TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 585
Tháng 3 - 2026
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 63 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com

Chào mừng ngày Quốc tế Phụ nữ 8/3



Được quét bằng CamScanner

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
THAM GIA HỘI CHỢ MÙA XUÂN 2026

Sáng ngày 2/2/2026, Hội chợ Mùa Xuân 2026 với chủ đề *"Kết nối thịnh vượng - Đón xuân huy hoàng"* đã chính thức khai mạc tại Trung tâm triển lãm Việt Nam (Đông Anh - Hà Nội). Sự kiện vinh dự có sự tham dự của Thủ tướng Chính phủ Phạm Minh Chính cùng lãnh đạo các Bộ, ngành Trung ương và địa phương. Trong không gian xúc tiến thương mại quy mô quốc gia, gian trưng bày của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) đã trở thành điểm nhấn văn hóa đặc sắc, gửi gắm thông điệp về sự đồng hành cùng đổi mới giáo dục và khát vọng bồi đắp tri thức cho thế hệ trẻ.



Gian hàng của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam

Giữa không gian sôi động của Hội chợ Mùa Xuân 2026, gian hàng của NXBGDVN thu hút sự quan tâm của bạn đọc bởi mô hình tháp sách - một biểu tượng giàu ý nghĩa, gắn liền với tinh thần của mùa Xuân, mùa của khởi đầu và hy vọng. Tháp sách được tạo nên bằng những cuốn sách xếp chồng lên nhau không chỉ đại diện cho quá trình tích lũy tri thức bền bỉ qua thời gian, mà còn gợi nhắc rằng tri thức chính là nền móng vững chắc để con người và xã hội vươn lên. Hình dáng tháp hướng cao tượng trưng cho khát vọng chinh phục những đỉnh cao mới, cho tinh thần học tập không ngừng, đặc biệt trong bối cảnh tri thức đang trở thành nguồn lực quan trọng nhất của phát triển bền vững.

Không phô trương bằng âm thanh hay sắc màu rực rỡ, gian hàng của NXBGDVN gây ấn tượng bởi chiều sâu tri thức, sự tinh tế trong thiết kế và thông điệp giáo dục được truyền tải một cách lặng lẽ nhưng bền bỉ. Ý nghĩa ấy càng trở nên sâu sắc khi được đặt trong tư tưởng của Chủ tịch Hồ Chí Minh, Người từng viết: *"Một năm khởi đầu từ mùa xuân. Một đời khởi đầu từ tuổi trẻ. Tuổi trẻ là mùa xuân của xã hội"*.

Sản phẩm nổi bật nhất tại gian trưng bày của NXBGDVN là bộ sách giáo khoa Kết nối tri thức với cuộc sống - bộ sách vừa được Bộ Giáo dục và Đào tạo lựa chọn sử dụng thống nhất trên phạm vi cả nước theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018, bắt đầu từ năm học 2026-2027. Việc triển khai đồng bộ một bộ sách giáo khoa trên toàn quốc không chỉ khẳng định chất lượng nội dung, tính khoa học và sư phạm, mà còn cho thấy định hướng nhất quán trong đổi mới giáo dục: đưa tri thức nhà trường gắn chặt hơn với thực tiễn đời sống.

Theo một số khách hàng là giáo viên và phụ huynh tham quan gian hàng, Kết nối tri thức với cuộc sống không chỉ là một bộ sách học tập, mà còn là cách tiếp cận mới trong giáo dục phổ thông, hướng học sinh đến tư duy ứng dụng, năng lực giải quyết vấn đề và khả năng thích ứng với bối cảnh xã hội hiện đại. Việc bộ sách được trưng bày nổi bật tại hội chợ cũng là thông điệp cho thấy giáo dục luôn giữ vai trò trung tâm trong chiến lược phát triển con người và quốc gia.

BAN TRUYỀN THÔNG
(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)

Được quét bằng CamScanner



ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ VIÈTE ĐỂ GIẢI MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

NGUYỄN CÔNG CHUẨN
(GV THPT chuyên Đại học Vinh, Nghệ An)

Trong kì thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh lớp 9, kì thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên và không chuyên những năm gần đây thường xuất hiện bài toán khai thác ứng dụng định lí Viète của phương trình bậc hai. Để giúp các em lớp 9 ôn tập và chuẩn bị tốt cho các kì thi này, bài viết này xin giới thiệu một số dạng toán thường gặp về phương trình bậc hai sử dụng định lí Viète để giải.

Xin nhắc lại kiến thức cơ bản sau:

Số thực x_0 được gọi là nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ nếu $ax_0^2+bx_0+c=0$.

Định lí Viète: Nếu phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$.

Sau đây là một số dạng toán thường gặp:

1. Tính giá trị biểu thức liên quan đến các nghiệm của phương trình bậc hai

1.1. Tính giá trị biểu thức đối xứng của các nghiệm

Bài 1 (Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, năm học 2021-2022, Sở GD&ĐT Nghệ An).

Cho phương trình $x^2-12x+4=0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$.

Lời giải. Theo giả thiết, PT $x^2-12x+4=0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2.

Áp dụng định lí Viète ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=12 \\ x_1x_2=4 \end{cases}$

$\Rightarrow A=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=12^2-2.4=136.$

$B=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^2}$

$=\sqrt{x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}}=\sqrt{12+2\sqrt{4}}=4.$

Do đó: $P=\dfrac{A}{B}=\dfrac{136}{4}=34.$

Bài 2 (Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, năm học 2022-2023, Sở GD&ĐT Nghệ An).

Cho phương trình $x^2+3x-1=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức $T=\dfrac{3|x_1-x_2|}{x_1^2x_2+x_1x_2^2}$.

Lời giải. Theo giả thiết, PT $x^2+3x-1=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Áp dụng định lí Viète ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-3 \\ x_1x_2=-1 \end{cases}$. Suy ra:

$A=3|x_1-x_2|=3\sqrt{(x_1-x_2)^2}=3\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=3\sqrt{(-3)^2-4.(-1)}=3\sqrt{13}.$

$B=x_1^2x_2+x_1x_2^2=x_1x_2(x_1+x_2)=(-1).(-3)=3.$

Vậy $T=\dfrac{A}{B}=\dfrac{3\sqrt{13}}{3}=\sqrt{13}.$

Bài 3. *Cho phương trình $x^2-3x-1=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị các biểu thức:*

$$A=x_1^2+x_2^2;\ B=x_1^3+x_2^3;\ C=x_1^5+x_2^5.$$

Lời giải. Theo giả thiết, PT $x^2-3x-1=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Áp dụng định lí Viète ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1x_2=-1 \end{cases}$. Suy ra:

$A=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3^2-2.(-1)=11.$

$B=x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$

$=3^3-3.(-1).3=36.$

Được quét bằng CamScanner

Do đó: $AB=\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_1^3+x_2^3\right)$

$=x_1^5+x_2^5+x_1^2x_2^3+x_1^3x_2^2=C+x_1^2x_2^2\left(x_1+x_2\right).$

Suy ra: $C=x_1^5+x_2^5=AB-x_1^2x_2^2\left(x_1+x_2\right)$

$=11.36-(-1)^2.3=393.$

Bài 4. (Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, năm học 2025-2026, Sở GD&ĐT Ninh Thuận) *Cho phương trình bậc hai $x^2-x-1=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức*

$$S=\frac{2023}{x_1^7+7}+\frac{2023}{x_2^7+7}.$$

Lời giải. Theo giả thiết PT $x^2-x-1=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2. Áp dụng định lí Viète ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1x_2=-1\end{cases}$. Từ đó suy ra:

$A=x_1^3+x_2^3=\left(x_1+x_2\right)^3-3x_1x_2\left(x_1+x_2\right)$

$=1^3-3.(-1).1=4.$

$B=x_1^4+x_2^4=\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-2x_1^2x_2^2$

$=\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]^2-2x_1^2x_2^2$

$=\left[1^2-2.(-1)\right]^2-2.(-1)^2=7.$

$AB=\left(x_1^3+x_2^3\right)\left(x_1^4+x_2^4\right)=x_1^7+x_2^7+x_1^3x_2^3\left(x_1+x_2\right).$

Suy ra: $x_1^7+x_2^7=AB-x_1^3x_2^3\left(x_1+x_2\right)$

$=4.7-(-1)^3.1=29.$

Vậy: $S=\frac{2023}{x_1^7+7}+\frac{2023}{x_2^7+7}=\frac{2023\left(x_1^7+x_2^7\right)+14.2023}{x_1^7x_2^7+7\left(x_1^7+x_2^7\right)+49}$

$=\frac{2023.29+14.2023}{(-1)^7+7.29+49}=\frac{86989}{251}.$

Bài 5. *Cho phương trình bậc hai $x^2-7x+1=0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1,x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức*

$$A=\frac{1}{\sqrt{x_1^2-6x_1+2}}+\frac{1}{\sqrt{x_2^2-6x_2+2}}.$$

Lời giải. Theo giả thiết, PT bậc hai đã cho có hai nghiệm dương phân biệt x_1,x_2.

Áp dụng định lí Viète ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=7\\x_1x_2=1\end{cases}$.

Do x_1 là nghiệm của PT $x^2-7x+1=0$ nên $x_1^2-7x_1+1=0$ hay $x_1^2-6x_1+2=x_1+1.$

Tương tự ta có: $x_2^2-6x_2+2=x_2+1$. Do đó:

$$A=\frac{1}{\sqrt{x_1+1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2+1}}=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{x_1+1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2+1}}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\frac{2}{\sqrt{\left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right)}}}$$

$$=\sqrt{\frac{x_1+x_2+2}{x_1x_2+x_1+x_2+1}+\frac{2}{\sqrt{x_1x_2+x_1+x_2+1}}}$$

$$=\sqrt{\frac{7+2}{1+7+1}+\frac{2}{\sqrt{1+7+1}}}=\frac{\sqrt{15}}{3}.$$

1.2. Tính giá trị biểu thức không đối xứng của các nghiệm

Với dạng toán này, ta vừa sử dụng định lí Viète, vừa khai thác thêm giả thiết nghiệm của phương trình bậc hai tìm cách biến đổi biểu thức về dạng đối xứng của các nghiệm để tính. Sau đây là một số ví dụ minh hoạ:

Bài 6. *Biết phương trình $x^2-3x+1=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức* $P=\frac{\left|x_1^2-3x_2+1\right|}{x_1\sqrt{x_1}+\sqrt{7x_2-x_1}}.$

Lời giải. Theo giả thiết, PT $x^2-3x+1=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2. Áp dụng định lí Viète ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=3\\x_1x_2=1\end{cases}$. Do x_1 là nghiệm của PT $x^2-3x+1=0$ nên $x_1^2-3x_1+1=0$ hay $x_1^2=3x_1-1$. Từ đó suy ra:

$A=\left|x_1^2-3x_2+1\right|=\left|3x_1-1-3x_2+1\right|=3\left|x_1-x_2\right|$

$=3\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2}=3\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}$

Được quét bằng CamScanner

$= 3\sqrt{3^2-4} = 3\sqrt{5}.$

$B = x_1\sqrt{x_1} + \sqrt{7x_2 - x_1} = \sqrt{x_1^3} + \sqrt{7x_2 - (3 - x_2)}$

$= \sqrt{x_1(3x_1 - 1)} + \sqrt{8x_2 - 3} = \sqrt{3x_1^2 - x_1} + \sqrt{8x_2 - 3}$

$= \sqrt{3(3x_1 - 1) - x_1} + \sqrt{8x_2 - 3} = \sqrt{8x_1 - 3} + \sqrt{8x_2 - 3}.$

Suy ra: $B^2 = 8(x_1 + x_2) - 6 + 2\sqrt{(8x_1 - 3)(8x_2 - 3)}$

$= 8(x_1 + x_2) - 6 + 2\sqrt{64x_1x_2 - 24(x_1 + x_2) + 9}$

$= 8.3 - 6 + 2\sqrt{64.1 - 24.3 + 9} = 20.$

Suy ra $B = 2\sqrt{5}$ (vì $B > 0$). Vậy $P = \dfrac{A}{B} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{3}{2}.$

Bài 7. *Cho phương trình $x^2 + 4x - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức $A = |x_1 - x_2| - x_1(3x_1 + 12)$.*

Lời giải. Do phương trình $x^2 + 4x - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2, áp dụng định lí Viète ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1x_2 = -3 \end{cases}$. Do x_1 là nghiệm của PT bậc hai đã cho nên $x_1^2 + 4x_1 - 3 = 0$ hay $x_1^2 + 4x_1 = 3$.

Suy ra: $A = |x_1 - x_2| - x_1(3x_1 + 12)$

$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2} - 3(x_1^2 + 4x_1)$

$= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} - 3.3$

$= \sqrt{(-4)^2 - 4.(-3)} - 9 = 2\sqrt{7} - 9.$

Bài 8. (Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, năm học 2025-2026, Sở GD&ĐT Nghệ An) *Cho phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$ có hai nghiệm dương x_1, x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{|7x_2 - 3x_1^2|}{x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2}$.*

Lời giải. Do PT $x^2 - 3x + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2, áp dụng định lí Viète ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1x_2 = 1 \end{cases}.$$

Do x_1 là nghiệm của PT $x^2 - 3x + 1 = 0$ nên $x_1^2 - 3x_1 + 1 = 0$ hay $x_1^2 = 3x_1 - 1$. Suy ra:

$A = |7x_2 - 3x_1^2| = |7x_2 - 3(3x_1 - 1)|$

$= |7x_2 - 9x_1 + 3| = |7x_2 + 3 - x_1 - 8x_1|$

$= |8x_2 - 8x_1| = 8\sqrt{(x_1 - x_2)^2}$

$= 8\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = 8\sqrt{3^2 - 4} = 8\sqrt{5}.$

$B = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = 3^2 - 1 = 8.$

Vậy $P = \dfrac{A}{B} = \dfrac{8\sqrt{5}}{8} = \sqrt{5}.$

Bài 9. (Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, năm học 2025-2026, Sở GD&ĐT Hải Dương) *Cho phương trình $2x^2 - 10x + 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1 > x_2$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức $T = \dfrac{\sqrt{24x_1 - 5} + 2x_2 + 2026}{25 - 2x_1 - 8x_2}$.*

Lời giải. Do PT đã cho có hai nghiệm x_1, x_2, áp dụng định lí Viète ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1x_2 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$. Suy ra $x_1 > 0, x_2 > 0$. Do x_1 là nghiệm của PT bậc hai nên $4x_1^2 - 20x_1 + 6 = 0$ hay $4x_1^2 + 4x_1 + 1 = 24x_1 - 5$ hay $(2x_1 + 1)^2 = 24x_1 - 5$.

Suy ra: $A = \sqrt{24x_1 - 5} + 2x_2 + 2026$

$= \sqrt{(2x_1 + 1)^2} + 2x_2 + 2026 = 2(x_1 + x_2) + 2027$

$= 2.5 + 2027 = 2037.$

$B = 25 - 2x_1 - 8x_2 = 5(5 - x_2) - 2x_1 - 3x_2$

$= 5x_1 - 2x_1 - 3x_2 = 3(x_1 - x_2) = 3\sqrt{(x_1 - x_2)^2}$

$= 3\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = 3\sqrt{5^2 - 4.\dfrac{3}{2}} = 3\sqrt{19}.$

Vậy $T = \dfrac{A}{B} = \dfrac{2037}{3\sqrt{19}} = \dfrac{679\sqrt{19}}{19}.$

Bài 10. (Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, năm học 2025-2026, Sở GD&ĐT Nam Định) *Cho phương trình $x^2 + 9x + 2 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt x_1, x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức $M = \sqrt{-13x_1 + 2} - x_2$.*

Được quét bằng CamScanner

Lời giải. Do PT $x^2+9x+2=0$ có hai nghiệm x_1, x_2, áp dụng định lí Viète ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-9 \\ x_1x_2=2 \end{cases}$.

Lại do x_1 là nghiệm của PT bậc hai nên $x_1^2+9x_1+2=0$ hay $x_1^2-4x_1+4=-13x_1+2$ hay $(x_1-2)^2=-13x_1+2$.

