo nên cách dùng cái chữ cái để thể hiện cho các ẩn số của một phương trình, khám phá ra mối quan hệ giữa các nghiệm của một đa thức (phương trình) với các hệ số của đa thức (của phương trình) đó (ngày nay được gọi là định lí Viète hay hệ thức Viète).

Trong toán học, định lí Viète (hay công thức Viète, hệ thức Viète, có khi viết theo phiên âm tiếng Việt là Vi-ét), do nhà toán học Pháp *François Viète* tìm ra, nêu lên mối quan hệ giữa các nghiệm của một phương trình đa thức (trong trường hợp số thực hoặc phức) và các hệ số của nó. Ở đây, ta chỉ đề cập tới định lí Viète với phương trình bậc ba hệ số thực.

2.1. Định lí (định lí Viète thuận)

Giả sử phương trình bậc ba (1) *có ba nghiệm* x_1,x_2,x_3 (*không nhất thiết phân biệt*). *Khi đó*

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a}. \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

2.2. Định lí (định lí Viète đảo)

Giả sử có các số $u,v,w,\ p_1,p_2,p_3\in\mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$\begin{cases} u+v+w=p_1 \\ uv+vw+wu=p_2. \\ uvw=p_3 \end{cases}$$

Khi đó u,v,w *là ba nghiệm thực của phương trình bậc ba:* $x^3-p_1x^2+p_2x-p_3=0$ (2).

Thí dụ 1. *Cho ba số thực* a,b,c *thay đổi và thỏa mãn* $a+b+c=4$, $ab+bc+ca=5$. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P=abc$.

Lời giải. Ta xét phương trình

$$(x-a)(x-b)(x-c)=0\Leftrightarrow x^3-4x^2+5x-P=0\ (3).$$

Hàm số $f(x)=x^3-4x^2+5x-P$ có:

$f'(x)=3x^2-8x+5$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=\dfrac{5}{3}$.

Vì phương trình (3) có ba nghiệm a,b,c nên

$$f(1)f\left(\frac{5}{3}\right)\le 0\Leftrightarrow(2-P)\left(\frac{50}{27}-P\right)\le 0\Leftrightarrow\frac{50}{27}\le P\le 2.$$

Vậy $\max P=2$, đạt được khi trong các số a,b,c có hai số cùng bằng 1 và một số còn lại bằng 2;

$\min P=\dfrac{50}{27}$, đạt được khi trong các số a,b,c có hai số cùng bằng $\dfrac{5}{3}$ và một số còn lại bằng $\dfrac{2}{3}$.

3. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

3.1. Phương pháp nhẩm nghiệm

Nếu ta nhẩm được một nghiệm $x=x_0$ *của phương trình* (1) *thì có thể đưa phương trình đó về phương trình tích:* $(x-x_0)(ax^2+a_1x+a_2)=0$.

Thí dụ 2. *Tìm tất cả các giá trị của tham số* m *để phương trình bậc ba*

$$x^3-(m+1)x^2-(m-1)x+2m-1=0$$

có ba nghiệm thực phân biệt x_1,x_2,x_3 *thỏa mãn*

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2\le\frac{5}{4}.$$

Lời giải. Ta biến đổi:

$$\begin{aligned} &x^3-(m+1)x^2-(m-1)x+2m-1=0 \\ \Leftrightarrow\ &(x^3-x^2+x-1)-m(x^2+x-2)=0 \\ \Leftrightarrow\ &(x-1)(x^2-mx-2m+1)=0 \\ \Leftrightarrow\ &x=1 \text{ hoặc } x^2-mx-2m+1=0. \end{aligned}$$

Phương trình đã cho luôn có nghiệm $x_3=1$, nên nó có ba nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^2-mx-2m+1=0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 khác 1, tức là

$$\begin{cases} \Delta=m^2+8m-4>0 \\ 1^2-m.1-2m+1\ne 0 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m>-4+2\sqrt{5};m\ne\dfrac{2}{3} \\ m<-4-2\sqrt{5} \end{array}\right.\ (4).$$

Ta có: $x_1+x_2=m$ và $x_1x_2=1-2m$ (hệ thức Viète).

Lúc này:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1+(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=m^2+4m-1.$$

Do đó: $x_1^2+x_2^2+x_3^2\le\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow m^2+4m-1\le\dfrac{5}{4}$

Được quét bằng CamScanner

$$\Leftrightarrow m^2+4m-\frac{9}{4}\le 0\Leftrightarrow -\frac{9}{2}\le m\le\frac{1}{2} \quad (5).$$

Từ (4) và (5) suy ra tất cả các giá trị cần tìm của m là $2\sqrt{5}-4<m\le\frac{1}{2}$.

Thí dụ 3. *Chứng minh rằng*

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4},\ \cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Lời giải. Xét phương trình: $4x^3-3x=2x^2-1$

$$\Leftrightarrow (x-1)(4x^2+2x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1\\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\end{array}\right.\cdot$$

Vậy phương trình $4x^3-3x=2x^2-1$ có tập nghiệm là: $\left\{1;\frac{-1-\sqrt{5}}{4};\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right\}$.

Mặt khác, vì các nghiệm của phương trình trên đều có giá trị tuyệt đối không quá 1 nên để giải phương trình này ta đặt $x=\cos t$. Lúc đó, phương trình $4x^3-3x=2x^2-1$ trở thành

$$4\cos^3 t-3\cos t=2\cos^2 t-1\Leftrightarrow\cos 3t=\cos 2t$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 3t=2t+k2\pi\\ 3t=-2t+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=k2\pi\\ t=k\frac{2\pi}{5}\end{array}\right.\Leftrightarrow t=k\frac{2\pi}{5}(k\in\mathbb{Z}).$$

Suy ra $x=\cos\frac{k2\pi}{5}$ với $k\in\mathbb{Z}$. Do hàm lượng giác tuần hoàn, nên ta chỉ cần thay các giá trị $k=0,1,2,3,4$ và được $x=\cos 0=1$, $x=\cos\frac{2\pi}{5}$, $x=\cos\frac{4\pi}{5}$, $x=\cos\frac{6\pi}{5}$, $x=\cos\frac{8\pi}{5}$. Tuy nhiên:

$$\cos\frac{8\pi}{5}=\cos\left(2\pi-\frac{8\pi}{5}\right)=\cos\frac{2\pi}{5},$$

$$\cos\frac{6\pi}{5}=\cos\left(2\pi-\frac{6\pi}{5}\right)=\cos\frac{4\pi}{5}=-\cos\left(\pi-\frac{4\pi}{5}\right)=-\cos\frac{\pi}{5}.$$

Do đó phương trình $4x^3-3x=2x^2-1$ có tập nghiệm là $\left\{1;-\cos\frac{\pi}{5};\cos\frac{2\pi}{5}\right\}$. Suy ra hai tập hợp bằng nhau:

$$\left\{1;\frac{-1-\sqrt{5}}{4};\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right\}=\left\{1;-\cos\frac{\pi}{5};\cos\frac{2\pi}{5}\right\}.$$

Điều này xảy ra khi

$$\left\{\begin{array}{l}-\cos\frac{\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\\ \cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\\ \cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\end{array}\right.\cdot$$

Vậy $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4},\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

3.2. Phương pháp đưa về cùng lũy thừa

Ta tìm cách biến đổi (1) về dạng $A(a_1x+a_2)^3=B(b_1x+b_2)^3$, và từ đó thu được $\sqrt[3]{A}(a_1x+a_2)=\sqrt[3]{B}(b_1x+b_2)$.

Thí dụ 4. *Giải phương trình*

$$125x^3+75x^2+15x-1=0.$$

Lời giải. Ta có: $125x^3+75x^2+15x-1=0$

$$\Leftrightarrow(5x+1)^3=2\Leftrightarrow 5x+1=\sqrt[3]{2}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{5}.$$

Thí dụ 5. *Giải phương trình (Xem thêm Thí dụ 6 và Thí dụ 9):*

$$2x^3+3x^2-3x+1=0.$$

Lời giải. Biến đổi tương tự như Thí dụ 4 ở trên, ta có: $2x^3+3x^2-3x+1=0$

$$\Leftrightarrow 3x^3=(x-1)^3\Leftrightarrow x=\frac{1}{1-\sqrt[3]{3}}=-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right).$$

3.3. Phương pháp tổng hợp

Ta nhận thấy, bằng cách chia hai vế của (1) cho $a\ne 0$ và đặt $x=y-\frac{b}{3a}$, phương trình (1) có thể đưa được về dạng $y^3+my=n$ (6), ở đó

$$m=\frac{3ac-b^2}{3a^2},\ n=\frac{9abc-2b^3-27a^2d}{27a^3}.$$

Khi $m=0$ ($3ac=b^2$) thì (6) trở thành:

$$y^3=n\Leftrightarrow y=\sqrt[3]{n}$$

và (1) có nghiệm duy nhất $x=\frac{-b+\sqrt[3]{b^3-27a^2d}}{3a}$.