Suy ra: $M=\sqrt{-13x_1+2}-x_2=\sqrt{(x_1-2)^2}-x_2$

$=2-(x_1+x_2)=2-(-9)=11.$

1.3. Nhận biết hai số thực cho trước là hai nghiệm của một phương trình bậc hai, sau đó sử dụng định lí Viète để giải quyết yêu cầu bài toán

Bài 11 (Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên, năm học 2025-2026, Sở GD&ĐT Phú Yên). *Biết a và b là các số thực thỏa mãn điều kiện $2a^2+6a+3=0$, $3b^2+6b+2=0$ và $ab\neq 1$. Không tính giá trị a và b, hãy tính giá trị biểu thức*

$$P=\frac{6075b^3}{20ab^2+(ab+1)^3}.$$

Lời giải. Vì số thực a thỏa mãn $2a^2+6a+3=0$ nên a là một nghiệm của PT

$$2x^2+6x+3=0 \quad (1).$$

Vì số thực b thỏa mãn $3b^2+6b+2=0$, suy ra $b\neq 0$. Do đó ta có $2\left(\frac{1}{b}\right)^2+6.\left(\frac{1}{b}\right)+3=0$ hay $\frac{1}{b}$ là một nghiệm của PT(1). Lại do $ab\neq 1$ hay $a\neq\frac{1}{b}$ nên $a, \frac{1}{b}$ là hai nghiệm của PT(1).

Áp dụng định lí Viète ta có: $\begin{cases} a+\frac{1}{b}=-3 \\ a.\frac{1}{b}=\frac{3}{2} \end{cases}$.

Suy ra: $P=\frac{6075b^3}{20ab^2+(ab+1)^3}=\frac{6075}{20.\frac{a}{b}+\left(a+\frac{1}{b}\right)^3}$

$=\frac{6075}{20.\frac{3}{2}+(-3)^3}=2025.$

Bài 12. *Tính giá trị biểu thức*

$$P=\left(2-\sqrt{3}\right)^7+\left(2+\sqrt{3}\right)^7.$$

Lời giải. Đặt $x_1=2-\sqrt{3}$, $x_2=2+\sqrt{3}$.

Ta có $\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1x_2=1 \end{cases}$, suy ra x_1, x_2 là hai nghiệm của PT $x^2-4x+1=0$. Bài toán được phát biểu lại: Cho x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2-4x+1=0$. Hãy tính giá trị biểu thức $P=x_1^7+x_2^7$.

Giải tương tự bài 4, ta được kết quả $P=10084$.

2. Tìm tham số m để các nghiệm của phương trình bậc hai thỏa mãn điều kiện cho trước

2.1. Tìm tham số m để phương trình bậc hai có hai nghiệm thỏa mãn đẳng thức đối xứng của các nghiệm

Bài 13 (Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, năm học 2025-2026, Sở GD&ĐT Tuyên Quang). *Cho phương trình*

$$x^2-(m+1)x+m-4=0 \ (m \text{ là tham số}).$$

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\left(x_1^2-mx_1+m\right)\left(x_2^2-mx_2+m\right)=2.$$

Lời giải. Điều kiện để PT có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là: $\Delta=(m+1)^2-4(m-4)=m^2-2m+17$

$=(m-1)^2+16>0$ đúng với $\forall m$.

Vì x_1 là nghiệm của PT đã cho nên

$$x_1^2-(m+1)x_1+m-4=0$$

hay $x_1^2-mx_1+m=x_1+4.$

Tương tự ta có: $x_2^2-mx_2+m=x_2+4.$

Từ giả thiết bài toán ta được $(x_1+4)(x_2+4)=2$ hay $x_1x_2+4(x_1+x_2)+14=0.$

Theo định lí Viète ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=m+1 \\ x_1x_2=m-4 \end{cases}$.

Suy ra $m-4+4(m+1)+14=0$ hay $5m+14=0.$

Giải phương trình này ta được $m=\frac{-14}{5}$.

Được quét bằng CamScanner

Vậy giá trị cần tìm là $m=\dfrac{-14}{5}$.

Bài 14 (Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, trường PTNK, TP. Hồ Chí Minh, năm học 202-2026, hệ không chuyên). *Tìm m để phương trình $2x^2-2x-m=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $\sqrt{m+2x_1-x_1^2}+\sqrt{m+2x_2-x_2^2}=2$.*

Lời giải. Điều kiện để PT hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 là $\Delta'=1+2m>0$ hay $m>-\dfrac{1}{2}$.

Vì x_1 là nghiệm của PT bậc hai đã cho nên:

$$2x_1^2-2x_1-m=0 \text{ hay } m+2x_1-x_1^2=x_1^2.$$

Tương tự ta có: $m+2x_2-x_2^2=x_2^2$.

Do đó từ giả thiết bài toán ta được:

$$|x_1|+|x_2|=2 \text{ hay } x_1^2+x_2^2+2|x_1x_2|=4$$

$$\text{hay } (x_1+x_2)^2-2x_1x_2+2|x_1x_2|=4.$$

Theo định lí Viète ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=1\\ x_1x_2=\dfrac{-m}{2}\end{cases}$.

Suy ra $1+m+|m|=4$ hay $m+|m|=3$.

Giải phương trình này ta được $m=\dfrac{3}{2}$. Đối chiếu với điều kiện ta được giá trị cần tìm là $m=\dfrac{3}{2}$.

Bài 15. (Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, năm học 2025-2026, Sở GD&ĐT Bình Dương) *Cho phương trình $8x^2-8x+m^2+1=0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn*

$$x_1^4-x_2^4=x_1^3-x_2^3.$$

Lời giải. Điều kiện để PT có hai nghiệm x_1,x_2 là:

$$\Delta'=16-8\left(m^2+1\right)=8\left(1-m^2\right)\ge 0$$

hay $-1\le m\le 1$.

Áp dụng định lí Viète ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=1>0\\ x_1x_2=\dfrac{m^2+1}{8}>0\end{cases}$.

Suy ra $x_1>0,x_2>0$. Giả thiết bài toán được viết lại

$$8\left(x_1^4-x_1^3\right)=8\left(x_2^4-x_2^3\right) \quad (1).$$

Vì x_1 là nghiệm của PT đã cho nên

$$8x_1^2-8x_1+m^2+1=0$$

$$\text{hay } 8\left(x_1^4-x_1^3\right)=-\left(m^2+1\right)x_1^2.$$

Tương tự ta có: $8\left(x_2^4-x_2^3\right)=-\left(m^2+1\right)x_2^2$.

Do đó từ (1) ta được $-\left(m^2+1\right)x_1^2=-\left(m^2+1\right)x_2^2$ hay $x_1^2=x_2^2$ hay $x_1=x_2$. Suy ra $\Delta'=8\left(1-m^2\right)=0$ hay $m=-1$ hoặc $m=1$.

Vậy các trị m cần tìm là $m=-1,m=1$.

2.2. Tìm tham số m để phương trình bậc hai có hai nghiệm thỏa mãn đẳng thức không đối xứng của các nghiệm

Bài 16. *Tìm m để phương trình*

$$x^2-(m+2)x+2m=0$$

có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 sao cho

$$x_1^2+(m+2)x_2=12.$$

Lời giải. Điều kiện để PT có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 là: $\Delta=(m+2)^2-8m=(m-2)^2>0$ hay $m\ne 2$. Vì x_1 là nghiệm của PT đã cho nên:

$$x_1^2-(m+2)x_1+2m=0 \text{ hay } x_1^2=(m+2)x_1-2m.$$

Do đó từ giả thiết bài toán ta được:

$$(m+2)x_1-2m+(m+2)x_2=12$$

$$\text{hay } (m+2)(x_1+x_2)-2m-12=0.$$

Theo định lí Viète ta có: $x_1+x_2=m+2$. Suy ra:

$$(m+2)^2-2m-12=0 \text{ hay } m^2+2m-8=0.$$

Giải PT này ta được $m=2,m=-4$. Đối chiếu với điều kiện bài toán ta được giá trị cần tìm $m=-4$.

Bài 17 (Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, năm học 2025-2026, Sở GD&ĐT Ninh Bình). *Cho phương trình $x^2-6mx+18m-9=0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $\left(x_1^2-4mx_1+18m-6\right)(2mx_2+3)=2m+9$.*

Lời giải. Điều kiện để PT có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 là

Được quét bằng CamScanner

$\Delta' = 9m^2 - 18m + 9 = 9(m-1)^2 > 0$ hay $m \neq 1$.

Vì x_1 là nghiệm của PT đã cho nên

$$x_1^2 - 6mx_1 + 18m - 9 = 0$$

hay $x_1^2 - 4mx_1 + 18m - 6 = 2mx_1 + 3$.

Do đó từ giả thiết bài toán ta được:

$$(2mx_1 + 3)(2mx_2 + 3) = 2m + 9$$

hay $4m^2 x_1 x_2 + 6m(x_1 + x_2) - 2m = 0$.

Theo định lí Viète ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6m \\ x_1 x_2 = 18m - 9 \end{cases}$.

Suy ra: $4m^2(18m - 9) + 36m^2 - 2m = 0$

hay $2m(36m^2 - 1) = 0$.

Giải PT ta được: $m = -\frac{1}{6}$, $m = 0$, $m = \frac{1}{6}$.

Đối chiếu với điều kiện ta được các giá trị cần tìm

$$m = -\frac{1}{6},\ m = 0,\ m = \frac{1}{6}.$$

Bài 18 (Đề minh họa thi tuyển sinh vào lớp 10, trường PTNK, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2025-2026). *Cho phương trình* $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m - 3 = 0$ *(m là tham số). Tìm $m \neq -1$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn*

$$(2x_1 - 1)\left[(m+1)x_2^2 - 2mx_2 + m - 5\right] = 10.$$

Lời giải. Vì $m \neq -1$ nên PT đã cho là PT bậc hai.

Điều kiện để PT có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là

$$\Delta' = (m+2)^2 - (m+1)(m-3) = 6m + 7 > 0$$

hay $m > \frac{-7}{6}$. Vì x_2 là nghiệm của PT đã cho nên

$$(m+1)x_2^2 - 2(m+2)x_2 + m - 3 = 0$$

hay $(m+1)x_2^2 - 2mx_2 + m - 5 = 2(2x_2 - 1)$.

Từ giả thiết bài toán ta được:

$$(2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = 5$$

hay $2x_1 x_2 - (x_1 + x_2) - 2 = 0$.

Theo định lí Viète ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m+2)}{m+1} \\ x_1 x_2 = \dfrac{m-3}{m+1} \end{cases}$.

Suy ra: $\frac{2(m-3)}{m+1} - \frac{2(m+2)}{m+1} - 2 = 0$

hay $\frac{-5}{m+1} - 1 = 0$, suy ra $m = -6$ (không thỏa mãn). Vậy không tìm được giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3. Tìm tham số m để biểu thức liên quan đến các nghiệm của phương trình bậc hai đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Bài 19 (Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, năm học 2025-2026, Sở GD&ĐT Cao Bằng). *Cho phương trình $x^2 - mx - 3 = 0$ (với m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $H = \dfrac{2(x_1 + x_2) + 5}{x_2^2 + mx_1 - x_1 x_2}$ đạt giá trị lớn nhất.*

Lời giải. Điều kiện để PT có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là $\Delta' = m^2 + 12 > 0$ đúng với mọi m.

Vì x_2 là nghiệm của PT $x^2 - mx - 3 = 0$ nên

$$x_2^2 - mx_2 - 3 = 0 \text{ hay } x_2^2 = mx_2 + 3.$$

Do đó biểu thức H được viết lại là:

$$H = \frac{2(x_1 + x_2) + 5}{m(x_1 + x_2) - x_1 x_2 + 3}.$$

Theo định lí Viète ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -3 \end{cases}$.

Suy ra: $H = \frac{2m+5}{m^2+6} = 1 - \frac{m^2 - 2m + 1}{m^2 + 6}$

$$= 1 - \frac{(m-1)^2}{m^2 + 6} \leq 1,\ \forall m.$$

Dấu bằng xảy ra khi $m = 1$.

Vậy H đạt giá trị lớn nhất khi $m = 1$.

Bài 20. *Cho phương trình $x^2 - (m+2)x - 1 = 0$ (với m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $P = \left|x_2^2 - mx_2 - 2x_1 - 1\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.*

Lời giải. Điều kiện để PT có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là $\Delta' = (m+2)^2 + 4 > 0$, đúng với mọi m.

Vì x_2 là nghiệm của PT đã cho nên

Được quét bằng CamScanner

$x_2^2-(m+2)x_2-1=0$ hay $x_2^2-mx_2=2x_2+1$.

Do đó biểu thức P được viết lại là

$$P=|2x_2+1-2x_1-1|=2|x_2-x_1|$$
$$=2\sqrt{(x_2-x_1)^2}=2\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}.$$

Theo định lí Viète ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=m+2\\x_1x_2=-1\end{cases}$.

Suy ra $P=2\sqrt{(m+2)^2+4}\ge 4, \forall m$.

Dấu bằng xảy ra khi $m=-2$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất khi $m=-2$.

Bài 21. *Tìm điều kiện của m để phương trình $5x^2-2x-m=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 sao cho biểu thức*

$$T=\sqrt{m+2x_1-x_1^2}+\sqrt{m+2x_2-x_2^2}$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải. Điều kiện để PT có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 là $\Delta'=1+5m>0$ hay $m>-\frac{1}{5}$.

Vì x_1 là nghiệm của PT đã cho nên

$5x_1^2-2x_1-m=0$ hay $m+2x_1-x_1^2=4x_1^2$.

Tương tự ta có: $m+2x_2-x_2^2=4x_2^2$.

Do đó biểu thức T được viết lại là:

$$T=2|x_1|+2|x_2|=2(|x_1|+|x_2|)$$
$$=2\sqrt{(|x_1|+|x_2|)^2}=2\sqrt{x_1^2+x_2^2+2|x_1x_2|}$$
$$=2\sqrt{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+2|x_1x_2|}.$$

Theo định lí Viète ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{2}{5}\\x_1x_2=-\frac{m}{5}\end{cases}$.

Suy ra $T=2\sqrt{\frac{4}{25}+\frac{2}{5}(|m|+m)}$

$$\ge 2\sqrt{\frac{4}{25}+\frac{2}{5}(-m+m)}=\frac{4}{5}, \forall m.$$

Dấu bằng xảy ra khi $m\le 0$. Kết hợp với điều kiện, suy ra T đạt giá trị nhỏ nhất khi $-\frac{1}{5}<m\le 0$.

4. Một số bài tập tự luyện

Bài 1. Cho phương trình $x^2+2x-1=0$ có hai nghiệm x_1,x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức $M=\left(\frac{x_1^3}{x_2^4}+\frac{x_2^3}{x_1^4}\right)^2$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh lớp 9, năm học 2024-2025, Sở GD&ĐT Vĩnh Long)

Bài 2. Biết phương trình bậc hai $x^2+8x-6=0$ có hai nghiệm x_1,x_2. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn $\frac{70-mx_1^2}{x_2}=x_1+mx_2$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, năm học 2025-2026, Sở GD&ĐT Hà Nội)

Bài 3. Cho phương trình $x^2-5x+3=0$ có hai nghiệm x_1,x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức $M=\frac{5x_1+3}{x_2}-\frac{2x_2^2-5}{x_1}$.

Bài 4. Cho phương trình $x^2-x-1=0$ có hai nghiệm x_1,x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức $P=\left(\frac{x_1-1}{x_1}+\frac{1}{x_2+1}\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, năm học 2024-2025, Sở GD&ĐT Nghệ An)

Bài 5. Cho phương trình $x^2-4x+2=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 và $x_1>x_2$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức $M=\frac{x_1^2+3x_2}{x_1^3+14x_2+3}$.

Bài 6. Cho phương trình $2x^2+5x-2=0$ có hai nghiệm x_1,x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức $A=\left||x_1-2|-\sqrt{x_2+1}\right|$.

Bài 7. Cho phương trình $x^2-6x+3=0$ có hai nghiệm x_1,x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức $A=\frac{\sqrt{x_1+1}+\sqrt{x_2+1}}{x_1^2+6x_2-5}$.

Bài 8. Cho phương trình $x^2-7x+2=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức

$$T=\sqrt{x_1^2+2x_1+1}+\sqrt{2x_2^2-x_2+11}.$$

Được quét bằng CamScanner

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, năm học 2025-2026, Sở GD&ĐT Hà Nam)

Bài 9. Cho phương trình $x^2-5x+2=0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức

$$A=\sqrt{16x_1^2+8x_1x_2+5x_2-2}+3x_2.$$

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, năm học 2025-2026, Sở GD&ĐT Lào Cai)

Bài 10. Cho phương trình $x^2-3x+1=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{2}{x_2-1}+\dfrac{x_2}{x_1-1}$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, năm học 2025-2026, Sở GD&ĐT Huế)

Bài 11. Cho $m>4$. Chứng minh rằng phương trình $x^2-mx+4=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^5x_2+4\left(mx_2-4\right)^2=4m^4-64m^2+128$.

Bài 12. Cho phương trình

$x^2-2(m-1)x+2m-5=0$ (với m là tham số).

a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho

$$\left(x_2^2-2mx_2+2m\right)\left(2x_1-5\right)=2024.$$

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định, năm học 2024-2025, vòng 1)

Bài 13. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $x^2-2mx-4m-5=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1^2-2(m-1)x_1+2x_2-4m=5+2x_1x_2.$$

Bài 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y=x+m$ (với m là tham số) và parabol $(P): y=2x^2$. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn

$$\left(2x_1^2-x_2-m\right)^2+\left(2x_2^2-x_1-m\right)^2=4.$$

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên, năm học 2025-2026, Sở GD&ĐT Hưng Yên)

Bài 15. Tìm m để cho phương trình

$$2x^2+2mx+m^2-2=0$$

có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $A=\left|2x_1x_2+x_1+x_2-4\right|$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 16. Cho phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thuộc đoạn $[0;2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{8a^2-6ab+b^2}{4a^2-2ab+ac}$.

Bài 17. Cho p là số tự nhiên khác 0. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2+5px-1=0$; x_3, x_4 là hai nghiệm của phương trình

$$x^2+4px-1=0.$$

Chứng minh rằng tích

$$\left(x_1-x_3\right)\left(x_2-x_3\right)\left(x_1+x_4\right)\left(x_2+x_4\right)$$

là một số chính phương.

Bài 18. Biết a, b là hai nghiệm thực của phương trình $x^2-4x+c=0$ và $-a$ là một nghiệm của phương trình $11x^2-x+2c=0$ với c là số thực khác không. Tính giá trị biểu thức

$$a^{2025}+b^{2025}+c^{2025}.$$

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên, năm học 2025-2026, Sở GD&ĐT TP. Hồ Chí Minh)

Bài 19. Tìm tất cả các giá trị m nguyên để phương trình

$x^2-2(m-3)x+m^2-4m-6=0$ (m là tham số)

có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $P=\dfrac{x_1^2+x_2^2-4}{x_1+x_2}$ nhận giá trị nguyên.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ, năm học 2025-2026)

Bài 20. Biết a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2+px+1=0$; c, d là hai nghiệm của phương trình $x^2+qx+2=0$. Chứng minh rằng

$$(b-c)(b-a)=pq-6.$$

Được quét bằng CamScanner

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THÀNH PHỐ HÀ NỘI

Năm học 2025-2026

Bài I. 1) *Giải phương trình* $x+4\sqrt{5-x}=9$.

2) *Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau thỏa mãn:* $(a^2+1)(b+c)=(b^2+1)(c+a)=-10$. *Tính giá trị của biểu thức:*

$$P=(a+b)(b+c)(c+a).$$

HD-Lời giải.

1) Điều kiện xác định: $x\le 5$. Khi đó:

$x+4\sqrt{5-x}=9\Leftrightarrow 9-x=4\sqrt{5-x}$

$\Leftrightarrow (9-x)^2=(4\sqrt{5-x})^2$

$\Leftrightarrow x^2-18x+81=80-16x$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0$. Suy ra $x=1$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1$.

2) Biến đổi được: $(a-b)(ab+bc+ca-1)=0$.

Vì $a\ne b$ nên $ab+bc+ca=1$. Do đó:

$P=(a+b)(a+c)(b+c)=(a^2+1)(b+c)=-10$.

Bài II. 1) *Một tiệm bánh ngọt dự định sản xuất hai loại bánh cho một đơn hàng. Lượng đường cần cho mỗi chiếc bánh loại I và loại II lần lượt là 40 g và 60 g. Lợi nhuận thu được khi bán mỗi chiếc bánh loại I và loại II lần lượt là 12 nghìn đồng và 15 nghìn đồng. Biết rằng tiệm chỉ còn 14 kg đường để làm bánh và tiệm phải làm ít nhất 80 chiếc bánh loại I và 100 chiếc bánh loại II. Hỏi tiệm nên làm bao nhiêu chiếc bánh mỗi loại để lợi nhuận thu được là lớn nhất?*

2) *Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^2-6b^2=1$ và $a^2+4ab+4b^2=11c+1$. Chứng minh c chia hết cho 40.*

HDG.

1) Gọi x và y lần lượt là số bánh loại I và loại II cần làm $(x\in\mathbb{N}, y\in\mathbb{N})$.

Lợi nhuận: $P=12x+15y$ (nghìn đồng).

Theo đề bài ta có: $x\ge 80; y\ge 100$ và $40x+60y\le 14000$ hay $2x+3y\le 700$.

Ta có $P=6(2x+3y)-3y\le 6.700-3.100=3900$.

Giá trị lớn nhất của P là 3900 nghìn đồng, đạt được khi $x=200; y=100$.

Vậy tiệm bánh nên làm 200 chiếc bánh loại I và 100 chiếc bánh loại II để lợi nhuận thu được là lớn nhất.

2) ***Nhận xét.*** Một số chính phương khi chia cho 5, cho 8 chỉ nhận một trong các số dư 0, 1, 4.

Vì $a^2=1+6b^2$ nên a^2 là số chính phương lẻ, suy ra a^2 chia 8 dư 1.

Dẫn đến b là số chẵn nên $(a^2+4ab+4b^2-1)\vdots 8$, từ đó $c\vdots 8$.

Vì $a^2-6b^2=1$, xét số dư của a^2 và b^2 khi chia cho 5, ta chỉ có hai trường hợp:

Trường hợp 1: $a\vdots 5$ và b^2 chia 5 dư 4.

Khi đó $(a^2+4ab+4b^2-1)\vdots 5$, nên $c\vdots 5$.

Trường hợp 2: $b\vdots 5$ và a^2 chia 5 dư 1.

Tương tự trường hợp 1, suy ra $c\vdots 5$.

Vậy $c\vdots 40$.

Bài III. *Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P=\frac{a(1-b)}{3-a}+\frac{b(1-c)}{3-b}+\frac{c(1-a)}{3-c}.$$

HDG. • Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P.

Từ giả thiết suy ra: $0\le a\le 1; 0\le b\le 1; 0\le c\le 1$.

Được quét bằng CamScanner

Ta có: $3-a\ge 2\Rightarrow \dfrac{a(1-b)}{3-a}\le \dfrac{1}{2}a(1-b)$.

Tương tự:

$$\dfrac{b(1-c)}{3-b}\le \dfrac{1}{2}b(1-c);\ \dfrac{c(1-a)}{3-c}\le \dfrac{1}{2}c(1-a).$$

Suy ra: $P\le \dfrac{1}{2}a(1-b)+\dfrac{1}{2}b(1-c)+\dfrac{1}{2}c(1-a)$

$$=\dfrac{1}{2}(a+b+c-ab-bc-ca)\le \dfrac{1}{2}.1=\dfrac{1}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{1}{2}$ khi $(a;b;c)=(1;0;0)$ và các hoán vị.

• Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

Ta có: $64a-(3-a)(27a-1)=27a^2-18a+3$

$$=3(3a-1)^2\ge 0\Rightarrow \dfrac{a}{3-a}\ge \dfrac{27a-1}{64}.$$

Tương tự, ta có: $\dfrac{b}{3-b}\ge \dfrac{27b-1}{64};\dfrac{c}{3-c}\ge \dfrac{27c-1}{64}$.

Từ đó $P\ge \dfrac{1}{64}\big[(27a-1)(1-b)+(27b-1)(1-c)$

$$+(27c-1)(1-a)\big].$$

Mà $ab+bc+ca\le \dfrac{1}{3}(a+b+c)^2=\dfrac{1}{3}$, do đó:

$$P\ge \dfrac{1}{64}\cdot(25-9)=\dfrac{1}{4}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{1}{4}$ khi:

$$a=b=c=\dfrac{1}{3}.$$

Bài IV. *Cho tam giác nhọn ABC ($AB<AC$), các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại điểm H.*

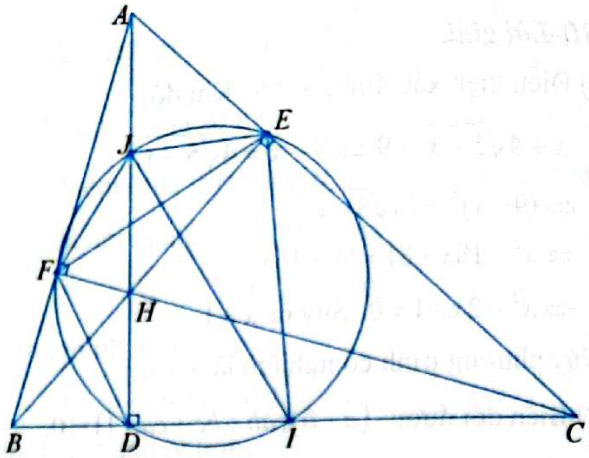
1) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh bốn điểm D, F, E, I cùng thuộc một đường tròn.

2) Đường thẳng DF cắt đường thẳng BH tại điểm K. Gọi L là điểm đối xứng với điểm K qua điểm H. Gọi P là giao điểm của đường thẳng IE và đường thẳng CH. Chứng minh đường thẳng LP song song với đường thẳng HI.

3) Đường thẳng qua điểm B và vuông góc với AB cắt đường trung trực của đoạn thẳng BE tại điểm G. Gọi Q là điểm đối xứng với điểm D qua điểm H. Chứng minh $\widehat{EQL}=\widehat{EGC}$.

HDG.

1) Chứng minh bốn điểm D,F,E,I cùng thuộc một đường tròn.



Gọi J là trung điểm của đoạn AH. Chứng minh được $JE\perp EI$. Suy ra E thuộc đường tròn đường kính IJ.

Tương tự, chỉ ra F thuộc đường tròn đường kính IJ.

Từ $AD\perp BC$, chỉ ra D thuộc đường tròn đường kính IJ.

Do đó các điểm D,F,E,I cùng thuộc đường tròn đường kính IJ.

2) Chứng minh LP song song HI.

Chỉ ra $\widehat{EFH}=\widehat{CBH}=\widehat{CFD}\Rightarrow FC$ là tia phân giác của $\widehat{EFD}\Rightarrow \dfrac{FK}{FE}=\dfrac{HK}{HE}=\dfrac{HL}{HE}$.

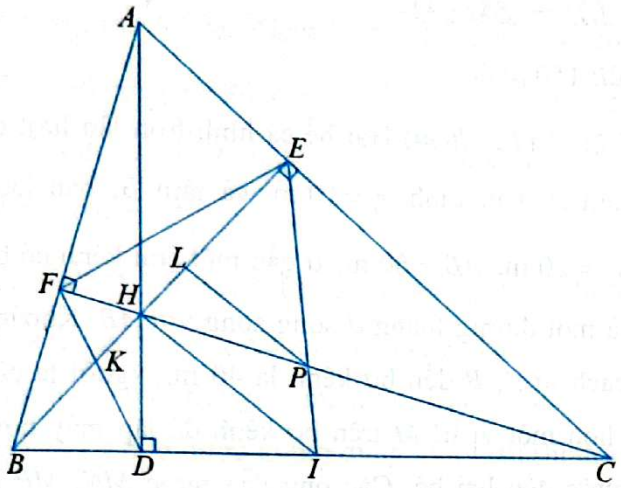
Chỉ ra $\widehat{EFD}=2\widehat{CBH}=\widehat{CIE}$.

Chỉ ra $\widehat{FEH}=\widehat{BCH}\Rightarrow \Delta EFK\backsim\Delta CIP$

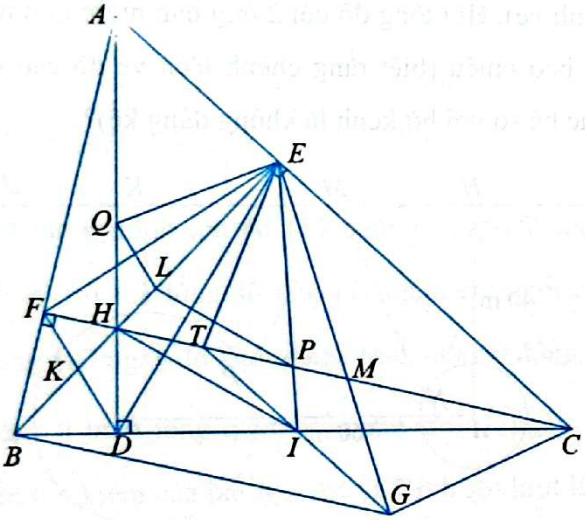
$\Rightarrow \dfrac{IP}{IC}=\dfrac{FK}{FE}$.

Được quét bằng CamScanner

Do đó: $\frac{HL}{HE}=\frac{FK}{FE}=\frac{IP}{IC}=\frac{IP}{IE}\Rightarrow LP\,//\,HI.$



3) Chứng minh $\widehat{EQL}=\widehat{EGC}$.



Gọi IG cắt CH tại T. Chỉ ra $TC=GB=GE$, từ đó suy ra $ECGT$ là hình thang cân.

Chỉ ra $\widehat{EGC}=\widehat{ETC}$.

Ta có: $\widehat{PTI}=\widehat{IGB}=\widehat{FBH}=\widehat{KDH}$;

$\widehat{PIT}=\widehat{BIT}=90^\circ-\widehat{IBE}=\widehat{BHD}$

$\Rightarrow \Delta PTI\backsim\Delta KDH\Rightarrow\frac{PT}{PI}=\frac{KD}{KH}.$

Mà $\frac{EP}{PI}=\frac{EL}{HL}=\frac{EL}{KH}\Rightarrow\frac{EP}{PT}=\frac{EL}{KD}.$

$QLDK$ là hình bình hành $\Rightarrow QL=KD$

$\Rightarrow\frac{EP}{PT}=\frac{EL}{QL}.$

Mà $\widehat{TPI}=\widehat{DKH}\Rightarrow\widehat{EPT}=\widehat{FKH}\Rightarrow\widehat{EPT}=\widehat{ELQ}$

$\Rightarrow\Delta EPT\backsim\Delta ELQ.$

Từ đó suy ra $\widehat{EQL}=\widehat{EGC}$.

Bài V. 1) *Tìm tất cả số nguyên tố p, q để $pq+p+4$ và $pq+q+4$ đồng thời là các số chính phương.*

2) *Hai bạn An và Bình cùng nhau tiết kiệm tiền để ủng hộ người nghèo. Biết rằng hai bạn bắt đầu tiết kiệm vào cùng một ngày. Sau 365 ngày, mỗi bạn đều tiết kiệm được một triệu đồng. Chứng minh trong 365 ngày nói trên, tồn tại 183 ngày mà tổng số tiền tiết kiệm của mỗi bạn trong 183 ngày đó không nhỏ hơn 500000 đồng.*

Lời giải.

1) Do vai trò của p,q như nhau nên ta giả sử $p\ge q$. Đặt $pq+p+4=a^2\left(a\in\mathbb{N}^*\right).$

$\Rightarrow p(q+1)=a^2-4=(a-2)(a+2)$

$\Rightarrow (a-2)\vdots p$ hoặc $(a+2)\vdots p.$

Trường hợp 1: $(a-2)\vdots p\Rightarrow a-2=kp(k\in\mathbb{N}^*)$

$\Rightarrow a+2=\frac{q+1}{k}=kp+4\Rightarrow q>p$ (loại).

Trường hợp 2: $(a+2)\vdots p\Rightarrow a+2=kp(k\in\mathbb{N}^*)$

$\Rightarrow a-2=\frac{q+1}{k}=kp-4\Rightarrow q=k^2p-4k-1.$

Mà $k^2p-4k-1=q\le p$

$\Rightarrow 4k+1\ge p(k^2-1)\ge 2(k^2-1)$

$\Rightarrow 2k^2-4k-3\le 0\Rightarrow k\le 2.$

• Nếu $k=1$ thì $q=p-5\Rightarrow(p;q)=(7;2)$

$\Rightarrow pq+q+4=20$ (loại).

Nếu $k=2$ thì $q=4p-9.$

Vì $q\le p\Rightarrow 3p\le 9\Rightarrow p\le 3\Rightarrow(p;q)=(3;3).$

Kết luận: $p=q=3.$

(Xem tiếp trang 13)

Được quét bằng CamScanner

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 TỈNH THANH HÓA

Năm học 2025 - 2026

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1 (*2,0 điểm*) Rút gọn biểu thức:

$$M=\left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8}+\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}\right):\left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}+\frac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5}\right)$$

với $x\geq 0; x\neq 1,3,4$.