Tiếp theo, nếu $m\ne 0$, nhờ đổi biến $y=\sqrt{\frac{|m|}{3}}.2t$ ta chuyển (6) về dạng $4t^3+3t=p$ (7)

(với $m>0, p=\frac{3\sqrt{3}n}{2m\sqrt{m}}=\frac{3\sqrt{3}n}{2|m|\sqrt{|m|}}$) hoặc

Được quét bằng CamScanner

$4t^3-3t=p$ (8) (với $m<0, p=\dfrac{3\sqrt{3}n}{2(-m)\sqrt{-m}}=\dfrac{3\sqrt{3}n}{2|m|\sqrt{|m|}}$).

Bây giờ, ta sẽ trình bày phương pháp giải phương trình bậc ba dạng (7) và (8).

• Phương trình (7) (khi đó $m>0$) có đúng một nghiệm thực, vì hàm số $f(t)=4t^3+3t$ xác định, đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$, có tập giá trị cũng là $\mathbb{R}$. Đặt $t=\dfrac{1}{2}\left(u-\dfrac{1}{u}\right)$, $u\neq 0$, thì

$t^3=\dfrac{1}{8}\left(u^3-\dfrac{1}{u^3}-3\left(u-\dfrac{1}{u}\right)\right)$, thế vào (7) ta được:

$$\frac{1}{2}\left(u^3-\frac{1}{u^3}\right)=p\Leftrightarrow u^6-2pu^3-1=0\Leftrightarrow u^3=p\pm\sqrt{p^2+1}.$$

Do đó $t=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{p+\sqrt{p^2+1}}+\sqrt[3]{p-\sqrt{p^2+1}}\right)$.

Vậy (1) có nghiệm duy nhất:

$$x=\sqrt{\frac{m}{3}}\left(\sqrt[3]{p+\sqrt{p^2+1}}+\sqrt[3]{p-\sqrt{p^2+1}}\right)-\frac{b}{3a}$$

(lưu ý trường hợp này $m>0$).

• Với phương trình bậc ba dạng (8) (khi đó $m<0$) ta xét các trường hợp sau đây:

+ Trường hợp $|p|\leq 1$, ta thấy:

$$|4t^3-3t|\leq 1\Leftrightarrow -1\leq 4t^3-3t\leq 1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(t-1)(2t+1)^2\leq 0\\(t+1)(2t-1)^2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow|t|\leq 1,$$

nên mọi nghiệm của (8) đều thỏa mãn $|t|\leq 1$. Đặt $t=\cos u$, phương trình (8) trở thành:

$$4\cos^3 u-3\cos u=p\Leftrightarrow\cos 3u=p$$

$$\Leftrightarrow u=\pm\frac{1}{3}\arccos p+k\frac{2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}.$$

Vì (8) có không quá ba nghiệm thực nên suy ra (8) có đúng ba nghiệm thực là:

$$t=\cos\left(\frac{1}{3}\arccos p\right),\ t=\cos\left(\frac{1}{3}\arccos p\pm\frac{2\pi}{3}\right).$$

Từ đó suy ra (1) có ba nghiệm:

$$x=2\sqrt{\frac{|m|}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos p+k\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{b}{3a};\ k\in\{-1;0;1\}.$$

+ Trường hợp $|p|>1$, ta thấy $|4t^3-3t|>1\Leftrightarrow|t|>1$, nên mọi nghiệm của (8) đều thỏa mãn $|t|>1$. Đặt $t=\dfrac{1}{2}\left(u+\dfrac{1}{u}\right)$, $u\neq 0$, phương trình (8) trở thành:

$$\frac{1}{2}\left(u^3+\frac{1}{u^3}\right)=p\Leftrightarrow u^6-2pu^3+1=0\Leftrightarrow u^3=p\pm\sqrt{p^2-1}.$$

Do đó $t=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{p+\sqrt{p^2-1}}+\sqrt[3]{p-\sqrt{p^2-1}}\right)$. Vậy (1) có nghiệm duy nhất:

$$x=\sqrt{\frac{|m|}{3}}\left(\sqrt[3]{p+\sqrt{p^2-1}}+\sqrt[3]{p-\sqrt{p^2-1}}\right)-\frac{b}{3a}.$$

TÓM TẮT KẾT QUẢ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH (1)

Xét phương trình bậc ba tổng quát:

$$ax^3+bx^2+cx+d=0\ (1)\ (a\neq 0).$$

Đặt các giá trị phụ trợ: $m=\dfrac{3ac-b^2}{3a^2}$, $n=\dfrac{9abc-2b^3-27a^2d}{27a^3}$, $p=\dfrac{3\sqrt{3}n}{2|m|\sqrt{|m|}}$ (nếu $m\neq 0$).

Các trường hợp nghiệm:

1) Nếu $m=0$: Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{-b+\sqrt[3]{b^3-27a^2d}}{3a}$.

2) Nếu $m>0$: Phương trình (1) có nghiệm duy nhất: $x=\sqrt{\dfrac{m}{3}}\left(\sqrt[3]{p+\sqrt{p^2+1}}+\sqrt[3]{p-\sqrt{p^2+1}}\right)-\dfrac{b}{3a}$.

3) Nếu $m<0$ và $|p|\leq 1$: Phương trình (1) có ba nghiệm: $x=2\sqrt{\dfrac{|m|}{3}}\cos\left(\dfrac{1}{3}\arccos p+k\dfrac{2\pi}{3}\right)-\dfrac{b}{3a}$ với $k\in\{-1;0;1\}$.

4) Nếu $m<0$ và $|p|>1$: Phương trình (1) có nghiệm duy nhất:

$$x=\sqrt{\frac{|m|}{3}}\left(\sqrt[3]{p+\sqrt{p^2-1}}+\sqrt[3]{p-\sqrt{p^2-1}}\right)-\frac{b}{3a}.$$

Thí dụ 6. *Giải phương trình (xem thêm Thí dụ 5 và Thí dụ 9)* $2x^3+3x^2-3x+1=0$.

Lời giải. Đặt $x=y-\dfrac{1}{2}$, phương trình đã cho trở thành:

Được quét bằng CamScanner

$2\left(y-\frac{1}{2}\right)^3+3\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-3\left(y-\frac{1}{2}\right)+1=0\Leftrightarrow y^3-\frac{9}{4}y=-\frac{3}{2}$.

Đặt $y=\sqrt{3}t$ ta thu được $4t^3-3t=-\frac{2}{\sqrt{3}}$. Vì $\left|-\frac{2}{\sqrt{3}}\right|>1$ nên $|4t^3-3t|>1\Leftrightarrow|t|>1$. Đặt $t=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right),u\neq0$, thì

$$\frac{1}{2}\left(u^3+\frac{1}{u^3}+3(u+\frac{1}{u})\right)-\frac{3}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)=\frac{-2}{\sqrt{3}}$$

$\Leftrightarrow u^6+\frac{4}{\sqrt{3}}u^3+1=0\Leftrightarrow\ u^3=-\sqrt{3}$ hoặc $u^3=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Suy ra: $t=-\frac{1}{2}\left(\sqrt[6]{3}+\frac{1}{\sqrt[6]{3}}\right)$, $y=-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}\right)$, $x=-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)$.

Thí dụ 7. *Giải phương trình (xem thêm Thí dụ 10)*

$$8x^3-6x-1=0.$$

Lời giải. Ta biến đổi $8x^3-6x-1=0\Leftrightarrow4x^3-3x=\frac{1}{2}$.