Bài 2 (*2,0 điểm*) Cho đa thức $P(x)=x^3+6x^2+ax+b$ với a, b là các số hữu tỉ thỏa mãn $P(1-\sqrt{3})=0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$Q=17.P(3)+12.P(2)+2025(a+b+35)^{2026}+54.$$

Câu 3 (*2,0 điểm*) Giải hệ phương trình:

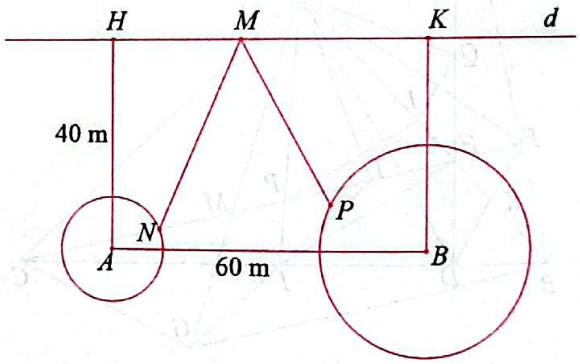
$$\begin{cases} y\sqrt{x-2}+y^2=x-1 \\ 3y\sqrt{x-2}-2\sqrt{(x-2)(2y-1)}=x-2y \end{cases}.$$

Câu 4 (*2,0 điểm*) Gọi X là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số phân biệt được lập từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của X. Tính xác suất để phần tử đó là một số nhỏ hơn 45000.

Câu 5 (*2,0 điểm*) Chứng minh rằng nếu các số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $ab^2+b=(a+1)c^2+c$ thì $ab+ac+1$ là số chính phương.

Câu 6 (*1,5 điểm*) Ba xe ô tô cùng xuất phát từ địa điểm A đến địa điểm B. Mỗi giờ, xe thứ nhất đi được nhiều hơn xe thứ hai 15 km, nhiều hơn xe thứ ba 5 km. Biết rằng xe thứ hai đến B chậm hơn xe thứ nhất 28 phút, chậm hơn xe thứ ba 20 phút. Tìm tốc độ từng xe (xem như tốc độ từng xe là không đổi trong suất hành trình).

Câu 7 (*1,5 điểm*) Hai bể cá hình tròn lần lượt có tâm A, bán kính $r_1=10$ m và tâm B, bán kính $r_2=20$ m, $AB=60$ m, ở gần một con kênh có bờ là một đường thẳng d song song với AB. Khoảng cách từ A, B đến bờ kênh là 40 m. Người ta cần chọn một vị trí M trên bờ kênh để lắp máy bơm nước đến hai bể. Các ống dẫn nước MN, MP là các đoạn thẳng nối từ M đến mép bể (tham khảo hình vẽ). Hỏi tổng độ dài 2 ống dẫn nước nhỏ nhất là bao nhiêu (biết rằng chênh lệch về độ cao của các bể so với bờ kênh là không đáng kể)?



Câu 8 (*4,0 điểm*) Hình vuông $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo, K là trung điểm của OB. Đường tròn tâm D bán kính DA và đường tròn đường kính AB cắt nhau tại điểm E khác A. Tia EO cắt AD tại M, cắt tia CD tại F.

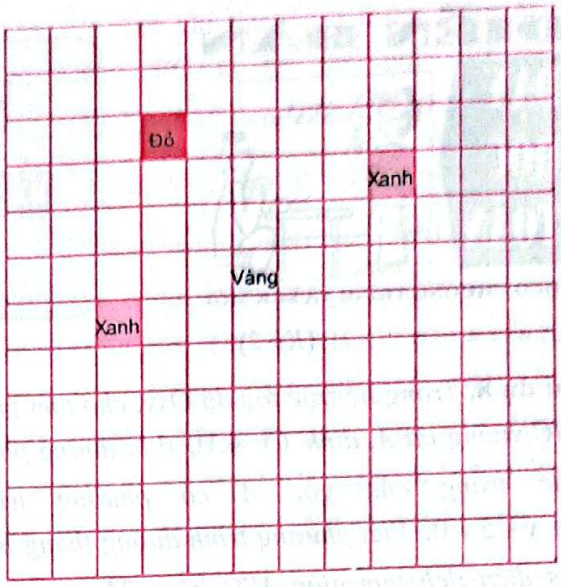
a) Chứng minh: Hai tam giác DEO và DBE đồng dạng và điểm F thuộc đường tròn tâm D bán kính DA.

b) Chứng minh: $OA.AB=AK.AE$ và tính tỉ số $\frac{OE}{ME}$.

Được quét bằng CamScanner

Câu 9 (*1,5 điểm*) Cho hình chữ nhật $ABCD$, có $AB = 60$ cm, $BC = 70$ cm. Trên cạnh AB lấy điểm E, trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $AE = 20$ cm, $BF = 30$ cm. Các điểm H, G lần lượt di động trên các cạnh AD, CD. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $EH + HG + GF$.

Câu 10 (*1,5 điểm*) Một lưới ô vuông kích thước 12×12, gồm 144 ô vuông nhỏ bằng nhau. Tô màu mỗi ô bởi một trong ba màu: đỏ, vàng, xanh tuỳ ý sao cho mỗi ô được tô bởi đúng một màu (hình vẽ minh họa). Chứng minh rằng tồn tại ít nhất bốn ô được tô cùng màu nằm ở bốn góc của hình chữ nhật.



HÀ VĂN NHÂN

(GV THCS Hoằng Xuân, Hoằng Hoá, Thanh Hóa)

Giới thiệu

****

HƯỚNG DẪN GIẢI . . . *(Xem tiếp trang 11)*

2) Chứng minh tồn tại 183 ngày (trong 365 ngày tiết kiệm) mà tổng số tiền tiết kiệm của mỗi bạn trong 183 ngày đó không nhỏ hơn 500000 đồng.

Xét bài toán tổng quát: Nếu sau $2n+1$ ngày, số tiền tiết kiệm của hai bạn An và Bình lần lượt là A và B thì tồn tại $n+1$ ngày mà tổng số tiền tiết kiệm của hai bạn An và Bình trong $n+1$ ngày đó lần lượt không nhỏ hơn $\frac{A}{2}$ và $\frac{B}{2}$.

Ta chứng minh khẳng định trên bằng phương pháp quy nạp:

Chứng minh khẳng định đúng với $n = 1$.

Giả sử khẳng định trên đúng đến $n = k\,(k \geq 1)$. Ta chứng minh khẳng định cũng đúng với $n = k+1$.

Gọi số tiền tiết kiệm của hai bạn ở ngày thứ i $(1 \leq i \leq 2k+3)$ lần lượt là a_i và b_i.

Có thể giả sử số tiền tiết kiệm của bạn An tăng dần theo ngày, tức là $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_{2k+3}$.

Trường hợp 1: Nếu số tiền tiết kiệm của Bình là giảm dần theo ngày, tức là

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots \geq b_{2k+3},$$

thì ta chọn $k+2$ ngày: ngày thứ 1, ngày thứ 3, …, ngày thứ $2k+3$.

Trường hợp 2: Tồn tại ngày thứ u, v $(u < v)$ sao cho số tiền của Bình tương ứng là $b_u < b_v$. Xét $2k+1$ ngày còn lại (không tính ngày thứ u và v). Theo giả thiết quy nạp, chọn được k ngày thỏa mãn đề bài. Sau đó bổ sung ngày thứ v vào k ngày này ta được $k+1$ ngày cần tìm.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG

(GV THCS Giảng Võ 2, TP. Hà Nội)

Giới thiệu

Được quét bằng CamScanner

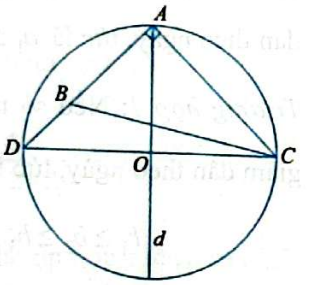
KHAI THÁC GIẢ THIẾT HÌNH HỌC ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN TRONG MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

DƯƠNG ĐÌNH DŨNG
(GV THPT Triệu Sơn 4, Thanh Hoá)

(Kỳ 2)

Thí dụ 8. *Trong hệ trục toạ độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, đỉnh C(−4;1), d là đường phân giác trong của góc A có phương trình $x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và toạ độ đỉnh A có hoành độ dương.*

Lời giải. Gọi D là điểm đối xứng với điểm C qua đường thẳng d, tìm được $D(4;9)$. Gọi A là giao điểm của đường thẳng d và đường tròn đường kính CD, có hoành độ dương nên ta tìm được $A(4;1)$. Cạnh AB đi qua A và D nên có phương trình $x-4=0$.



Ta có:

$AC=8;$

$AB=\dfrac{2.S_{\Delta ABC}}{AC}=6.$

Gọi $B(4;y)$, từ $AB=6$ ta tìm được $B(4;7)$ hoặc $B(4;-5)$. Do d là đường phân giác trong của góc A nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ cùng hướng. Suy ra $B(4;7)$.

Thí dụ 9. *Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) tâm I có hoành độ dương. Đường tròn (C) đi qua điểm $A(-2;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d_1: x+y+4=0$ tại điểm B. Đường tròn (C) cắt đường thẳng $(d_2): 3x+4y-16=0$ tại hai điểm C và D sao cho tứ giác ABCD là hình thang có hai đáy là AD và BC, hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau. Tìm toạ độ các điểm B, C, D.*

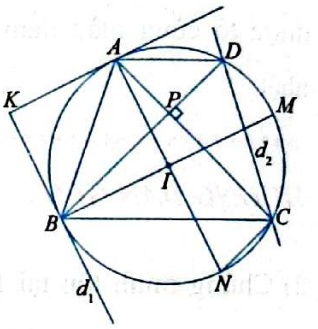
Lời giải. Do hình thang $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm I nên $ABCD$ là hình thang cân. Mặt khác, $AC\perp BD$ tại P nên ΔPBC vuông cân tại P, do đó $\widehat{ACB}=45^\circ$ suy ra $\widehat{AIB}=90^\circ$ hay $AI\ //\ d_1$.

Đường tròn tâm I có bán kính:

$$R=AK=d\left(A,d_1\right)=\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Đường thẳng AI có phương trình $x+y-1=0$, đặt $I(a;1-a)$. Theo giả thiết ta có:

$$AI=\frac{5}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{1}{2}\\ a=-\dfrac{9}{2}\end{array}\right.$$



Do I có hoành độ dương nên $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Vậy phương trình đường tròn tâm I là:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}.$$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{25}{2}\\ 3x+4y-16=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=4\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=4\\ y=1\end{cases}$.

Vì B là hình chiếu của I lên đường thẳng d_1 nên $B(-2;-2)$ và do $AD\ //\ BC$ nên $C(4;1)$, $D(0;4)$.

Nhận xét. Mấu chốt bài toán là chứng minh được $AI\ //\ d_1$ bằng cách sử dụng tính chất hình thang nội tiếp, mối quan hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung. Khi đó, ta dễ dàng suy ra bán kính đường tròn tâm I và bài toán được giải quyết.

Được quét bằng CamScanner

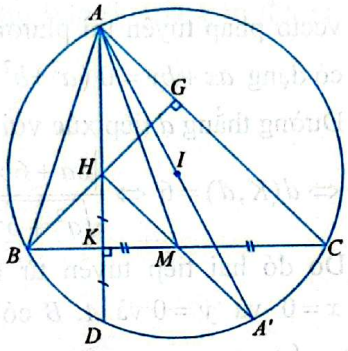
Thí dụ 10. *Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác nhọn ABC. Đường thẳng chứa trung tuyến kẻ từ A và đường thẳng BC lần lượt có phương trình là* $3x+5y-8=0$ *và* $x-y-4=0$. *Đường thẳng qua A vuông góc với BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là* $D(4;-2)$. *Viết phương trình các đường thẳng AB, AC biết rằng hoành độ của điểm B không lớn hơn 3.*

Phân tích: Từ giả thiết $\Rightarrow$ phương trình đường thẳng AH $\Rightarrow$ điểm A và điểm $K=AH\cap BC$ là trung điểm đoạn HD $\Rightarrow$ điểm H $\Rightarrow$ điểm A' đối xứng với điểm H qua điểm M là trung điểm đoạn thẳng BC $(M=AM\cap BC)$ và AA' là đường kính $\Rightarrow$ tâm I $\Rightarrow$ đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC. Khi đó, đường tròn (C) cắt BC tại B, C $\Rightarrow$ phương trình đường thẳng AB, AC.

Lời giải. Gọi M là trung điểm cạnh BC.

Đường thẳng AH đi qua D và vuông với cạnh BC nên có phương trình

$$x+y-2=0.$$



Ta có:

$AH\cap AM=A(1;1)$,

$AH\cap BC=K(3;-1)$.

Theo kết quả iii) thì K là trung điểm của đoạn thẳng HD nên $H(2;0)$, $AM\cap BC=M\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng BC.

Gọi điểm A' đối xứng với điểm A qua điểm M nên $A'(5;-1)$ và AA' là đường kính của đường tròn (C) (theo kết quả i)). Suy ra tâm $I(3;0)$ và bán kính $R=IA=\sqrt{5}$, vậy đường tròn (C) có phương trình là $(x-3)^2+y^2=5$.

Do đường tròn (C) cắt đường thẳng BC tại hai điểm B, C và hoành độ điểm B không lớn hơn 3 nên $B(2;-2)$, $C(5;1)$.

Vậy phương trình đường thẳng AB là $3x+y-4=0$ và đường thẳng AC là $y-1=0$.

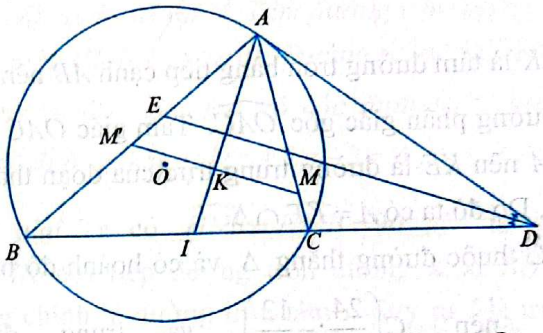
Nhận xét. Sau khi tìm được trung điểm M của đoạn thẳng BC ta có thể gọi $B(b;b-4)$, $C(7-b;3-b)$ và sử dụng điều kiện:

$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow b=2\,(b\le 3)\Rightarrow B(2;-2)$, $C(5;1)$

$\Rightarrow AB$: $3x+y-4=0$ và AC: $y-1=0$.

Thí dụ 11. *Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy cho tam giác ABC có* $A(1;4)$, *tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt BC tại D, đường phân giác trong của góc ADB có phương trình* $x-y+2=0$, *điểm* $M(-4;1)$ *thuộc cạnh AC. Viết phương trình đường thẳng AB.*

Lời giải. Gọi AI là phân giác trong của $\widehat{BAC}$.



Ta có: $\widehat{AID}=\widehat{ABC}+\widehat{BAI}$; $\widehat{IAD}=\widehat{CAD}+\widehat{CAI}$.

Mà $\widehat{BAI}=\widehat{CAI}$, $\widehat{ABC}=\widehat{CAD}$ nên $\widehat{AID}=\widehat{IAD}$.

Suy ra ΔDAI cân tại D nên $DE\perp AI$. Vậy phương trình đường thẳng AI là $x+y-5=0$.

Gọi M' là điểm đối xứng của điểm M qua đường thẳng AI, khi đó phương trình đường thẳng MM' là $x-y+5=0$.

Gọi $K=AI\cap MM'$ nên $K(0;5)$ và $M'(4;9)$.

Vậy phương trình đường thẳng AB đi qua A và M' là $5x-3y+7=0$.

Nhận xét. Mấu chốt của bài toán này là chứng minh $DE\perp AI$ bằng cách chứng minh tam giác ADI cân tại D có DE là đường phân phân giác góc ADI.

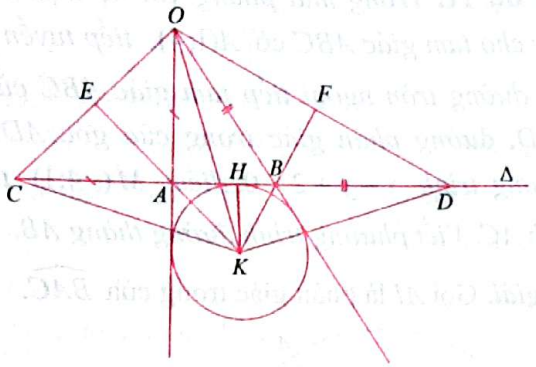
Thí dụ 12. *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác OAB có các đỉnh A và B thuộc đường thẳng* $\Delta: 4x+3y-12=0$ *và điểm* $K(6;6)$ *là tâm đường tròn bàng tiếp góc O. Gọi C là điểm nằm trên* Δ *sao cho* $AC=AO$ *và các điểm C, B nằm*

Được quét bằng CamScanner

khác phía nhau so với điểm A. Biết điểm C có hoành độ bằng $\frac{24}{5}$, tìm toạ độ các đỉnh A, B.

Lời giải. Cách 1. Trên Δ lấy điểm D sao cho $BO = DO$ và D, A nằm khác phía so với B.

Gọi $E = AK \cap OC$, $F = BK \cap OD$.



Do K là tâm đường tròn bàng tiếp cạnh AB nên KE là đường phân giác góc $\widehat{OAC}$. Tam giác OAC cân tại A nên KE là đường trung trực của đoạn thẳng OC. Do đó ta có $A = KE \cap \Delta$.

Vì C thuộc đường thẳng Δ và có hoành độ bằng $\frac{24}{5}$ nên $C\left(\frac{24}{5};-\frac{12}{5}\right)$ và trung điểm $E\left(\frac{12}{5};-\frac{6}{5}\right)$.

Do đó CO có phương trình là $x+2y=0$, suy ra đường thẳng KE có phương trình là $2x-y-6=0$.

Do vậy $KE \cap \Delta = A(3;0)$.

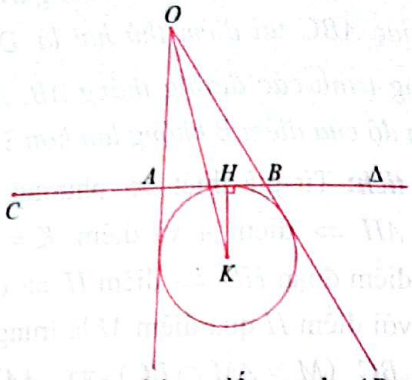
Tương tự ta có KF là đường trung trực của đoạn OD, do vậy tam giác KOD cân tại K.

Hạ $KH \perp CD$ thì H là trung điểm đoạn CD. KH qua K và vuông góc với Δ nên đường thẳng KH có phương trình là $3x-4y+6=0$ và:

$KH \cap \Delta = H\left(\frac{6}{5};\frac{12}{5}\right)$ nên suy ra $D\left(-\frac{12}{5};\frac{36}{5}\right)$.

Suy ra trung điểm của đoạn thẳng OD là $F\left(-\frac{6}{5};\frac{18}{5}\right)$ và đường thẳng OD có phương trình là $3x+y=0$, suy ra đường thẳng KF có phương trình $x-3y+12=0$. Do vậy $KF \cap \Delta = B(0;4)$.

Cách 2. Vì $C \in \Delta$ và có hoành độ bằng $\frac{24}{5}$ nên $C\left(\frac{24}{5};-\frac{12}{5}\right)$.



Do (K) là đường tròn bàng tiếp cạnh AB nên có bán kính $R = d(K, AB) = 6$.

Do OA, OB tiếp xúc với (K) nênOA, OB là các tiếp tuyến với (K) kẻ từ O.

Gọi d là đường thẳng qua O và nhận $\vec{n}(a;b)$ là vectơ pháp tuyến thì phương trình đường thẳng d có dạng $ax+by=0$ $(a^2+b^2>0)$. Khi đó:

Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (K)

$$\Leftrightarrow d(K,d)=6 \Leftrightarrow \frac{|6a+6b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=6 \Leftrightarrow ab=0.$$

Do đó hai tiếp tuyến từ O có phương trình là $x=0$ và $y=0$ và A, B có toạ độ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 4x+3y-12=0 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x;y)=(0;4) \\ (x;y)=(3;0) \end{array}\right.$.

Giả sử ta chọn $A(3;0)$ và $B(0;4)$ thì $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ nên C, B nằm khác phía so với A. Vậy $A(3;0)$ và $B(0;4)$. Ngoài ra ta còn có thể làm theo cách sau:

Tìm được $C\left(\frac{24}{5};-\frac{12}{5}\right)$ và gọi $A(-3t;4t+4)$ là điểm thuộc AB và vì $AC=AO$ nên $t=-1$ hay $A(3;0)$. Để tìm B ta làm như cách 1.

Lời bình. Đây là một bài khá hay, cái hay thể hiện ở chỗ đã khai thác một khái niệm tương đối ít gặp đối với học sinh, đó là đường tròn bàng tiếp của tam giác. Khái niệm này đã được học ở cấp THCS trong sách giáo khoa *Kết nối tri thức với cuộc*

Được quét bằng CamScanner

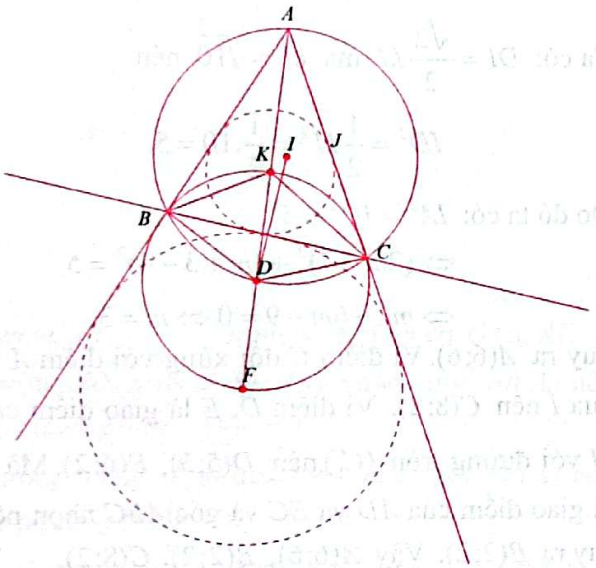
sống nhưng có rất ít bài tập về phần này, nhất là phần bài tập trong mặt phẳng toạ độ.

Một ý hay của bài này là bài toán có thể tiếp cận theo các hướng khác nhau, đó là xem ba cạnh là ba tiếp tuyến của đường tròn để khai thác điều kiện đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (theo cách 2).

Để khắc sâu hơn khía cạnh này ta xét ví dụ sau:

Thí dụ 13. *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(3;5)$ và ngoại tiếp đường tròn tâm $K(1;4)$. Đường tròn bàng tiếp cạnh BC có tâm là $F(11;14)$. Viết phương trình đường thẳng BC và đường cao đi qua đỉnh A của tam giác ABC.*

Lời giải. Ta có F là giao điểm của đường phân giác trong góc A với các đường phân giác ngoài của các góc B và C, suy ra $BK \perp BF$, $CK \perp CF$, do đó tứ giác $BKCF$ nội tiếp đường tròn đường kính FK.



Giả sử $AK \cap (I) = D$ khi đó ta có:

$$\widehat{CKD} = \widehat{CAD} + \widehat{ACK} = \widehat{BCD} + \widehat{BCK} = \widehat{KCD}.$$

Suy ra ΔKCD cân tại D nên $DK = DC = DB$, suy ra D là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBKC và cũng là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BKFC$.

Do đó D là trung điểm của đoạn FK nên $D(6;9)$.

Ta có $ID = 5$ suy ra phương trình đường tròn (C_1) có tâm I là $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$.

Mặt khác $DK^2 = 50$ nên phương trình đường tròn (C_2) có tâm D, ngoại tiếp tứ giác $BKCF$ là:

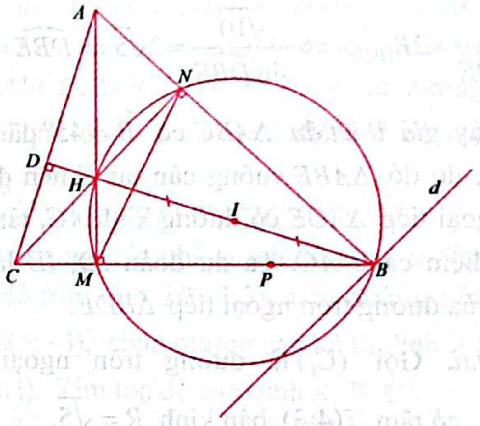
$$(x-6)^2 + (y-9)^2 = 50.$$

Do (C_1) cắt (C_2) tại B, C nên có phương trình đường thẳng BC là $3x + 4y - 29 = 0$.

Nhận xét. Mấu chốt của bài toán là chứng minh được D là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác $BKCF$, muốn vậy phải chứng minh ΔKCD cân tại D để có D là trung điểm FK và tính $R_1 = ID$, $R_2 = DK$.

Thí dụ 14. *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC nhọn có đỉnh $A(-1;4)$ và trực tâm H. Đường thẳng AH cắt cạnh BC tại M. Đường thẳng CH cắt cạnh AB tại N. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN là $I(2;0)$. Đường thẳng BC đi qua điểm $P(1;-2)$. Tìm toạ độ các đỉnh B, C biết B thuộc đường thẳng $d: x + 2y - 2 = 0$.*

Lời giải. Ta có $\widehat{HNB} = \widehat{HMB} = 90°$ nên tứ giác $BMHN$ nội tiếp đường tròn đường kính BH và cũng chính là đường tròn tâm I. Suy ra I là trung điểm đoạn BH. Gọi $B(2-2b;b) \in d$ thì $H(2b+2;-b)$.



Ta có: $\overrightarrow{AH} = (2b+3;-b-4)$; $\overrightarrow{BP} = (2b-1;-b-2)$.

Do $AH \perp BC$ nên ta có:

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow (2b+3)(2b-1) + (b+4)(b+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b+1)^2 = 0 \Leftrightarrow b = -1.$$

Suy ra toạ độ các điểm $B(4;-1)$ và $H(0;1)$.

Vì đường thẳng BC đi qua B và P nên có phương trình là $x - 3y - 7 = 0$.

Được quét bằng CamScanner

Vì đường thẳng AC đi qua A và vuông với BH nên có phương trình là $2x-y+6=0$, do đó $C(-5;-4)$. Vậy toạ độ các điểm cần tìm là $B(4;-1)$, $C(-5;-4)$.

Nhận xét. Mấu chốt của bài toán này là chỉ ra được điểm I là trung điểm đoạn BH. Bằng việc khai thác tính chất mỗi tam giác có duy nhất 1 đường tròn ngoại tiếp nên xác định được tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BMHN$ và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN trùng nhau.

Thí dụ 15. *Cho tam giác nhọn ABC, lấy điểm E thuộc cạnh BC sao cho ΔABE cân tại E. Đường tròn ngoại tiếp ΔACE cắt AB tại D. Tìm toạ độ các đỉnh của ΔABC biết đường tròn ngoại tiếp ΔBDE có phương trình $(x-4)^2+(y-3)^2=5$, trung điểm của cạnh AC là điểm I thuộc đường thẳng d có phương trình $x-y-3=0$ và điểm I có hoành độ lớn hơn 4. Biết điểm A thuộc đường thẳng $d': y=0,5x+3$ và $DE=\sqrt{10}$.*

Phân tích. Giả thiết toạ độ cho phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔBDE và $DE=\sqrt{10}$.

Mà ta biết trong tam giác ΔBDE có:

$$\frac{DE}{\sin\widehat{DBE}}=2R_{(BDE)}\Rightarrow\frac{\sqrt{10}}{\sin\widehat{DBE}}=2\sqrt{5}\Rightarrow\widehat{DBE}=45°.$$

Như vậy *giả thiết ẩn* ΔABC có $\hat{B}=45°$ đã được làm rõ, do đó ΔABE vuông cân tại E nên đường tròn ngoại tiếp ΔACE có đường kính AC, tâm I là trung điểm cạnh AC. Ta dự đoán ID, IE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔBDE.

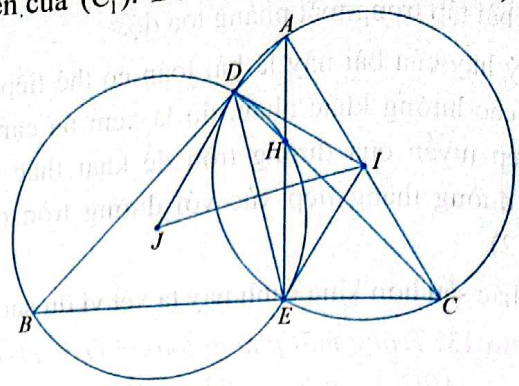
Lời giải. Gọi (C_1) là đường tròn ngoại tiếp ΔBDE, có tâm $J(4;3)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

Mặt khác tứ giác $ADEC$ nội tiếp đường tròn (C_2) có tâm I nên

$$\widehat{IDE}=\widehat{IDC}+\widehat{CDE}=\widehat{ICD}+\widehat{EAC}=\widehat{ICD}+\widehat{EAC}$$
$$=90°-\widehat{BAC}+90°-\widehat{BCA}=\widehat{ABC}=45°.$$

Suy ra ID là tiếp tuyến của đường tròn (C_1) ngoại tiếp ΔBDE.

Tương tự ta cũng có $\widehat{DEI}=\widehat{ABC}$ nên IE là tiếp tuyến của (C_1). Do $I\in d$ nên gọi $I(a;a-3)$.



Ta có: $2S_{\Delta DIJ}=IJ.\frac{DE}{2}=DI.DJ$

$$\Rightarrow DI=\frac{IJ.DE}{2DJ}=\frac{IJ.\sqrt{10}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}IJ.$$

Tam giác DIJ vuông tại D nên ta có:

$$IJ^2=DI^2+DJ^2=\frac{1}{2}IJ^2+5\Rightarrow IJ=\sqrt{10}$$

$\Rightarrow(a-4)^2+(a-3-3)^2=10\Rightarrow a=3$ hoặc $a=7$.

Do I có hoành độ lớn hơn 4 nên $I(7;4)$. Do $A\in d'$ nên đặt $A(2m;m+3)$.

Ta có: $DI=\frac{\sqrt{2}}{2}IJ$ mà $IJ=\sqrt{10}$ nên

$$ID^2=\frac{1}{2}IJ^2=\frac{1}{2}.10=5.$$

Do đó ta có: $IA^2=ID^2=5$

$$\Leftrightarrow(2m-7)^2+(m+3-4)^2=5$$
$$\Leftrightarrow m^2-6m+9=0\Leftrightarrow m=3.$$

Suy ra $A(6;6)$. Vì điểm C đối xứng với điểm A đi qua I nên $C(8;2)$. Vì điểm D, E là giao điểm của IJ với đường tròn (C_1) nên $D(5;5)$, $E(6;2)$. Mà B là giao điểm của AD và EC và góc ABC nhọn nên suy ra $B(2;2)$. Vậy $A(6;6)$, $B(2;2)$, $C(8;2)$.

Thí dụ 16. *Cho tam giác ABC có góc A không tù, H là chân đường cao kẻ từ A xuống cạnh BC. Tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABH và tam giác ACH lần lượt là $I(4;4)$ và $J(5;1)$. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác ABC, biết trực tâm của tam giác AIJ là $K(4;2)$.*

Lời giải. Trong ΔIJA đã biết $I(4;4)$, $J(5;1)$ và trực tâm $K(4;2)$ nên tìm được điểm $A(1;1)$.

Được quét bằng CamScanner

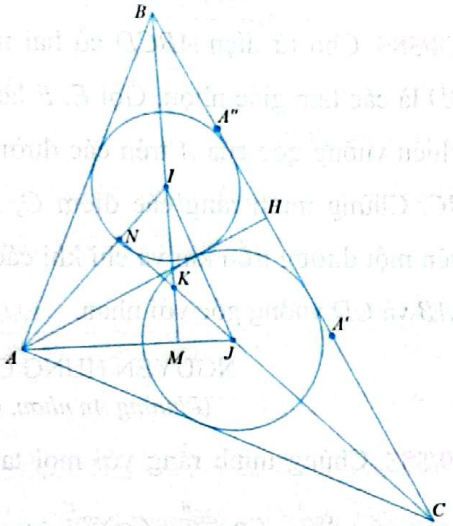
Từ đó tính được $\widehat{JAI}=45^\circ$ nên $\widehat{BAC}=90^\circ$ (do AI, AJ lần lượt là phân giác của $\widehat{HAB}$ và $\widehat{HAC}$) hay tam giác ABC vuông tại A.

Như vậy *giả thiết ẩn* trong bài toán là tam giác ABC vuông tại A đã được tìm ra. Bây giờ chỉ cần chứng minh $BI\perp AJ$ và $CJ\perp AI$. Thật vậy, ta có: $\widehat{ABM}+\widehat{BAM}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}+90^\circ-\widehat{MAC}$

$$=\frac{1}{2}\widehat{ABC}+90^\circ-\frac{1}{2}\widehat{HAC}$$

$$=\frac{1}{2}\widehat{ABC}+90^\circ-\frac{1}{2}\left(90^\circ-\widehat{ACB}\right)$$

$$=45^\circ+\frac{1}{2}\left(\widehat{ABC}+\widehat{ACB}\right)=90^\circ.$$



Suy ra $BI\perp AJ$. Tương tự ta cũng có $CJ\perp AI$.