Vì $\left|\frac{1}{2}\right|<1$ ta có $|4x^3-3x|<1\Leftrightarrow|x|<1$. Do đó mọi nghiệm thực của phương trình đã cho đều thỏa mãn $|x|<1$. Đặt $x=\cos t$ với $0<t<\pi$ ta thu được:

$$4\cos^3t-3\cos t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos3t=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow t=\pm\frac{\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}.$$

Vì $0<t<\pi$ nên ta chọn $t=\frac{\pi}{9}$, $t=\frac{5\pi}{9}$, $t=\frac{7\pi}{9}$, dẫn tới $x=\cos\frac{\pi}{9}$, $x=\cos\frac{5\pi}{9}=-\cos\frac{4\pi}{9}$, $x=\cos\frac{7\pi}{9}=-\cos\frac{2\pi}{9}$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm:

$$x=\cos\frac{\pi}{9},x=-\cos\frac{2\pi}{9},x=-\cos\frac{4\pi}{9}.$$

Thí dụ 8. *Giải phương trình*

$$4x^3+12x^2+15x+6=0.$$

Lời giải. Đặt $x=y-1$, phương trình đã cho được đưa về:

$4(y-1)^3+12(y-1)^2+15(y-1)+6=0\Leftrightarrow4y^3+3y-1=0.$

Hàm số $f(y)=4y^3+3y-1$ xác định, liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên phương trình $4y^3+3y-1=0$ có nghiệm duy nhất. Tiếp theo, ta đặt $y=\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right),u\neq0$, thì $y^3=\frac{1}{8}\left(u^3-\frac{1}{u^3}-3\left(u-\frac{1}{u}\right)\right)$. Ta thu được phương trình:

$$\frac{1}{2}\left(u^3-\frac{1}{u^3}\right)-1=0\Leftrightarrow u^6-2u^3-1=0\Leftrightarrow u^3=1\pm\sqrt{2}.$$

Dẫn tới $y=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}\right)$.

Vậy $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}\right)-1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

3.4. Phương pháp Cardano

Ta biến đổi (1) về dạng (6). Đặt $y=u+v$ (9) và lưu ý hằng đẳng thức $(u+v)^3-3uv(u+v)=u^3+v^3$, nên ta chọn u,v sao cho:

$$\begin{cases}u^3+v^3=n\\uv=-\frac{m}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^3+v^3=n\\u^3v^3=-\frac{m^3}{27},\end{cases}$$

tức là u^3 và v^3 là hai nghiệm của phương trình $t^2-nt-\frac{m^3}{27}=0$. Phương trình bậc hai (ẩn t) này có biệt thức $\Delta=n^2+\frac{4m^3}{27}$.

- Nếu $\Delta\geq0$ thì $t=\frac{n\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ nên

$$y=u+v=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{n}{2}-\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}.$$

Phương trình (1) có nghiệm:

$$x=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{n}{2}-\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}-\frac{b}{3a}.$$

- Nếu $\Delta<0$ thì $m<0$ và $t=\frac{n\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2}\in\mathbb{C}$ (với i là *đơn vị ảo*). Môđun của số phức $t=\frac{n\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2}$ là

$$|t|=\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{|\Delta|}{4}}=\frac{-m\sqrt{-m}}{3\sqrt{3}}.$$

Được quét bằng CamScanner

Gọi φ là góc thỏa mãn $\cos\varphi=\dfrac{3\sqrt{3}n}{-2m\sqrt{-m}}$, $\sin\varphi=\dfrac{3\sqrt{3}\sqrt{|\Delta|}}{-2m\sqrt{-m}}$ và viết t ở dạng:

$$t=\frac{-m\sqrt{-m}}{3\sqrt{3}}(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)=\frac{-m\sqrt{-m}}{3\sqrt{3}}(\cos(\pm\varphi)+i\sin(\pm\varphi)).$$

Số phức $t=\dfrac{-m\sqrt{-m}}{3\sqrt{3}}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ có các căn bậc ba là: $\sqrt{\dfrac{-m}{3}}\left(\cos\dfrac{\varphi+k2\pi}{3}+i\sin\dfrac{\varphi+k2\pi}{3}\right),k\in\{0;1;2\}.$

Số phức $t=\dfrac{-m\sqrt{-m}}{3\sqrt{3}}(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi))$ có các căn bậc ba là:

$$\sqrt{\frac{-m}{3}}\left(\cos\frac{-\varphi+h2\pi}{3}+i\sin\frac{-\varphi+h2\pi}{3}\right),h\in\{1;2;3\}.$$

Ta chọn u là một căn bậc ba của $\dfrac{-m\sqrt{-m}}{3\sqrt{3}}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ và v là một căn bậc ba của $\dfrac{-m\sqrt{-m}}{3\sqrt{3}}(\cos\varphi-i\sin\varphi)$ (hoặc chọn u là một căn bậc ba của $\dfrac{-m\sqrt{-m}}{3\sqrt{3}}(\cos\varphi-i\sin\varphi)$ và v là một căn bậc ba của $\dfrac{-m\sqrt{-m}}{3\sqrt{3}}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$), sao cho $uv=-\dfrac{m}{3}$. Do đó:

$$y=\sqrt{\frac{-m}{3}}\left(\cos\frac{\varphi+k2\pi}{3}+i\sin\frac{\varphi+k2\pi}{3}\right)+\sqrt{\frac{-m}{3}}\left(\cos\frac{-\varphi+h2\pi}{3}+i\sin\frac{-\varphi+h2\pi}{3}\right)$$

với k,h được chọn thích hợp. Từ đó tìm ra y và tính được x.

Thí dụ 9. *Giải phương trình (xem thêm Thí dụ 5 và Thí dụ 6)* $2x^3+3x^2-3x+1=0$.

Lời giải. Đặt $x=y-\dfrac{1}{2}$ để đưa phương trình đã cho về $y^3-\dfrac{9}{4}y=-\dfrac{3}{2}$. Đặt tiếp $y=u+v$ ta được:

$$(u+v)^3-\frac{9}{4}(u+v)=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow u^3+v^3+\left(3uv-\frac{9}{4}\right)(u+v)=-\frac{3}{2}.$$

Chọn $3uv-\dfrac{9}{4}=0$ thì $u^3+v^3=-\dfrac{3}{2}$. Ta có:

$$\begin{cases}3uv-\dfrac{9}{4}=0\\ u^3+v^3=-\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^3+v^3=-\dfrac{3}{2}\\ u^3v^3=\dfrac{27}{64}\end{cases},$$

hay u^3,v^3 là các nghiệm của phương trình bậc hai (ẩn t): $t^2+\dfrac{3}{2}t+\dfrac{27}{64}=0\Leftrightarrow t\in\left\{-\dfrac{3}{8};-\dfrac{9}{8}\right\}$.

Suy ra $\{u,v\}=\left\{-\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2},-\dfrac{\sqrt[3]{9}}{2}\right\}$. Ta tính được $y=-\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{2}$. Vậy $x=-\dfrac{1}{2}(1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Thí dụ 10. *Giải phương trình (xem thêm Thí dụ 7)* $8x^3-6x-1=0$.

Lời giải. Biến đổi $8x^3-6x-1=0\Leftrightarrow x^3-\dfrac{3}{4}x=\dfrac{1}{8}$.

Đặt $x=u+v$ với u,v thỏa mãn:

$$\begin{cases}u^3+v^3=\dfrac{1}{8}\\ uv=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^3+v^3=\dfrac{1}{8}\\ u^3v^3=\dfrac{1}{64}\end{cases},$$

tức là u^3,v^3 là hai nghiệm của phương trình bậc hai: $t^2-\dfrac{1}{8}t+\dfrac{1}{64}=0$

$$\Leftrightarrow t=\frac{1}{16}\pm i\frac{\sqrt{3}}{16}\Leftrightarrow t=\frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Ta sẽ chọn:

$$u\in\left\{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right),\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right),\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{4\pi}{9}-i\sin\frac{4\pi}{9}\right)\right\}$$

$$v\in\left\{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{9}-i\sin\frac{\pi}{9}\right),\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}\right),\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{2\pi}{9}-i\sin\frac{2\pi}{9}\right)\right\}$$

Được quét bằng CamScanner

sao cho $uv=\frac{1}{4}$. Có 3 cặp (u,v) như vậy. Thế u,v vào $x=u+v$ ta được:

$$x=\cos\frac{\pi}{9},x=-\cos\frac{2\pi}{9},x=-\cos\frac{4\pi}{9}.$$

Đây là ba nghiệm của phương trình đã cho.