Đường thẳng IB đi qua I và vuông góc với AJ nên có phương trình $x-4=0$.

Đường thẳng JC đi qua J và vuông góc với AI nên có phương trình $x+y-6=0$.

Gọi A', A'' là các điểm đối xứng của A lần lượt qua BI và CJ. Khi đó $A'(7;1)$; $A''(5;5)$ đều thuộc đường thẳng BC nên BC có phương trình $2x+y-15=0$. Tìm giao điểm của IB và BC ta được $B(4;7)$; giao điểm của CJ và BC ta có $C(9;-3)$.

Vậy ta tìm được $A(1;1)$, $B(4;7)$ và $C(9;-3)$.

Nhận xét. Qua các thí dụ trên, ta nhận thấy khi giải các bài toán trong mặt phẳng toạ độ cần có kĩ năng khai thác các giả thiết về toạ độ để làm rõ các giả thiết hình học ẩn bên trong. Điều này giúp ta vẽ hình, đoán nhận tính chất hình học, từ đó giải được các bài toán trong mặt phẳng toạ độ.

3. Bài tập rèn luyện

Bài 1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình thang cân $ABCD$ với hai đáy AD, BC. Biết $B(2;3)$ và $AB=AC$, đường thẳng AC có phương trình $x-y-1=0$, điểm $M(-2;-1)$ nằm trên đường thẳng AD. Viết phương trình đường thẳng CD.

Đáp số: Phương trình đường thẳng CD là $9x+13y-97=0$.

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$, điểm $M(5;7)$ nằm trên cạnh BC. Đường tròn đường kính AM cắt BC tại B và cắt BD tại $N(6;2)$, đỉnh C thuộc đường thẳng d: $2x-y-7=0$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết hoành độ đỉnh C nguyên và hoành độ đỉnh A bé hơn 2.

Đáp số: $A(1;1)$; $C(7;7)$; $B(7;1)$; $D(1;7)$.

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có phương trình đường thẳng AD là $x-2y+3=0$. Trên đường thẳng qua B và vuông góc với đường chéo AC lấy điểm E sao cho $BE=AC$ (D và E nằm về hai phía so với đường thẳng AC). Xác định toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$, biết điểm $E(2;-5)$ và đường thẳng AB đi qua điểm $F(4;4)$ và điểm B có hoành độ dương.

Đáp số: A(1;2), B(2;0), C(6;2), D(5;4).

Bài 4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H(-1;3)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(3;-3)$, chân đường cao kẻ từ đỉnh A là điểm $K(-1;1)$. Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C.

Đáp số: $A(-1;-5)$; $B(1;1)$; $C(5;1)$ hoặc $A(-1;-5)$; $B(5;1)$; $C(1;1)$.

Bài 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $A(1;5)$ và điểm $C\in d: x+3y+7=0$. Gọi M là điểm nằm trên tia đối của tia BC, N là hình chiếu của điểm B lên đường thẳng MD. Biết $N\left(\frac{-5}{2};\frac{1}{2}\right)$. Tìm toạ độ điểm C.

Được quét bằng CamScanner



CÁC LỚP THCS

Bài T1/585 (Lớp 6). Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho tất cả 21 phân số sau đây đều tối giản

$$\frac{2}{n^3+3}, \frac{3}{n^3+5}, \frac{4}{n^3+7}, \ldots, \frac{21}{n^3+41}, \frac{22}{n^3+43}.$$

NGUYỄN TẤN NGỌC

(GV THCS Bình Định, phường Bình Định, Gia Lai)

Bài T2/585 (Lớp 7). Tìm các số tự nhiên $\overline{abc}$ (có ba chữ số) sao cho thỏa mãn $\sqrt{\overline{abc}} = \sqrt{\overline{cba}} + 9$.

HUỲNH THANH TÂM

(CB Bưu điện phường Bình Định, Gia Lai)

Bài T3/585. Cho các số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca = 2024c^2$ và $a-b$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng $180c+1$ là số chính phương.

ĐOÀN CÁT NHƠN

(GV THCS Bình Định, phường Bình Định, Gia Lai)

Bài T4/585. Cho hình lục giác lồi $ABCDEF$ bất kỳ. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của ccác cạnh AB, CD, EF. Chứng minh rằng trọng tâm của tam giác MNP là trung điểm của đoạn thẳng nối trọng tâm của hai tam giác ABC và DEF.

TRẦN VĂN HẠNH

(GV Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

Bài T5/585. Cho đa thức $P(x)$ hệ số nguyên, có tổng tất cả các hệ số bằng 1 và thỏa mãn $P(-x) = -P(x)$ với mọi số thực x. Tìm tất cả các số nguyên n thỏa mãn $P(n^{1996}+n^3)+P(n^{29}) = n^{2025}$.

PHAN QUANG LINH

(GV THCS Giảng Võ, Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/585. Gọi

$$S = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{1}{2025^2}+\frac{1}{2026^2}}.$$

Tìm phần nguyên của S.

NGUYỄN ĐỨC TƯỜNG

(Pleiku)

Bài T7/585. Tìm tất cả các số tự nhiên a, b, c sao cho $\sqrt{a+2\sqrt{3}} + \sqrt{b+4\sqrt{3}} = \sqrt{c+12\sqrt{3}}$.

PHAN QUANG ĐẠT

(GV THPT chuyên Thái Nguyên)

Bài T8/585. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác nhọn. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng BD, BC. Chứng minh rằng các điểm C, D, E, F nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi các đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau.

NGUYỄN HÙNG CƯỜNG

(Phường An nhơn, Gia Lai)

Bài T9/585. Chúng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có: $\left(\frac{A}{2}\right)^{\cos\frac{A}{2}} + \left(\frac{B}{2}\right)^{\cos\frac{B}{2}} + \left(\frac{C}{2}\right)^{\cos\frac{C}{2}} \le \left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$.

TRẦN NAM HẢI

(GV Đại học Bách khoa TP. Hồ Chí Minh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/585. Cho dãy số (u_n) xác định như sau

$$\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 2\sqrt{5} \\ u_{n+2} = 2\sqrt{5}u_{n+1} - 4u_n, n = 0,1,\ldots \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng phương trình

$$u_{2019}x^4 - u_{2019}x^2 - 5u_{2020}x + 2020 = 0$$

có ít nhất hai nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;2\sqrt{5})$.

Được quét bằng CamScanner

b) Tìm tất cả các số thực α sao cho dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = C_n^0 u_n + \sum_{k=1}^{n} \alpha^k C_n^k u_{n-k}, \forall n = 0,1,2,...$ có giới hạn hữu hạn.

BÙI VĂN PHÚC
(GV THPT chuyên Hà Giang)

Bài T11/585. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ biết

$$f(x+1) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Chứng minh rằng $\int_0^1 \frac{f\left(x+\frac{1}{2}\right)}{f(x)} dx \geq 1$.

b) Xác định tất cả các số α sao cho

$$\int_0^1 \frac{f(x+\alpha)}{f(x)} dx \geq 1.$$

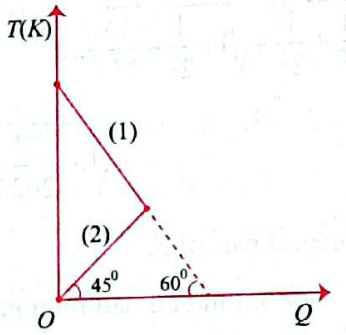
ĐÀO CHÍ THANH
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T12/585. Cho tam giác ABC và điểm M bất kỳ trong mặt phẳng. Chứng minh rằng:

$$\frac{MA^2}{BC^2} + \frac{MB^2}{CA^2} + \frac{MC^2}{AB^2} \geq \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{(MA + MB + MC)^2}.$$

NGUYỄN VĂN QUÝ (*Hà Nội*)

Bài L1/585. Hai vật (1) và (2) có cùng khối lượng cho tiếp xúc và trao đổi nhiệt với nhau. Hình dưới là đồ thị biểu diễn sự thay đổi nhiệt độ của từng vật theo nhiệt lượng mà hai vật trao đổi cho nhau. Biết nhiệt độ tại giao điểm của hai đồ thị là 100 °C. Nhiệt độ ban đầu của vật (1) bằng bao nhiêu °C? (*Kết quả làm tròn đến chữ số hàng đơn vị*).



VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/585. Dòng điện xoay chiều chạy qua một đoạn mạch có biểu thức: $i = 2\cos(100\pi t)$, với i có đơn vị (A) và t có đơn vị (s). Xác định điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn đoạn mạch trong thờ gian $\frac{1}{4}$ chu kì tính từ thời điểm ban đầu theo đơn vị (mC). (*Kết quả làm tròn đến hàng phần mười*).

THANH LÂM (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/585 (Grade 6). Find the smallest positive integer n such that all of 21 following fractions are simplified fractions

$$\frac{2}{n^3+3}, \frac{3}{n^3+5}, \frac{4}{n^3+7}, ..., \frac{21}{n^3+41}, \frac{22}{n^3+43}.$$

Problem T2/585. Find the three-digit number $\overline{abc}$ such that $\sqrt{\overline{abc}} = \sqrt{\overline{cba}} + 9$.

Problem T3/585 (Grade 7). Given natural numbers a, b, c such that $ab+bc+ca=2024c^2$ and $a-b$ are prime number. Prove that $180c+1$ is a perfect square.

Problem T4/585. Given any convex hexagon $ABCDEF$. Let M, N, P be the midpoints of the sides AB, CD, EF respectively. Prove that the centroid of triangle MNP is the midpoint of the line segment connecting the centroids of triangles ABC and DEF.

Problem T5/585. Given a polynomial $P(x)$ with integer coefficients, whose sum of all coefficients equals to 1 and satisfies

Được quét bằng CamScanner

$P(-x)=-P(x)$ for all real numbers x. Find all integers n that satisfy

$$P\left(n^{1996}+n^3\right)+P\left(n^{29}\right)=n^{2025}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/585. Let

$$S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2025^2}+\frac{1}{2026^2}}.$$

Find the integral part of S.

Problem T7/585. Find all natural numbers a, b, c such that

$$\sqrt{a+2\sqrt{3}}+\sqrt{b+4\sqrt{3}}=\sqrt{c+12\sqrt{3}}.$$

Problem T8/585. Given a tetrahedron $ABCD$ where the faces ABC and ABD are acute triangles. Let E and F be the orthogonal projections of A onto the lines BD and BC, respectively. Prove that points C, D, E, and F lie on a circle if and only if the lines AB and CD are perpendicular to each other.

Problem T9/585. Prove that for any triangle ABC, we have:

$$\left(\frac{A}{2}\right)^{\cos\frac{A}{2}}+\left(\frac{B}{2}\right)^{\cos\frac{B}{2}}+\left(\frac{C}{2}\right)^{\cos\frac{C}{2}}\le\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/585. Given the sequence (u_n) determined as follows

$$\begin{cases} u_0=2, u_1=2\sqrt{5} \\ u_{n+2}=2\sqrt{5}u_{n+1}-4u_n, n=0,1,\ldots \end{cases}$$

a) Prove that the equation

$$u_{2019}x^4-u_{2019}x^2-5u_{2020}x+2020=0$$

has at least two distinct real solutions inside the interval $\left(0;2\sqrt{5}\right)$.

b) Find all real numbers α such that the sequence (v_n) defined by

$$v_n=C_n^0u_n+\sum_{k=1}^{n}\alpha^kC_n^ku_{n-k}, \forall n=0,1,2,\ldots$$

has a finite limit.

Problem T11/585. Given the function $f(x)$ which is continuous on $\mathbb{R}$ and satisfies

$$f(x+1)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}, f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}.$$

a) Prove that $\int_0^1\frac{f\left(x+\frac{1}{2}\right)}{f(x)}dx\ge1$.

b) Determine all numbers α such that

$$\int_0^1\frac{f(x+\alpha)}{f(x)}dx\ge1.$$

Problem T12/585. Given triangle ABC and any point M in the plane. Prove that

$$\frac{MA^2}{BC^2}+\frac{MB^2}{CA^2}+\frac{MC^2}{AB^2}\ge\frac{BC^2+CA^2+AB^2}{(MA+MB+MC)^2}.$$

****

THÔNG BÁO

Bạn đọc có thể đặt mua các ấn phẩm của Tạp chí Toán học và Văn học trong nhà trường tại các bưu cục của VNPT trên cả nước với mã đặt như sau: *Toán học và Tuổi trẻ* (C168); *Toán Tuổi thơ 1* (C169); *Toán Tuổi thơ 2* (C169.1); *Văn học và Tuổi trẻ* (C668); *Văn Tuổi thơ* (C668.1).

****

Được quét bằng CamScanner



Bài T1/581. *Tìm ba chữ số cuối cùng của số* $A = 2003^{2004}$.

Lời giải. *Chú ý*: Với a, b, c, e là các số nguyên dương thì $(1000a + b)(1000c + e)$

$= 1000^2 ac + 1000ae + 1000cb + be$

$= 1000d + be$,

trong đó $d = 1000ac + ae + cb$ là số nguyên.

Sử dụng *Chú ý* trên ta thấy:

$A = 2003^{2004} = (2000 + 3)^{2004} = 1000g + 3^{2004}$

với g là số nguyên. Từ đó ba chữ số cuối cùng của số $A = 2003^{2004}$ chính là ba chữ số cuối cùng của số 3^{2004}. Dễ thấy $3^2 = 9$; $3^4 = 81$ và ba chữ số cuối cùng của các số 3^8; 3^{10}; 3^{20}; 3^{40}; 3^{80}; 3^{100} theo thứ tự là 561; 049; 401; 801; 601; 001.

Từ $3^{100} = 1000k + 1$ với k là số nguyên, sử dụng *Chú ý* trên có: $3^{2000} = (3^{100})^{20} = (1000k + 1)^{20}$

$= 1000h + 1$ với h là số nguyên.

Từ đó có: $3^{2004} = 3^{2000}.3^4 = (1000h + 1).3^4$

$= 1000r + 81$ với r là số nguyên.

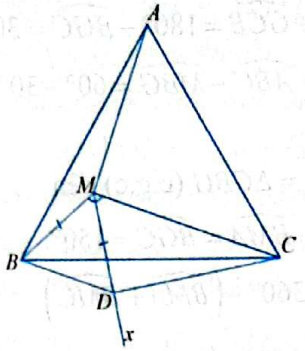
Vậy ba chữ số cuối cùng của số $A = 2003^{2004}$ là 081.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng. **Hà Nội**: *Phạm Quốc Vinh*, 6C2B, THCS Archimedes Academy, Yên Hòa; **Nghệ An**: *Hồ Thảo Linh*, 6A, *Trương Đình Quốc Anh*, 7E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Đà Nẵng**: *Lê Văn Minh*, 6/12, THCS Lương Thế Vinh, Hòa Khánh; **Quảng Ngãi**: *Bùi Quỳnh Nhã Trúc*, 6A, THCS Nghĩa Mỹ, Vệ Giang; *Trần Phạm Minh Thúy*, 6B, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; *Phạm Thị Bảo Uyên*, 6B, THCS Phạm Văn Đồng; *Trần Văn Phụng*, *Trần Gia Bảo*, 6C, THCS Nguyễn Kim Vang, Đình Cương.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/581. *Cho tam giác đều ABC. Bên trong tam giác ABC lấy điểm M sao cho* $\widehat{BMC} = 120^0$, *ngoài ra* $MC = 2MB$. *Tính số đo góc* $\widehat{AMC}$.

Lời giải. Cách 1 (của tác giả bài toán).



Kẻ tia Mx là tia phân giác của $\widehat{BMC}$, khi đó:

$$\widehat{BMx} = \widehat{xMC} = 60°.$$

Trên tia Mx lấy điểm D sao cho $MD = MB$, khi đó tam giác BMD đều.

Suy ra: $DB = BM$ và $\widehat{MBD} = \widehat{MDB} = 60°$ (1).

Lúc này $\widehat{MBD} = \widehat{ABC}$ $(= 60°)$ nên $\widehat{ABM} = \widehat{CBD}$.