4. ÁP DỤNG

Thí dụ 11. *Tính giá trị biểu thức*

$$S=\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{2\pi}{9}-\cos\frac{4\pi}{9},$$

$$P=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}-\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9},$$

$$Q=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9},$$

$$T=\frac{1}{\cos^{10}\left(\frac{\pi}{9}\right)}+\frac{1}{\cos^{10}\left(\frac{5\pi}{9}\right)}+\frac{1}{\cos^{10}\left(\frac{7\pi}{9}\right)}.$$

Lời giải. Phương trình bậc ba $8x^3-6x-1=0$ có các nghiệm (*xem Thí dụ 7 và Thí dụ 10*) là

$$x_1=\cos\frac{\pi}{9},x_2=-\cos\frac{4\pi}{9}=\cos\frac{5\pi}{9},x_3=-\cos\frac{2\pi}{9}=\cos\frac{7\pi}{9}.$$

Theo Định lí Viète, ta có:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{2\pi}{9}-\cos\frac{4\pi}{9}=0\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}-\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=-\frac{3}{4}\\ x_1x_2x_3=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{8}\end{cases}.$$

Vậy: $S=\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{2\pi}{9}-\cos\frac{4\pi}{9}=0,$

$$P=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}-\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{3}{4},$$

$$Q=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{8}.$$

Đặt $a=\frac{1}{x_1},b=\frac{1}{x_2},c=\frac{1}{x_3}$ thì

$$a+b+c=-\frac{P}{Q}=-6,ab+bc+ca=\frac{S}{Q}=0,$$

$$abc=\frac{1}{Q}=8,F_k=a^k+b^k+c^k\,(k\in\mathbb{N}^*).$$

Dễ thấy:

$$F_1=a+b+c=-6,F_2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=36,$$

$$F_3=3abc+(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=-192.$$

Mặt khác, theo định lí Viète đảo, các số a,b,c là ba nghiệm của phương trình: $x^3+6x^2-8=0.$

Do đó:

$$\begin{cases}a^{k+3}+6a^{k+2}-8a^k=0\\ b^{k+3}+6b^{k+2}-8b^k=0\\ c^{k+3}+6c^{k+2}-8c^k=0\end{cases}\Rightarrow F_{k+3}=8F_k-6F_{k+2}\ (k\in\mathbb{N}^*).$$

Như vậy:

$F_4=8F_1-6F_3=1\,104,\ F_5=8F_2-6F_4=-6\,336,$

$F_6=8F_3-6F_5=36\,480,\ F_7=8F_4-6F_6=-210\,048,$

$F_8=8F_5-6F_7=1\,209\,600,$

$F_9=8F_6-6F_8=-6\,965\,760,$

và biểu thức cần tính

$$T=F_{10}=8F_7-6F_9=40\,114\,176.$$

Chú ý. Nếu $\alpha\neq0$ là nghiệm của phương trình (1) thì $d\neq0$ và $\frac{1}{\alpha}$ là nghiệm của phương trình:

$$dx^3+cx^2+bx+a=0\ (10).$$

Tiếp theo, ta trình bày cách giải phương trình bậc bốn tổng quát theo phương pháp Ferrari. Lưu ý rằng mọi phương trình bậc bốn đều có thể đưa được về dạng hệ số bậc cao nhất là 1 như phương trình (11) sau đây. Để giải phương trình bậc bốn (11), trước tiên ta phải giải phương trình bậc ba (13).

Xét phương trình $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ (11) với a,b,c,d là các hệ số thực. Viết lại phương trình (11) dưới dạng:

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{\alpha}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b+\alpha\right)x^2+\left(\frac{a\alpha}{2}-c\right)x+\left(\frac{\alpha^2}{4}-d\right)\ (12).$$

Bây giờ ta chọn một giá trị α sao cho vế phải của (12) cũng là một bình phương. Ta sẽ chọn α thỏa mãn: $\left(\frac{a\alpha}{2}-c\right)^2-4\left(\frac{a^2}{4}-b+\alpha\right)\left(\frac{\alpha^2}{4}-d\right)=0.$

Tức là α là nghiệm của phương trình bậc ba:

$$\alpha^3-b\alpha^2+(ac-4d)\alpha+(4bd-a^2d-c^2)=0\ (13).$$

Giải phương trình (13) (ẩn α) tìm α rồi thế vào (12). Khi đó phương trình bậc bốn (11) sẽ đưa được về 2 phương trình bậc hai mà ta đã biết cách giải.

Được quét bằng CamScanner

Thí dụ 12. *Giải phương trình*

$$x^4-4x^3+2x^2+4x-8=0.$$

Lời giải. Phương trình này có

$$a=-4, b=2, c=4, d=-8.$$

Ta xét phương trình bậc ba (ẩn α):

$\alpha^3-2\alpha^2+16\alpha+48=0\Leftrightarrow\alpha=-2.$

Áp dụng (12) ta có: $x^4-4x^3+2x^2+4x-8=0$

$$\Leftrightarrow(x^2-2x-1)^2=9\Leftrightarrow x^2-2x-1=\pm3.$$

Từ đó tìm được nghiệm của phương trình đã cho là $x=1\pm\sqrt{5}$.

Chú ý. Ta có thể biến đổi:

$x^4-4x^3+2x^2+4x-8=0\Leftrightarrow\left(x^2-2x\right)^2-2\left(x^2-2x\right)-8=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-2x-4\right)\left(x^2-2x+2\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x-4=0\ \left(\text{do } x^2-2x+2>0\right)\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{5}.$

Thí dụ 13. *Giải phương trình*

$$x^4-4x^3-4x^2+16x-8=0.$$

Lời giải. Phương trình này có $a=-4, b=-4, c=16, d=-8$. Ta xét phương trình bậc ba (ẩn α) sau đây: $\alpha^3+4\alpha^2-32\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=-8, \alpha=0, \alpha=4.$

Chọn $\alpha=0$, áp dụng (12) ta có:

$$(x^2-2x)^2=8x^2-16x+8\Leftrightarrow x^2-2x=\pm2\sqrt{2}(x-1)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2(1+\sqrt{2})x+2\sqrt{2}=0\\x^2-2(1-\sqrt{2})x-2\sqrt{2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\\x=1-\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình bậc bốn đã cho có bốn nghiệm:

$$x=1\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}.$$

5. MỘT SỐ BÀI TẬP

1. Tìm m để phương trình sau đây có ba nghiệm thực phân biệt:

$$\frac{(m-2)x^2+(2m+3)x-2m}{x+m}=x^2-x+1.$$

2. Giải phương trình

1) $x^3+x^2-2x+5=0$,

2) $x^3+3x^2+3x-1=0$,

3) $x^3-x^2+2x+3=0$,

4) $x^3-3x+1=0$.

3. Giải phương trình

1) $x^4-3x^3+x^2+4x-6=0$,

2) $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)=8$,

3) $(x+3)^4+(x+5)^4=4$,

4) $x^5-4x^4-3x^3-3x^2-4x+1=0$,

5) $x^6+3x^5+6x^4+15x^3+6x^2+3x+1=0$.

4. Giải biện luận phương trình theo tham số a.

1) $x^3+2ax^2+a^2x+a-1=0$,

2) $4x^3+4x+\sqrt{\dfrac{16x^3+15x-5a}{4}}=a$,

3) $x^4=a(x+1)^2+4x+1$,

4) $x^4-(2a+6)x^2+4x+a^2+2a=0$.

5. Cho các số thực a, b, c, u_1, u_2, u_3. Xét dãy số thực (u_n) xác định bởi công thức truy hồi:

$u_{n+3}=(a+b+c)u_{n+2}-(ab+bc+ca)u_{n+1}+(abc)u_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$

Tìm số hạng tổng quát của (u_n).

6. Tính giá trị biểu thức

$$S=\cos\frac{\pi}{15}+\cos\frac{3\pi}{5}-\cos\frac{4\pi}{15},$$

$$P=\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}-\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{15},$$

$$Q=\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{15},$$

$$F=\frac{1}{\cos^4\left(\dfrac{\pi}{15}\right)}+\frac{1}{\cos^4\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)}+\frac{1}{\cos^4\left(\dfrac{4\pi}{15}\right)}.$$

7. Cho các số thực a, b, c thay đổi và thỏa mãn $a+2b-3c=6; 2ab-6bc-3ca=9$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=abc$.

8. Tìm m để phương trình

$$\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x-m+2=0$$

có ba nghiệm phân biệt theo thứ tự tăng dần lập thành một cấp số cộng.

9. Tìm m để đồ thị hàm số

$$y=x^3-(2m+1)x^2+(m-1)x+m+1$$

cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn -1.

10. Tìm m để phương trình $x^3-mx-m=0$ có ba nghiệm thực phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn

$$x_1^5+x_2^5+x_3^5=54096.$$

Được quét bằng CamScanner



BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI GIÚP NHẬN DẠNG ĐẦY ĐỦ MIỀN LỢI ÍCH THƯƠNG MẠI HAI NƯỚC

NGUYỄN THƯỜNG LẠNG
(203 Nguyễn Huy Tưởng, Thanh Xuân, Hà Nội)

Khi nghiên cứu về lợi ích thương mại, mô hình 2 quốc gia và 2 mặt hàng được sử dụng phổ biến bởi các nhà kinh tế học nổi tiếng thế giới như *A. Smith* (1776) hoặc *D. Ricardo* (1817), sau đó được mở rộng bởi *Hecskcher - Ohlin* (1970) (*Salvatore*, 2018). Mỗi quốc gia đều thu lợi ích thương mại thể hiện ở chênh lệch giữa chi phí sản xuất của nước xuất khẩu và giá mua của nước nhập khẩu. Nếu giá bán cao hơn chi phí sẽ có lợi nhuận. Nếu giá bán bằng chi phí sẽ hòa vốn và nếu thấp hơn sẽ bị lỗ.

Toàn bộ lợi ích thương mại được phân phối giữa nhà xuất khẩu, nhà nhập khẩu, công ty vận tải, hãng bảo hiểm, và dịch vụ hải quan. Nếu kết hợp chênh lệch giá này của nhiều mặt hàng với sản lượng xuất khẩu của từng mặt hàng đó sẽ xác định được lợi ích thương mại của cả quốc gia trong 1 thời kỳ thường là 1 năm. Lợi ích này được mô phỏng dưới dạng diên tích tam giác (*Nguyễn Thường Lạng*, 2018). Đây là cách hiểu thông thường. Nghiên cứu này sử dụng bất phương trình bậc 2 theo đó, thiết lập được đường parabol lợi ích thương mại, làm sâu sắc thêm nhận thức về lợi ích này giữa 2 nước.

Minh họa cơ sở tạo lợi ích thương mại

Ví dụ phổ biến được đưa vào trong các giáo trình kinh tế quốc tế hay thương mại quốc tế của tất cả các nước trên thế giới là giả sử thế giới có 2 quốc gia A và B và 2 mặt hàng X và Y. Đây là mô hình được đơn giản hóa. Năng suất sản xuất trong 1 giờ công (giả sử chi phí sản xuất chỉ có chi phí lao động) của A trong 1 giờ công hoặc là 1X hoặc là 2Y và của B hoặc 3X hoặc 4Y trong 1 giờ công. Ở đây X và Y là các mặt hàng có đơn vị tính tương ứng như đơn vị khối lượng tấn, tạ, yến hay đơn vị độ dài mét, …

Quốc gia A không có lợi thế tuyệt đối (*A. Smith*) trong xuất khẩu cả X và Y vì cả 2 đều có chi phí sản xuất tuyệt đối cao hơn B do năng suất sản xuất thấp hơn trong khi quốc gia B có chi phí sản xuất tuyệt đối cao hơn cả hai mặt hàng. Nước B sẽ xuất khẩu cả X và Y vào nước A.

Tuy nhiên, theo lợi thế tương đối hay lợi thế so sánh, xét chi phí sản xuất tương đối hay chi phí cơ hôi sản xuất X của nước A là $1X = 2Y$, ở nước B chi phí này là $1X = \frac{4Y}{3}$. Cả 2 giá trị này phản ánh các tỷ lệ trao đổi trong nước hay giá cân bằng nội địa từng mặt hàng, theo đó, tỷ lệ trao đổi quốc tế phải nằm trong khoảng này để cả hai quốc gia cùng có lợi. Nếu so sánh 2Y với $\frac{3Y}{4}$ có thể thấy $\frac{3Y}{4} < 2Y$ cho nên quốc gia B có lợi thế so sánh về X (*D. Ricardo*) và xuất khẩu hàng X sang nước A còn nước A xuất khẩu Y sang B.

Mặt hàng X là mặt hàng có lợi thế so sánh do chi phí sản xuất tương đối hay chi phí cơ hội thấp hơn chi phí mặt hàng này ở nước A. Đó là cơ sở để có lợi ích thương mại do chênh lệch chi phí tương đối hay giá tương đối.

Quốc gia A thu được lợi ích nếu xuất khẩu Y theo giá $\frac{X}{2} < Y < \frac{3X}{4}$ (1) . Quốc gia B thu lợi ích nếu xuất khẩu X theo giá $\frac{3X}{4} < X < 2Y$ (2).

Được quét bằng CamScanner

Mở rộng cách phân tích dựa vào bất phương trình bậc 2

Kết quả tính toán trên chỉ ra khoảng giá trao đổi được xác định (1) và (2). Hai khoảng này có tính tương đương nên chỉ cần phân tích một trường hợp là có thể hiểu được trường hợp còn lại. Đồng thời, có thể khái quát hóa các con số cụ thể thành các ký hiệu.

Ở đây sẽ xét cụ thể trường hợp (2). Tỷ lệ Y/X (giá tương đối của Y so với X) cần phải thỏa mãn điều kiện $3/4 < Y/X < 2$. Để dễ hiểu và nhận biết, có thể ký hiệu $Y/X = x$ và vì được sử dụng để chỉ tỷ lệ trao đổi cho nên $x > 0$. Điều kiện trên có thể viết thành: $\frac{3}{4} < x < 2$.

Dưới góc độ toán học, điều kiện này tương đương với nghiệm của bất phương trình bậc 2 là:

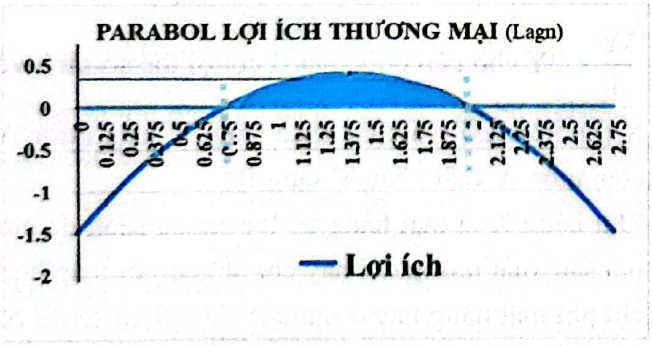
$$\left(x-\frac{3}{4}\right)(2-x)>0.$$

Viết đầy đủ bất phương trình bậc 2 này thu được:

$$-x^2+\frac{11}{4}x-\frac{3}{2}>0.$$

Điểm lưu ý là có thể áp dụng tương tự cho mặt hàng còn lại.

Nếu vẽ đồ thị biến thiên của bất phương trình bậc 2 (VietJack.com) sẽ thu được hình parabol (hình dưới)



Đường biểu diễn lợi ích thương mại có dạng parabol. Parabol cắt trục hoành 2 điểm và đây là 2 nghiệm của phương trình bậc 2 đã xác định. Đây là 2 mức giá cân bằng của 2 quốc gia hay 2 tỷ lệ trao đổi nội địa tương ứng là $\frac{3}{4}$ và 2. Đồng thời, điểm cực đại của parabol phản ánh lợi ích thương mại tối đa của cả hai bên. Nếu cả hai bên có sự hợp tác chặt chẽ để tìm ra điểm cực đại này, cả hai bên sẽ thu được lợi ích lớn nhất. Nếu thiếu sự hợp tác, lợi ích của cả hai bên sẽ khó đạt tối đa. Phần lợi ích này có giá trị dương và nằm ở phía trên trục hoành trong giới hạn đường parabol. Phần diện tích bôi màu trên hình phản ánh miền lợi ích thương mại và được tính bằng $\int_{3/4}^{2}\left(-x^2+\frac{11x}{4}-\frac{3}{2}\right)dx$ có kết quả là $\frac{125}{384}$ hay xấp xỉ 0,3255.

Do đó, các quốc gia khi tham gia mở rộng phạm vi và phát triển sâu quan hệ thương mại, cần phân tích đầy đủ, đánh giá triệt để tác động để hiểu rõ lĩnh vực và phạm vi cần hợp tác nhằm có lợi ích thu được của cả 2 bên tối ưu. Nếu thiếu việc đánh giá này, các bên có thể thiếu định hướng hiệu quả, thậm chí, bị trượt ra ngoài miền lợi ích thương mại xác định, gây thiệt hại không cần thiết.

Kết luận

Từ kết quả nghiên cứu trên, có thể thấy, đường lợi ích thương mại 2 quốc gia và theo đó, miền phản ánh lợi ích này cũng được xác định là đường parabol và phân diện tích năm trên trục hoành và đường parabol tương ứng. Điều này cho thấy vai trò to lớn của toán học đã tạo ra bất ngờ lớn và khác biệt so với nhận thức hiện tại. Lợi ích thương mại giữa 2 quốc gia được nhận thức sâu sắc, rõ ràng và đầy đủ hơn. Đây là nền tảng để đo lường đầy đủ tác động của thương mại đến lợi ích của các bên liên quan một cách khoa học và chính xác.

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Thường Lạng (2018), *Phân bổ lợi ích kinh tế phân bổ của các bên trong đàm phán kinh tế quốc tế*. <https://tckhyersin.edu.vn/Data/Upload/MagazineArticle/10/2.1ng.pdf>

2. Salvatore (2018), *International Economics*, Mc GrawHill.

3. VietJack.com, *Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số bậc hai*, <https://vietjack.com/toan-lop-10/xet-su-bien-thien-va-ve-do-thi-ham-so-bac-hai.jsp >.