Từ đó dễ thấy $\Delta ABM = \Delta CBD$ (c.g.c), suy ra:

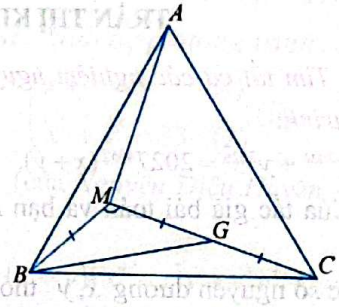
$$\widehat{AMB} = \widehat{CDB}.$$

Kết hợp với điều kiện $MC = 2MB$, suy ra tam giác CMD có $MC = 2MD$ và $\widehat{CMD} = 60°$ nên tam giác này là nửa tam giác đều. Theo đó ta có $\widehat{MDC} = 90°$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{CDB} = 150° = \widehat{AMB}$.

Từ đó ta có: $\widehat{AMC} = 360° - 120° - 150° = 90°$.

Cách 2 (của bạn *Phạm Thị Bảo Uyên* và một số bạn khác).



Gọi G là trung điểm của đoạn MC, ta có:

$$CG = GM = MB = \frac{1}{2}MC.$$

Khi đó ΔBMG cân tại M nên

$$\widehat{MBG} = \widehat{MGB} = \frac{180° - \widehat{BMG}}{2} = 30°.$$

Được quét bằng CamScanner

Do đó $\widehat{BGC} = 180° - \widehat{MGB} = 180° - 30° = 150°$.

Suy ra: $\widehat{GBC} + \widehat{GCB} = 180° - \widehat{BGC} = 30°$;

$\widehat{GBC} + \widehat{MBA} = \widehat{ABC} - \widehat{MBG} = 60° - 30° = 30°$ nên $\widehat{GCB} = \widehat{MBA}$.

Suy ra $\Delta BAM = \Delta CBG$ (c.g.c) nên

$$\widehat{BMA} = \widehat{BGC} = 150°.$$

Vậy $\widehat{AMC} = 360° - \left(\widehat{BMA} + \widehat{BMC}\right)$

$$= 360° - \left(150° + 120°\right) = 90°.$$

Nhận xét. Hầu hết các bạn tham gia giải bài theo một trong hai cách ở trên, một số bạn khác cũng có cách giải khác và đúng nhưng trình bày hơi dài dòng. Tuyên dương các bạn có tên sau:

Quảng Ngãi: *Bùi Quỳnh Nhã Trúc*, 6A, THCS Nghĩa Mỹ, Vệ Giang; *Trần Phạm Minh Thuý*, 6B, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; *Phạm Thị Bảo Uyên*, 6B, THCS Phạm Văn Đồng, Đình Cương; *Trần Văn Phụng*, 7C, THCS Nguyễn Kim Vang, Đình Cương; **Nghệ An:** *Hoàng Sang*, *Bùi Hữu Anh Quân*, *Đinh Trí Dũng*, 7E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Đặng Văn Hoàng*, 7A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc; **Hà Nội:** *Hà Thanh Phong*, *Nguyễn Hữu Bách*, *Nguyễn Vũ Khang*, 7T, THCS&THPT Lương Thế Vinh (cơ sở Tân Triều), Thanh Liệt; *Dương Đức Anh*, 7M, THCS Ngô Sĩ Liên, Cửa Nam; **Phú Thọ:** *Vũ Nhật Thành*, 7A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc.

TRẦN THỊ KIM THANH

Bài T3/581. *Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình:*

$$x^{2026} + y^{2026} = 2027^{4052}(x + y).$$

Lời giải. (Của tác giả bài toán và bạn *Mai Thiên Ân*).

Giả sử có các số nguyên dương x, y thỏa mãn

$$x^{2026} + y^{2026} = 2027^{4052}\left(x + y\right) \text{ (1)}.$$

Suy ra: $\left(x^{2026} + y^{2026}\right) \vdots 2027$ (*).

Nếu x, y đều không chia hết cho 2007 thì $(x; 2027) = 1$ và $(y; 2027) = 1$ (vì 2027 là số nguyên tố), khi đó:

$x^{2026} \equiv 1 \pmod{2027}$; $y^{2026} \equiv 1 \pmod{2027}$ (định lí Fermat nhỏ) $\Rightarrow x^{2026} + y^{2026} \equiv 2 \pmod{2027}$, điều này mâu thuẫn với (*). Do đó trong hai số x, y tồn tại một số chia hết cho 2027.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử x chia hết cho 2027. Khi đó: $x^{2026} \vdots 2027$, kết hợp với (*) suy ra:

$y^{2026} \vdots 2027 \Rightarrow y \vdots 2027$ (vì 2027 là số nguyên tố).

Do đó: $x \vdots 2027$ và $y \vdots 2027$ hay $x = 2027x_1$ và $y = 2027y_1$ với x_1, y_1 là các số nguyên dương.

Thay $x = 2027x_1$ và $y = 2027y_1$ vào (1) ta có:

$$(2027x_1)^{2026} + (2027y_1)^{2026}$$

$$= 2027^{4052}\left(2027x_1 + 2027y_1\right)$$

$$\Rightarrow x_1^{2026} + y_1^{2026} = 2027^{2027}\left(x_1 + y_1\right).$$

Lập lại quá trình như trên với $x_1 = 2027x_2$ và $y_1 = 2027y_2$, ta có:

$$x_2^{2026} + y_2^{2026} = 2027^2\left(x_2 + y_2\right)$$

với x_2, y_2 là các số nguyên dương.

Lập lại quá trình như trên với $x_2 = 2027x_3$ và $y_2 = 2027y_3$ ta có:

$$2027^{2023}\left(x_3^{2026} + y_3^{2026}\right) = x_3 + y_3$$

với x_3, y_3 là các số nguyên dương. Điều này không thể xảy ra vì $2027^{2023}\left(x_3^{2026} + y_3^{2026}\right) > x_3 + y_3$ với mọi số nguyên dương x_3, y_3.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

Nhận xét. Có nhiều bạn đã gửi bài giải đến tòa soạn, hầu hết các bạn tham gia gửi bài đều làm theo cách giải trên, tuy nhiên có nhiều bạn lập luận chưa tốt và một số bạn có tiếp cận bằng cách sử dụng bất đẳng thức tuy nhiên không đúng. Các bạn có thể khai thác bài toán trên qua bổ đề: "*Nếu p là số nguyên tố có dạng $4k + 3$ và các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 + y^2$ chia hết cho p thì cả x và y đều chia hết cho p*". Tuyên dương các bạn có tên sau:

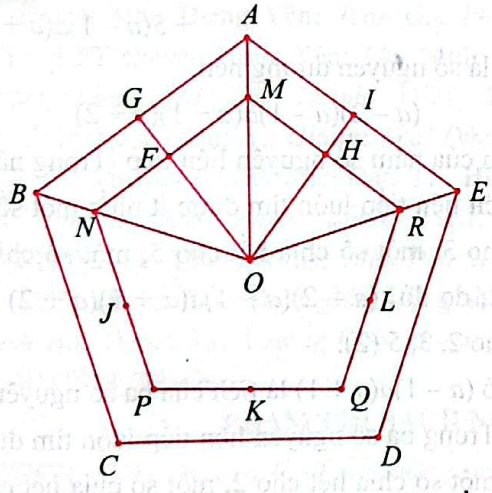
Được quét bằng CamScanner

Hà Nội: *Nguyễn Thành Nam*, 9A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, Hoàng Mai; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp 2-3 GIBS, TP. Graz; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc; **Hà Tĩnh:** *Lê Thị Thanh Bình*, 8A3, THCS Lê Văn Thiêm, Thành Sen; **Nghệ An:** *Lê Kim Ngân*, 8A1, THCS Quỳnh Thiện, Hoàng Mai; *Thái Tùng Quân*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Nghi Lộc; **TP. Hồ Chí Minh:** *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Vĩnh Long:** *Lưu Gia Phúc*, 9/1, THCS Bến Tre; **Thanh Hóa:** *Mai Thiên Ân, Hoàng Ngọc Tùng*, 9B, THCS Chu Văn An, Nga Sơn, *Nguyễn Bá Đức Anh*, 8A, THCS Lương Chí, Tĩnh Gia; **Phú Thọ:** *Chu Ngọc Ánh*, 9A, THCS Lý Nam Đế, Vạn Xuân.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG

Bài T4/581. *Cho ngũ giác đều cạnh bằng 8 cm. Hỏi có thể đặt vào trong ngũ giác đó 6 hình tròn có cùng bán kính 2,2 cm sao cho bất kỳ 2 hình tròn nào trong 6 hình tròn đó không có điểm trong chung không? (cho biết $1,3 < \tan 54^0 < 1,4$).*

Lời giải.



Lời giải. Giả sử *ABCDE* là ngũ giác đều cạnh 8 cm, tâm *O* sao cho có thể đặt vào trong ngũ giác đó 6 hình tròn có cùng bán kính 2,2cm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dựng hình ngũ giác đều *MNPQR* có các cạnh tương ứng song song với các cạnh của ngũ giác *ABCDE* và lần lượt cách các cạnh này 2,2cm.

Khi đó tâm của 6 hình tròn phải nằm trong hoặc trên các cạnh của ngũ giác *MNPQR*.

Gọi *F, J, K, L, H* lần lượt là trung điểm *MN, NP, PQ, QR, RM*. Có 5 tứ giác *OHMF, OFNJ, OJPK, OKQL, OLRH* và 6 tâm. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai tâm thuộc cùng một tứ giác. Giả sử hai tâm O_1, O_2 cùng thuộc tứ giác *OHMF*.

Gọi *G, I* lần lượt là trung điểm *AB, AE*. Dễ thấy *O, M, A* thẳng hàng; *O, F, G* thẳng hàng; *O, H, I* thẳng hàng. Tứ giác *OHMF* nội tiếp đường tròn đường kính *MO* nên $MO \geq O_1O_2 > 4,4$ (1).

Dễ thấy $\widehat{OAB} = \widehat{OMN} = 54°$, ta có: $AM = \dfrac{2,2}{\sin 54°}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có:

$$AB = 2AG = 2.OA\cos 54° > 2\cos 54°\left(4,4 + \frac{2,2}{\sin 54°}\right)$$

$$= \frac{2}{\tan 54°}\left(2,2 + \frac{4,4}{\sqrt{\dfrac{1}{\tan^2 54°} + 1}}\right)$$

$$> \frac{2}{1,4}\left(2,2 + \frac{4,4}{\sqrt{\dfrac{1}{1,3^2} + 1}}\right) > 8.$$

Do đó không thể đặt vào trong ngũ giác đều cạnh 8cm 6 hình tròn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét. Chỉ có bạn *Hoàng Ngọc Tùng*, 9B, THCS Chu Văn An, Nga Sơn, **Thanh Hóa** và bạn *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, xã Hùng Châu, **Nghệ An** làm tốt bài toán này; .

NGUYỄN THANH HÒNG

Bài T5/581. *Giải hệ phương trình sau*

$$\begin{cases} x + y = 3 & (1) \\ x^5 + y^5 = 33 & (2) \end{cases} \text{(I)}.$$

Lời giải. (của *Nguyễn Diệu Huyền* và nhiều bạn)

Ta có: $x^5 + y^5 = (x+y)\left(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4\right)$. Vậy

$$(2) \Leftrightarrow 3\left(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4\right) = 33$$

$$\Leftrightarrow x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = 11$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + y^2\right)^2 - \left(x^3y + xy^3\right) - x^2y^2 = 11$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + y^2\right)^2 - xy\left(x^2 + y^2\right) - x^2y^2 = 11 \quad \text{(II)}.$$

Được quét bằng CamScanner

Đặt $X = x^2 + y^2, Y = xy$ $(X > 0)$ ta có:

$$(\text{II}) \Leftrightarrow X^2 - XY - Y^2 = 11 \quad (\text{III}).$$

Mặt khác,

$$(1) \Leftrightarrow (x+y)^2 = 9 \Leftrightarrow X + 2Y = 9 \Leftrightarrow X = 9 - 2Y,$$

thay vào (III) ta được:

$$(9-2Y)^2 - (9-2Y)Y - Y^2 = 11$$

$$\Leftrightarrow 5Y^2 - 45Y + 70 = 0 \Leftrightarrow Y^2 - 9Y + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow Y_1 = 2, Y_2 = 7.$$

Với $Y_1 = 2$ thì $X_1 = 5$. Khi ấy:

$$\begin{cases} X = x^2 + y^2 = 5 \\ Y = xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 1 \end{cases}.$$

Với $Y_2 = 7$ thì $X_2 = -5$ loại vì $X > 0$.

Vậy ta có các nghiệm: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases}$ và $\begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 1 \end{cases}$.

Nhận xét. Bài này thuộc dạng chuẩn, dễ nên đa số bạn tham gia giải và giải đúng.

An Giang: *Đào Đức Phúc Nguyên*, 11T1, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, TP. Rạch Giá; **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, 9A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, Hoàng Mai; **Hà Tĩnh:** *Lê Thị Thanh Bình*, 8A3, THCS Lê Văn Thiêm, phường Thành Sen; *Nguyễn Diệu Huyền*, 7D, THCS Xuân Diệu; **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc; **Hải Phòng:** *Tạ Đăng Quân*, 8I, THCS Bình Minh, Lê Thanh Nghị; **Nghệ An:** *Lê Kim Ngân*, 8A1, THCS Quỳnh Thiện, phường Hoàng Mai; *Nguyễn Thái Dũng*, *Nguyễn Bảo Duy*, *Nguyễn Thị Trà Giang*, *Nguyễn Đình Gia Hưng*, *Cao Phúc*, *Nguyễn Đắc Sang*, *Thái Tùng Quân*, 8B, *Ngô Trần Ngọc Bảo*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, xã Đô Lương; *Nguyễn Đức Nhân*, 8B, THCS Hồ Xuân Hương, xã Quỳnh Lưu, *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, xã Hùng Châu, *Phạm Ngọc Diệp*, 9A, THCS Quỳnh Côi; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Bá Đức Anh*, 8A, THCS Lương Chí, Tĩnh Gia; **Phú Thọ:** *Nguyễn Mạnh Dũng*, 8A, *Chu Ngọc Ánh*, *Nguyễn Thanh Mai*, 9A, THCS Lý Nam Đế, xã Vạn Xuân; *Lê Minh Đức*, 9B, THCS Văn Lang, Phường Việt Trì, *Nguyễn Bảo Châu*, *Nguyễn Hữu Đức Trí*, 8A6, THCS Yên Lạc, Tam Hồng; *Đỗ Mạnh Hùng*, 11 Toán A, THPT chuyên Hùng Vương; **Quảng Ngãi:** *Trần Văn Phụng*, 8C, THCS Nguyễn Kim Vang; **Quảng Ninh:** *Trần Phương Dung*, 9A, THCS Bắc Sơn; **Quảng Trị:** *Nguyễn Chính Quân*, 9, THCS Đồng Hải; **TP. Hồ Chí Minh:** *Trần Khánh Tùng*, 9/2, THCS Trần Quốc Toản, Bình Trưng; *Lê Khắc Trí Nguyên*, 11E, THPT Lê Thánh Tông, *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, *Nguyễn Lâm*, 9A2, THCS Đào Duy Anh; **Vĩnh Long:** *Lưu Gia Phúc*, 9/1, THCS Bến Tre, *Thái Quốc Kiệt*, 9/3, THCS Tạ Thị Kiều, xã Mỏ Cày.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T6/581. *Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a^5 + b^5 + c^5 = 478298(a+b+c)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + b + c$.*

Lời giải. Biến đổi điều kiện của bài ra thành

$$(a^5 - a) + (b^5 - b) + (c^5 - c) = 478297(a + b + c) \quad (1).$$

Nhận thấy:

$$\begin{aligned} a^5 - a &= a(a^4 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 - 4 + 5) \\ &= a(a^2 - 1)(a^2 - 4) + 5a(a^2 - 1) \\ &= (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2) \\ &\quad + 5(a-1)a(a+1). \end{aligned}$$

Do a là số nguyên dương nên

$$(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$$

là tích của năm số nguyên liên tiếp. Trong năm số nguyên liên tiếp luôn tìm được ít nhất một số chia hết cho 3, một số chia hết cho 5, một số chia hết cho 2; do đó $(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$ chia hết cho 2, 3, 5 (2).

Lại có $(a-1)a(a+1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp. Trong ba số nguyên liên tiếp luôn tìm được ít nhất một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3; do đó $(a-1)a(a+1)$ nên chia hết cho 2, 3. Suy ra $5(a-1)a(a+1)$ chia hết cho 2, 3, 5 (3).

Từ (2) và (3) suy ra $a^5 - a$ chia hết cho 2, 3, 5.