Được quét bằng CamScanner

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 125

PROBLEM. *Find the number of arrangements of 9 digits from 1 to 9 such that the digits 1, 2, and 3 always appear in increasing order from left to right and not necessarily consecutively.*

Solution. Let consider two arrangements:

2 1 5 6 9 8 7 4 3 and 3 1 5 6 9 8 7 4 2.

To satisfy the requirement we need to permute the digits 1, 2 and 3 to get the arrangement

1 2 5 6 9 8 7 4 3.

Therefore the considered two arrangements are counted as one.

Thus the number of the arrangements is $\frac{9!}{3!}$.

TỪ VỰNG/KÍ HIỆU

arrangement : *cách sắp xếp*

increasing : *tăng*

consecutive : *liên tiếp*

NGUYEN PHU HOANG LAN

(University of Education, VNU, Hanoi)

BÀI DỊCH SỐ 123

BÀI TOÁN. *Tìm số nghiệm tự nhiên của phương trình* $x+y+z=12$ *với* $x\le 5$.

Lời giải. Số nghiệm tự nhiên, mà không có bất kỳ ràng buộc nào, của phương trình $x+y+z=12$ là C_{14}^2. Đây thực chất là bài toán chia kẹo của Euler, đã được nhắc đến trong một số trước (bạn có thể giải thích vì sao các số 14 và 2 xuất hiện không?).

Bây giờ ta quan tâm đến các nghiệm thỏa mãn điều kiện $x\ge 6$. Ta có thể lấy 6 trong 12 và gán nó cho x. Bằng cách này, bài toán được quy về việc đếm số nghiệm tự nhiên của phương trình $x+y+z=6$, đây lại là bài toán chia kẹo của Euler. Số nghiệm của phương trình này là C_8^2.

Do đó, số nghiệm tự nhiên của phương trình $x+y+z=12$ với điều kiện $x\le 5$ bằng $C_{14}^2-C_8^2$.

Nhận xét. Bài toán này do thầy *Nghiêm Xuân Lực*, Trường THPT Thăng Long, 44 Tạ Quang Bửu, Bạch Mai, Hà Nội đề xuất.

Nhận xét. Hoan nghênh các bạn: *Dương Trường Giang*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**, *Bùi Tùng Lâm*, 11 Toán 1, THPT chuyên **Hà Tĩnh**, *Lê Bạch Hải Đăng*, Lớp 3B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz, **Cộng hòa Áo** đã có bài dịch tốt.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

****

THÔNG BÁO

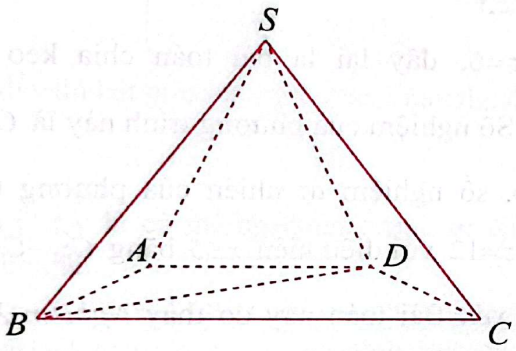
Bạn đọc có thể đặt mua các ấn phẩm của Tạp chí Toán học và Văn học trong nhà trường tại các bưu cục của VNPT trên cả nước với mã đặt như sau: *Toán học và Tuổi trẻ* (C168); *Toán Tuổi thơ 1* (C169); *Toán Tuổi thơ 2* (C169.1); *Văn học và Tuổi trẻ* (C668); *Văn Tuổi thơ* (C668.1).

****

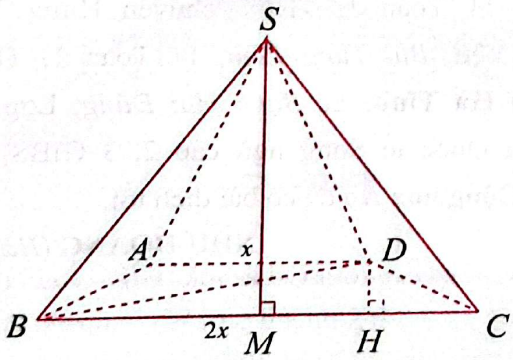
Được quét bằng CamScanner



BÀI TOÁN 104. *Trong lễ kỷ niệm 60 năm thành lập trường THPT Đô Lương 2, nhà trường tổ chức cho các khối lớp cắm trại. Các trại có dạng hình chóp S.ABCD trong đó đáy ABCD là hình thang cân, đường chéo BD=8 m, BC=2AD, ΔSBC cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, cạnh SB tạo với mặt đáy góc 45⁰. Tính độ dài cạnh đáy AD để phần không gian bên trong trại lớn nhất, lúc đó tính thể tích phần không gian trong trại (tham khảo hình vẽ).*



Lời giải. Kẻ $SM \perp BC$, $DH \perp BC$ $(M, H \in BC)$ $\Rightarrow MB = MC$, $SM \perp \text{mp}(ABCD) \Rightarrow SM$ là đường cao của hình chóp $S.ABCD$.



Đặt $AD = x \Rightarrow BC = 2x, HC = \dfrac{x}{2}, BH = \dfrac{3x}{2}$,

$DH = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{64 - \dfrac{9x^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{256 - 9x^2}}{2}$;

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2}.DH = \frac{3x}{2}.\frac{\sqrt{256 - 9x^2}}{2} = \frac{3x}{4}\sqrt{256 - 9x^2}.$$

Ta có: $SM = BM.\tan 45^0 = x$.

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.x.\frac{3x}{4}.\sqrt{256 - 9x^2} = \frac{1}{4}x^2.\sqrt{256 - 9x^2}.$$

Cách 1. *Sử dụng bất đẳng thức.*

Bổ đề. *Cho a, b, c là 3 số dương. Lúc đó*

$$abc \le \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\right)^3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

Thật vậy, ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \ge 3.\sqrt[3]{(abc)^2}$

$$\Rightarrow (abc)^2 \le \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow abc \le \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\right)^3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$. Lúc đó:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{4}x^2.\sqrt{256 - 9x^2} = \frac{1}{4}.\frac{2}{9}.\frac{3x}{\sqrt{2}}.\frac{3x}{\sqrt{2}}.\sqrt{256 - 9x^2}$$

$$\le \frac{1}{18}.\sqrt{\frac{\left(\frac{9x^2}{2} + \frac{9x^2}{2} + 256 - 9x^2\right)^3}{27}} = \frac{1}{18}.\sqrt{\frac{256^3}{27}} = \frac{2048\sqrt{3}}{81}\text{m}^3.$$

Dấu "=" xảy ra khi

$$\frac{3x}{\sqrt{2}} = \sqrt{256 - 9x^2} \Rightarrow x = \frac{16\sqrt{6}}{9}\text{m}.$$

Vậy $V_{S.ABCD}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{2048\sqrt{3}}{81}\text{m}^3$ khi cạnh đáy $AD = x = \dfrac{16\sqrt{6}}{9} \approx 4{,}35$ m.

Được quét bằng CamScanner

Cách 2. Sử dụng phương pháp hàm số.

Xét hàm số: $f(x)=\frac{1}{4}.x^2.\sqrt{256-9x^2}$

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\256-9x^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\le\frac{16}{3}$ (*).

Ta có:

$$f'(x)=\frac{1}{4}.2x.\sqrt{256-9x^2}+\frac{1}{4}.x^2.\frac{-18x}{2\sqrt{256-9x^2}}$$

$$=\frac{x\sqrt{256-9x^2}}{2}-\frac{9x^3}{4\sqrt{256-9x^2}}$$

$$=\frac{2x(256-9x^2)-9x^3}{4.\sqrt{(256-9x^2)^3}}$$

$$=\frac{-27x^3+512x}{4.\sqrt{(256-9x^2)^3}}.$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow -27x^3+512x=0$

$\Leftrightarrow x(-27x^2+512)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=\frac{512}{27}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\frac{16\sqrt{6}}{9}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{16\sqrt{6}}{9}$ (do ĐK (*)).

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $\left(0;\frac{16}{3}\right)$:

x	0		$\frac{16\sqrt{6}}{9}$		$\frac{16}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{2048\sqrt{3}}{81}$	↘	

Từ bảng biến thiên ta thấy: $\max V=\frac{2048}{9}\text{m}^3$

khi $AD=x=\frac{16\sqrt{6}}{9}\approx 4{,}35$ m.

NGUYỄN ĐÔN

(GV THPT Đô Lương 2, xã Bạch Ngọc, Nghệ An)

Nhận xét. Hoan nghênh các bạn: *Trần Nguyễn Anh Huy*, 11A1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, **TP. Hồ Chí Minh** đóng góp 1 cách giải tương tự như cách giải 1 và bạn *Vũ Đức Duy*, phường Bình Lợi Trung, **TP. Hồ Chí Minh** đóng góp 1 cách giải tương tự như cách giải 2 trong lời giải trên của bạn *Nguyễn Đôn*, người giới thiệu bài toán.

NHƯ HOÀNG *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 106 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31/3/2026.

BÀI TOÁN 106. *Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có:*

$$\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}.$$

PHÙ DU *(Ninh Bình)*

****

PROBLEM . . .

(Tiếp theo trang 22)

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/584. Given a sequence (a_n), $n=0,1,2,...$ that satisfies

$$a_0\ge 2;a_{n+1}=a_n^2-a_n+1,\forall n\ge 0.$$

a) Let $S_n=\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_n},\forall n\ge 0$. Prove that the sequence (S_n) has a finite limit and calculate that limit.

b) Prove that

$\log_{a_0}(a_n-1).\log_{a_1}(a_n-1)...\log_{a_{n-1}}(a_n-1)\ge n^n,\forall n\ge 1.$

Problem T11/584. Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ that satisfy

$$f(x-f(y)-y)=3f(x),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Problem T12/584. Given an acute triangle ABC and a point M varies within the triangle. Suppose that H, K, L are the perpendicular projections of M onto BC, CA, AB respectively. Find the locus of points M such that

$$BH+CK+AL=CH+AK+BL.$$

NGUYEN PHU HOANG LAN

(University of Education, VNU, Hanoi)

Được quét bằng CamScanner



BÀI TOÁN 112 (Indian Mathematical Olympiad 2002). *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+a}{c+a}+\frac{c+b}{a+b}\le\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{ac-bc}{b(b+c)}+\frac{ba-ca}{c(c+a)}+\frac{cb-ab}{a(a+b)}\ge 0 \quad (*).$$

Vì bất đẳng thức đề ra và (*) không đổi khi các biến hoán vị vòng quanh, không mất tính tổng quát ta giả sử $a=\max\{a,b,c\}$.

• Nếu $b\ge c$ thì

$$\begin{cases}(ac-bc),(ba-ca)\ge 0\ge(cb-ab)\\ a(a+b)=\max\{b(b+c),c(c+a),a(a+b)\}\end{cases}.$$

Dẫn đến: $\frac{ac-bc}{b(b+c)}\ge\frac{ac-bc}{a(a+b)}$ (1),

$\frac{ba-ca}{c(c+a)}\ge\frac{ba-ca}{a(a+b)}$ (2), $\frac{cb-ab}{a(a+b)}=\frac{cb-ab}{a(a+b)}$ (3).

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) rồi rút gọn ta được (*) đúng.

• Nếu $b\le c$ thì

$$\begin{cases}(ac-bc)\ge 0\ge(ba-ca),(cb-ab)\\ b(b+c)=\min\{b(b+c),c(c+a),a(a+b)\}\end{cases}.$$

Dẫn đến: $\frac{ac-bc}{b(b+c)}=\frac{ac-bc}{b(b+c)}$ (4),

$\frac{ba-ca}{c(c+a)}\ge\frac{ba-ca}{b(b+c)}$ (5), $\frac{cb-ab}{a(a+b)}\ge\frac{cb-ab}{b(b+c)}$ (6).

Cộng vế với vế của (4), (5), (6) rồi rút gọn ta được (*) đúng.

Đẳng thức của bài toán xảy ra khi và chỉ khi

$$b(b+c)=c(c+a)=a(a+b)\Leftrightarrow a=b=c.$$

Bài toán được chứng minh.

Bình luận. Bài toán đề ra là bài toán đẹp nổi tiếng, đã có một số cách giải khác. Các cách giải đó đều phải sử dụng đến các bất đẳng thức kinh điển BĐT Cauchy, BĐT hoán vị, BĐT Bunyakovsky và lời giải cũng không ngắn.

Vẫn sử dụng cách giải như trên vào giải bài toán mở rộng dưới đây sẽ là một cách giải đẹp, độc đáo, ấn tượng cho bài toán này.

Cho các số thực dương a,b,c,k. Chứng minh rằng

$$\frac{ka+c}{kb+c}+\frac{kb+a}{kc+a}+\frac{kc+b}{ka+b}\le\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.$$

NGÔ VĂN THÁI
(*Hưng Yên*)

Nhận xét. Có bạn đã nhầm khi cho rằng vai trò của a, b, c trong bài toán là bình đẳng nên đã giả thiết $a\ge b\ge c$. Tuy nhiên các biến trong bài toán có vai trò không bình đẳng, cụ thể bài toán không đổi khi ta hoán vị vòng quanh các biến nên chỉ có thể đặt $a=\max\{a,b,c\}$ hoặc $a=\min\{a,b,c\}$. Do đó lời giải của bạn xét thiếu trường hợp $a\ge c\ge b$. Hoan nghênh các bạn: *Đặng Sĩ Phước Đức*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh** và *Vũ Đức Duy*, phường Bình Lợi Trung, **TP. Hồ Chí Minh** đã có lời giải đúng cho bài toán này.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31/3/2026.

BÀI TOÁN 114. *Cho hàm số f xác định bởi:*

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d},$$

ở đó a, b, c, d là các số thực khác 0, có các tính chất: $f(19)=19$, $f(97)=97$ và $f(f(x))=x$ với mọi giá trị $x\ne-\frac{d}{c}$. Tìm miền giá trị của f.

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

Được quét bằng CamScanner



GIẢI ĐÁP: THẬT HOÀN HẢO VÀ NGẮN GỌN!

(Đề đăng trên TH&TT số 580, tháng 10 năm 2025)

Phân tích sai lầm. Việc áp dụng tính chất của hàm số bậc nhất cho hàm số $f(a)$ trên đoạn $[1;3]$ là chưa chính xác. Chẳng hạn nếu ta cũng áp dụng lý luận trên để tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=a^2+b^2+c^2+2abc$ thì $Q\geq\min\{g(1);g(3)\}=5$ với $g(a)=2(bc-b-c)a+9-2bc$ trên $[1;3]$. Tuy nhiên khi $a=b=\frac{3}{2},c=0$ thì $Q=\frac{9}{2}<5$ nên 5 không phải là giá trị nhỏ nhất của Q. Lý do sai lầm trong các lời giải trên là áp dụng sai tính chất của hàm số bậc nhất. Cụ thể, do $a+b+c=3$ và $a\geq b\geq c$ nên khi a thay đổi trên đoạn $[1;3]$ thì b,c cũng thay đổi theo và khi đó các hệ số của hàm số $f(a)$ thay đổi theo sự thay đổi của biến a, do vậy tính chất $\min\{f(1);f(3)\}\leq f(a)\leq\max\{f(1);f(3)\}$ không còn đúng nữa.

Lời giải đúng. Với $a+b+c=3$, ta có:

$$a^2+b^2+c^2=9-2(ab+bc+ca);$$

$$a^3+b^3+c^3=3abc+3[9-3(ab+bc+ca)].$$

Do vậy: $P=6abc-13(ab+bc+ca)+45$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c\geq 0$, khi đó $0\leq c\leq 1$. Chú ý rằng $0\leq ab\leq\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(3-c)^2}{4}$.

Xét hàm số sau trên đoạn $\left[0;\frac{(3-c)^2}{4}\right]$:

$$f(ab)=(6c-13)ab-13c(3-c)+45.$$

Chú ý rằng $6c-13<0,\forall c\in[0;1]$ nên hàm số $f(ab)$ nghịch biến trên đoạn $\left[0;\frac{(3-c)^2}{4}\right]$ suy ra $f\left(\frac{(3-c)^2}{4}\right)\leq f(ab)\leq f(0)$. Ta có:

$$f(0)=13c^2-39c+45\leq 45,\forall c\in[0;1].$$

$$f\left(\frac{(3-c)^2}{4}\right)=\frac{3}{4}(2c+5)(c-1)^2+12\geq 12,\forall c\in[0;1].$$

Do vậy: $12\leq f(bc)=P\leq 45$. Khi $a=b=c=1$ thì $P=12$, khi $a=3,b=c=0$ thì $P=45$.

Do vậy: $\min P=12,\max P=45$.

Nhận xét. Không có bạn nào phát hiện được sai lầm trong bài này.

KIHIVI

SAO KHÔNG CÓ ĐIỂM?



Trong đề kiểm tra có bài toán: *Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2. Trên d_1 có 6 điểm phân biệt màu đỏ, trên d_2 có 4 điểm phân biệt màu xanh. Xét tất cả các tam giác được tạo thành khi nối các điểm đó với nhau. Lấy ngẫu nhiên một tam giác, tính xác suất lấy được tam giác có hai đỉnh màu đỏ.*

Bạn Hưng giải như sau:

TH1: Lấy 1 điểm thuộc đường thẳng d_1, lấy 2 điểm thuộc đường thẳng d_2. Có 6 cách lấy được 1 điểm màu đỏ; có 4 cách lấy được điểm màu xanh thứ nhất; có 3 cách lấy được điểm màu xanh thứ 2. Trường hợp này có: $6\times 4\times 3=72$ (tam giác).

TH2: Lấy 1 điểm thuộc đường thẳng d_2, lấy 2 điểm thuộc đường thẳng d_1. Có 4 cách lấy được 1 điểm màu xanh; có 6 cách lấy được điểm màu đỏ thứ nhất; có 5 cách lấy được điểm màu đỏ thứ 2. Trường hợp này có: $4\times 6\times 5=120$ (tam giác).

Do đó số phần tử không gian mẫu là:

$$n(\Omega)=72+120=192.$$

Gọi biến cố A: "Lấy được tam giác có hai đỉnh màu đỏ". Do đó số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n(A)=120$.

Xác suất cần tìm là $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{120}{192}=\frac{5}{8}$.

Khi trả bài kiểm tra Hưng thấy thầy giáo không cho điểm bài giải này và còn phê "*Tìm sai lầm trong cách giải*". Hưng hỏi bạn Bình ngồi cạnh Bình cũng có đáp số là $\frac{5}{8}$. Theo bạn, lời giải trên của bạn Hưng sao không có điểm?

NGUYỄN THANH GIANG

(Trường THPT Chuyên Hưng Yên)

Được quét bằng CamScanner

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 584 (2.2026)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142849, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
NGUYỄN TIẾN THANH
Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam
PHẠM VĨNH THÁI
Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD
LÊ HỒNG SƠN

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Phụ trách Tạp chí: TS. LÊ HỒNG MAI — *Thư kí Tòa soạn*: CN. VÕ THỊ HỒNG THU

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOÃN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School

Nguyễn Anh Tuấn – Vận dụng một tính chất về trực tâm của tam giác vào giải toán.

7 Hướng dẫn giải đề thi thử vào lớp 10 THPT chuyên, năm học 2026 – 2027.

12 Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 thành phố Hà Nội, năm học 2025 – 2026.

13 **Diễn đàn dạy học toán**

Dương Đình Dũng – Khai thác giả thiết hình học để giải một số bài toán trong mặt phẳng tọa độ. (*Kỳ 1*).

18 **Bạn đọc tìm tòi**

Vũ Hoàng Thái – Chứng minh một số hằng đẳng thức bằng hình học.

21 **Đề ra kỳ này** *Problems in This Issue*

T1/584, ..., T12/584, L1/584, L2/584.

23 **Giải bài kì trước**
Solutions to Previous Problems

T1/580, ..., T12/580, L1/580, L2/580

33 **Phương pháp giải toán**

Nguyễn Văn Xá – Phương trình bậc ba.

41 **Toán học và đời sống**

Nguyễn Thường Lạng – Bất phương trình bậc hai giúp nhận dạng đầy đủ miền lợi ích thương mại hai nước.

43 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 125 – Bài dịch số 123.

44 **Nhiều cách giải cho một bài toán** – Giải bài toán 104 – Đề bài toán 106.

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay** – Giải bài toán 112. Đề bài toán 114.

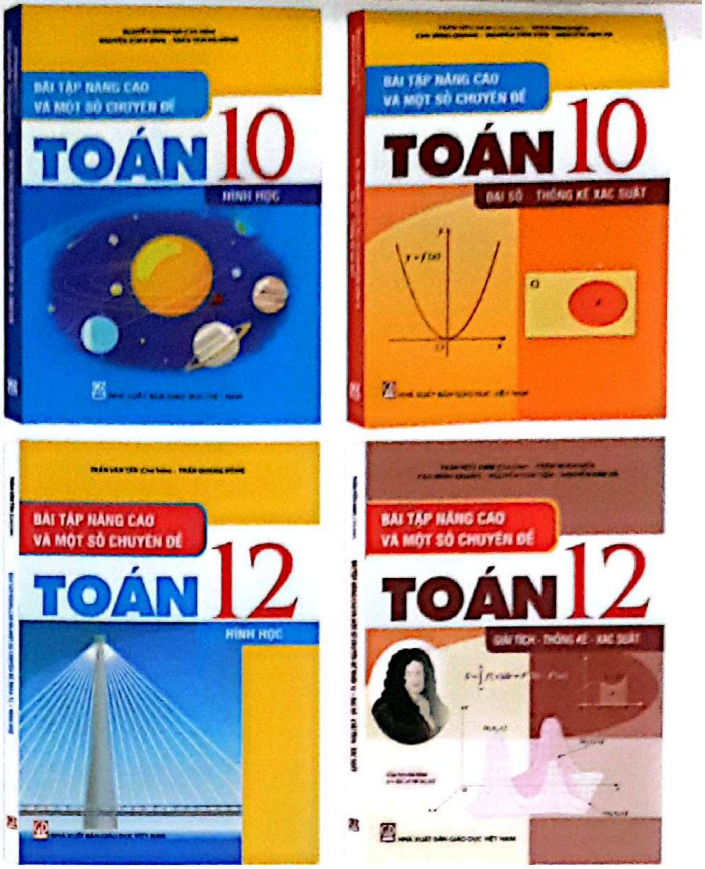
47 **Sai lầm ở đâu?**

Biên tập: KIM THANH, NHƯ HOÀNG
Trị sự, phát hành: TRẦN THỊ MINH HIỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

Được quét bằng CamScanner

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Giới thiệu bộ sách



BÀI TẬP NÂNG CAO VÀ MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ TOÁN

(DÀNH CHO HỌC SINH THPT – THEO CHƯƠNG TRÌNH GDPT 2018)

TÁC GIẢ: TRẦN VĂN TẤN, NGUYỄN MINH HÀ, TRẦN QUANG HÙNG, TRẦN HỮU NAM,...

Bộ sách "Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Toán" gồm các cuốn:

– Bài tập nâng cao và một số chuyên đề - Đại số, Giải tích, Xác suất, Thống kê.

– Bài tập nâng cao và một số chuyên đề - Hình học

Mỗi cuốn sách gồm hai phần:

Phần một gồm các chương, bài bám sát Chương trình giáo dục phổ thông 2018, mỗi bài gồm:

• Tóm tắt kiến thức: tóm tắt những kiến thức trọng tâm của bài, được vận dụng để giải các bài tập, các dạng toán trong bài. Tuỳ theo nội dung từng bài mà ở phần này có thể có thêm phần Kiến thức bổ sung nâng cao liên quan đến chủ đề của bài học.

• Ví dụ minh hoạ: phương pháp giải, các ví dụ giúp học sinh hiểu sâu, rộng hơn những kiến thức đã học, đồng thời có được những kĩ năng cần thiết cho việc giải toán.

• Bài tập đề nghị: bổ sung các bài tập đề nghị cho mỗi dạng toán. Các bài tập được phân loại từ cơ bản đến nâng cao.

Phần hai gồm các Chuyên đề (dành cho học sinh khá, giỏi): các dạng toán thường xuất hiện trong các kì thi vào Đại học&Cao đẳng, trong các kì thi học sinh giỏi và Olympic. Các chuyên đề sẽ giúp học sinh phát triển kiến thức đã học, cung cấp cho học sinh cơ sở của những phương pháp giải toán thường sử dụng.

Sách được biên soạn theo Chương trình Giáo dục phổ thông 2018 để học sinh có thể củng cố kiến thức của mình ngay sau mỗi giờ học trên lớp, đồng thời bổ sung và khắc sâu thêm một số vấn đề lí thuyết nhằm bồi dưỡng học sinh giỏi.

BẠN ĐỌC TÌM MUA SÁCH TẠI

CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

Địa chỉ: Tầng 4, Toà Diamond Flower, số 48 Lê Văn Lương, Q. Thanh Xuân, TP. Hà Nội

Điện thoại: 024.35121533 (số máy lẻ 118) - 0904893398 | **Fax:** 024 35123278

Email: kinhdoanh.heps@gmail.com | **Website:** http://xbgdhn.vn/

Được quét bằng CamScanner

OLYMPIC TOÁN TUỔI THƠ

NƠI EM TỎA SÁNG - CÙNG TOÁN CHINH PHỤC ƯỚC MƠ



Viện Nghiên cứu Sách và Học liệu giáo dục
&VietED phối hợp

Quét để đăng ký

olympictuoitho.vn

1900 099937 | Support@vieted.com

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT2M26
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2026

Giá: 22.000 đồng
Hai mươi hai nghìn đồng

Được quét bằng CamScanner