Mà 2, 3, 5 đôi một nguyên tố cùng nhau nên $a^5 - a$ chia hết cho 2. 3. 5 = 30. Hoàn toàn chứng minh tương tự, ta có $b^5 - b$ và $c^5 - c$ cũng chia hết cho 30. Như vậy vế trái của (1) chia hết cho 30, nên vế phải của (1) là $478297(a + b + c)$ cũng chia hết cho 30. Do ƯCLN (478297, 30) = 1 nên $a + b + c$

Được quét bằng CamScanner

chia hết cho 30. Theo giả thiết a, b, c là các số nguyên dương nên $a+b+c\geq 3$.

Từ đó suy ra $S=a+b+c\geq 30$.

$$S=30 \text{ khi } \begin{cases} a+b+c=30 \\ a^5+b^5+c^5=14348940 \end{cases}.$$

Chẳng hạn (a, b, c) là hoán vị của $(1; 2; 27)$.

Vậy $\min S=a+b+c=30$.

Nhận xét. Mấu chốt của bài toán là việc chứng minh: Với a là số nguyên thì a^5-a chia hết cho 30. Nhiều bạn đã sử dụng Định lí Fermat nhỏ: *Với p là số nguyên tố và a là số nguyên thì a^p-a chia hết cho p.* Ứng với $p=5$ thì a^5-a chia hết cho 5, từ đó vế phải của (1) chia hết cho 5 , do đó: $S=a+b+c$ chia hết cho 5. Sau đó lập luận:

$$S^5=(a+b+c)^5>a^5+b^5+c^5=478298S$$

suy ra $S>26$ mà S chia hết cho 5 nên $S\geq 30$. Từ đó cũng tìm ra kết quả.

Tuyên dương các bạn sau có lời giải lập luận chặt chẽ và ngắn gọn:

Hà Tĩnh: *Đặng Sỹ Phước Đức*, 10T1, *Ngô Bùi Anh Khoa*, 11T1, *Phạm Viết Lê Huy*, 11T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 11A3, THPT Hoàng Mai; **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Tây Ninh:** *Trần Lê Trọng Phúc*, *Thi Tiến Thành*, 11T1, THPT chuyên Trần Ngọc Giàu; **An Giang:** *Thái Đức Huy*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Đức Quang Minh*, 11E1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, Trường Quốc tế song ngữ cấp II, III GIBS, TP. Graz.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T7/581. *Gọi a, b, c, d là độ dài bốn cạnh của một tứ giác lồi. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d-a}}+\sqrt{\frac{b}{c+d+a-b}}+\sqrt{\frac{c}{d+a+b-c}}+\sqrt{\frac{d}{a+b+c-d}}\geq 2\sqrt{2}.$$

Lời giải. Vì a,b,c,d là độ dài bốn cạnh của một tứ giác lồi nên: $b+c+d-a>0$,

$$c+d+a-b>0,\ d+a+b-c>0,\ a+b+c-d>0.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$2\sqrt{2a.(b+c+d-a)}\leq 2a+(b+c+d-a)=a+b+c+d.$$

Suy ra: $\sqrt{\frac{a}{b+c+d-a}}\geq\frac{2\sqrt{2}a}{a+b+c+d}$.

Tương tự ta có: $\sqrt{\frac{b}{c+d+a-b}}\geq\frac{2\sqrt{2}b}{a+b+c+d}$;

$$\sqrt{\frac{c}{d+a+b-c}}\geq\frac{2\sqrt{2}c}{a+b+c+d};$$

$$\sqrt{\frac{d}{a+b+c-d}}\geq\frac{2\sqrt{2}d}{a+b+c+d}.$$

Cộng theo vế bốn bất đẳng thức trên ta thu được:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d-a}}+\sqrt{\frac{b}{c+d+a-b}}+\sqrt{\frac{c}{d+a+b-c}}+\sqrt{\frac{d}{a+b+c-d}}\geq\frac{2\sqrt{2}(a+b+c+d)}{a+b+c+d}=2\sqrt{2}.$$

Nhận xét. Đây là một bài toán bất đẳng thức không khó và khá quen thuộc. Đa số lời giải của các bạn gửi đến tòa soạn đều đúng và giải theo cách trên. Có hai bạn có lời giải rất giống nhau. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Hà Nội: *Nguyễn Thành Nam*, 9A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, Hoàng Mai; **Quảng Trị:** *Nguyễn Chính Quân*, 9^2, THCS Đồng Hải; *Lê Phước Quý*, *Phan Viết Hoàng*, 11 Toán 2, *Lê Ánh Dương*, 12 chuyên Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Vĩnh Long:** *Lê Hoàng Khang*, *Nguyễn Thanh Trúc*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Phú Thọ:** *Trần Việt Tùng*, 11 Toán A, THPT chuyên Hùng Vương; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp II, III GIBS, TP. Graz; **Hưng Yên:** *Phạm Văn Phong*, 11 Toán 1, *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** *Thái Tùng Quân*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, *Nguyễn Việt Anh*, 7A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc, *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 11A3, THPT Hoàng Mai; **Hà Tĩnh:** *Đặng Sỹ Phước Đức*, 10 Toán 1, *Ngô Bùi Anh Khoa*, *Nguyễn Tùng Duy*, *Nguyễn Viết Thế Tài*, *Nguyễn Anh Dũng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Tây Ninh:** *Trần Lê Trọng Phúc*, 11T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Lê Thùy Trang*, 11E6, *Nguyễn Phạm Minh*

Được quét bằng CamScanner

Phú, 11E2, *Võ Nguyễn Gia Huy*, 11A1, *Lê Khắc Trí Nguyên*, 11E1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông; *Lê Nguyễn Tuyết Minh*, 8A6, *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **An Giang:** *Lưu Minh Trí*, 10 Toán 2, *Thái Đức Huy*, 11 Toán 2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Thanh Hóa:** *Mai Thiện Ân*, 9B, THCS Chu Văn An.

HOÀNG NGỌC MINH

Bài T8/581. *Cho tam giác ABC không tù, có trọng tâm G và trực tâm H. Kéo dài AG, BG, CG theo thứ tự cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng*

$$HA+HB+HC\le GA_1+GB_1+GC_1.$$

Lời giải. Đặt $BC=a, AC=b, AB=c$, M là trung điểm của BC, ta có: $MA\cdot MA_1=MB\cdot MC=\dfrac{a^2}{4}$.

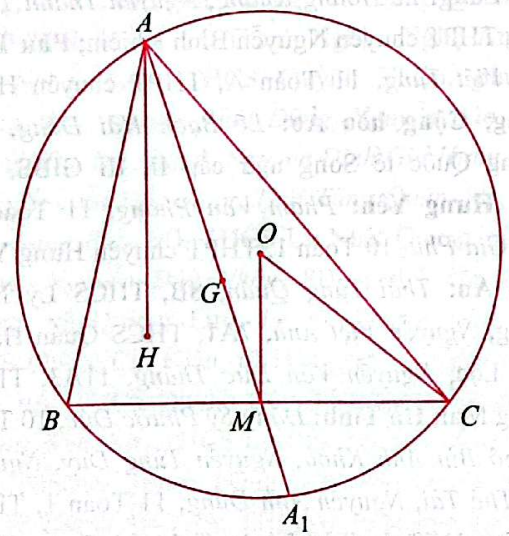
Suy ra:

$$MA_1=\frac{a^2}{4AM}=\frac{a^2}{4\sqrt{\dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}}}=\frac{a^2}{2\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}.$$

Do đó: $GA_1=GM+MA_1=\dfrac{AM}{3}+MA_1$

$$=\frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{6}+\frac{a^2}{2\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{3\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}.$$



Làm tương tự, sau đó sử dụng BĐT Schwarz ta thu được:

$$GA_1+GB_1+GC_1=\frac{a^2+b^2+c^2}{3\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}+\frac{a^2+b^2+c^2}{3\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}}+\frac{a^2+b^2+c^2}{3\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}}$$

$$\ge\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}+\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}+\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}}$$

$$\ge\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$HA+HB+HC\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}\quad(1).$$

Thật vậy, gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có:

$$HA=2OM=2OC\cdot\cos\widehat{MOC}=2R\cos A.$$

Tương tự suy ra:

$$HA+HB+HC=2R(\cos A+\cos B+\cos C).$$

Chú ý rằng $a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$, ta có: $a^2+b^2+c^2=4R^2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)$.

Khi đó bất đẳng thức (1) tương đương:

$$(\cos A+\cos B+\cos C)^2\le\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C$$

$$\Leftrightarrow\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B+2\cos B\cos C+2\cos C\cos A\le\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C$$

$$\Leftrightarrow\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A\le\frac{3}{2}\quad(2).$$

Ta có công thức quen thuộc:

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C=1.$$

Vậy (2) tương đương với

$$\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A\le\frac{1}{2}+2\cos A\cos B\cos C\quad(3).$$

Trong ba số $\cos A-\dfrac{1}{2}, \cos B-\dfrac{1}{2}, \cos C-\dfrac{1}{2}$, luôn chọn được hai số cùng dấu. Không mất tổng quát, giả sử: $\left(\cos A-\dfrac{1}{2}\right)\left(\cos B-\dfrac{1}{2}\right)\ge0$

$$\Leftrightarrow\cos A\cos B+\frac{1}{4}\ge\frac{1}{2}(\cos A+\cos B)$$

$$\Leftrightarrow2\cos A\cos B\cos C+\frac{1}{2}\cos C\ge\cos A\cos C+\cos B\cos C\quad(4).$$

Được quét bằng CamScanner

Lại có:

$$1=2\cos A\cos B\cos C+\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$$
$$\geq 2\cos A\cos B\cos C+2\cos A\cos B+\cos^2 C$$
$$\Leftrightarrow(\cos C+1)(2\cos A\cos B+\cos C-1)\leq 0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos A\cos B+\cos C-1\leq 0$$
$$\Leftrightarrow \cos A\cos B\leq \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos C \quad (5).$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức cùng chiều của (4) và (5) ta thu được (3) đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Không nhiều bạn tham gia giải bài kì này, trong đó một số bạn ở chung một lớp có lời giải giống hệt nhau. Xin tuyên dương các bạn có lời giải tốt: **Thanh Hóa:** *Vũ Duy Mạnh*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, xã Hùng Châu ; **An Giang:** *Huỳnh Đức Chí*, 10T1, THPT chuyên Thủ Khoa Nghĩa, *Nguyễn Đức Mạnh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt.

NGUYỄN VĂN LINH

Bài T9/581. *Ký hiệu a_k là hệ số của x^k $(0 \leq k \leq 4n-1)$ trong khai triển thành đa thức của: $P(x)=(1+x+x^2+...+x^{2n-1})(1+x+x^2+...+x^n)^2$.*

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho a_{2n} là lũy thừa nguyên dương của một số nguyên tố.

Lời giải. Giả sử $f(x)=\left(1+x+x^2+...+x^n\right)^2$
$$=1+b_1x+b_2x^2+...+b_{2n}x^{2n}.$$

Khi đó:

$$P(x)=\left(1+x+x^2+...+x^{2n-1}\right)\left(1+b_1x+b_2x^2+...+b_{2n}x^{2n}\right).$$

Bằng cách nhân lần lượt từng số hạng của hai biểu thức ta thấy rằng hệ số của x^{2n} trong $P(x)$ là

$$a_{2n}=b_{2n}+b_{2n-1}+b_{2n-2}+...+b_1=f(1)-1$$
$$=(n+1)^2-1=n(n+2).$$

Giả sử $a_{2n}=p^m$ với p là số nguyên tố và $m\in\mathbb{Z}^+$. Khi đó $n=p^k$ và $n+2=p^h$ trong đó $0\leq k<h, k+h=m$. Từ đây suy ra:

$$2=p^h-p^k=p^k\left(p^{h-k}-1\right).$$

Dẫn đến $p^k \mid 2$ hay $p^k\in\{1,2\}$.

Nếu $p^k=1$ thì $p=2, k=0$ và $n=1$ (thỏa mãn).

Nếu $p^k=2$ thì $p=2, k=1$ và $n=2$ (thỏa mãn).

Như vậy $n\in\{1,2\}$.

Nhận xét. Tất cả các lời giải gửi về tòa soạn đều đúng, tuy nhiên có một số bạn giải dài và phức tạp. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, 9A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, Hoàng Mai; **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, xã Hùng Châu; **Hà Tĩnh:** *Đặng Sỹ Phước Đức*, 10 Toán 1; *Bùi Tùng Lâm, Lê Minh Mạnh, Nguyễn Viết Thế Tài, Ngô Bùi Anh Khoa*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **An Giang:** *Nguyễn Hoài Nhanh, Nguyễn Đức Mạnh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Thanh Trúc*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, *Thái Quốc Kiệt*, 9/3, THCS Tạ Thị Kiều, xã Mỏ Cày; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung; **TP. Hồ Chí Minh:** *Lê Nguyễn Tuyết Minh*, 8A6, *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

NGUYỄN VIỆT HÙNG

Bài T10/581. *Cho a là số thực dương và dãy số (x_n) được xác định bởi công thức truy hồi sau:*

$$x_1=1 \text{ và } x_{n+1}=x_n+\frac{a}{\sum_{k=1}^{n}x_k} \text{ với } n\in\mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng dãy (y_n) với $y_n=\frac{x_n}{\sqrt{\ln n}}$ có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải (Theo bạn *Nguyễn Hoài Nhanh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, **An Giang**).

Bằng quy nạp ta dễ thấy $x_n>0, \forall n\in\mathbb{N}$ và

$$x_{n+1}-x_n=\frac{a}{\sum_{k=1}^{n}x_k}=\frac{a}{S_n}>0, \forall n\in\mathbb{N}$$

(với $S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$) $\Rightarrow x_{n+1}>x_n, \forall n\in\mathbb{N}$.

Được quét bằng CamScanner

Vậy (x_n) là dãy tăng. Giả sử dãy (x_n) bị chặn trên, khi đó dãy (x_n) hội tụ. Đặt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. Từ công thức truy hồi, cho $n \to \infty$ ta được:

$$L = L + \frac{a}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k} \Rightarrow \frac{a}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k} = 0,$$ điều này là vô lý.

Do đó dãy (x_n) không bị chặn trên. Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Áp dụng định lý Stolz-Cesaro ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{\ln(n+1) - \ln n}.$$

Xét tử số: $x_{n+1}^2 - x_n^2 = (x_{n+1} - x_n)((x_{n+1} + x_n)$

$$= \frac{a}{S_n}\left(2x_n + \frac{a}{S_n}\right) = \frac{2ax_n}{S_n} + \frac{a^2}{S_n^2}.$$

Xét mẫu số: $\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$.

Khi đó: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2ax_n}{S_n} + \frac{a^2}{S_n^2}}{\frac{1}{n}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2anx_n}{S_n} + \frac{a^2 n}{S_n^2}\right).$$

Vì dãy (x_n) tăng và $x_1 = 1$ nên $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \geq nx_1 = n$. Do đó: $0 < \frac{a^2 n}{S_n^2} \leq \frac{a^2 n}{n^2} = \frac{a^2}{n}$.

Mà $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^2}{n} = 0$ nên theo nguyên lý kẹp ta có: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^2 n}{S_n^2} = 0$. Ta có: $0 < \frac{an}{x_{n+1} S_n} \leq \frac{an}{nx_{n+1}} = \frac{a}{x_{n+1}}$. Mà $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{x_{n+1}} = 0$ (do $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \infty$) nên theo nguyên lý kẹp $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{an}{x_{n+1} S_n} = 0$. Lại sử dụng định lý Stol-Cesaro ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2anx_n}{S_n} = 2a \lim_{n\to\infty} \frac{nx_n}{S_n}$$

$$= 2a \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)x_{n+1} - nx_n}{S_{n+1} - S_n}$$

$$= 2a \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} + n(x_{n+1} - x_n)}{x_{n+1}}$$

$$= 2a \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{an}{x_{n+1} S_n}\right) = 2a.$$

Do đó: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{\ln n} = 2a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{\ln n}} = \sqrt{2a}$.

Nhận xét. 1) Trong lời giải trên đã sử dụng một số kết quả sau:

+ ***Định lý Stolz-Cesaro***: Cho hai dãy số (x_n) và (y_n) thỏa mãn:

i) Dãy (y_n) tăng ngặt và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l$.

Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$.

+ ***Nguyên lý kẹp***: Cho ba dãy số (x_n), (y_n), (z_n) thỏa mãn; $x_n \leq y_n \leq z_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = l$.

Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$.

+ Nếu $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ thì $\alpha(x)$ gọi là đại lượng vô cùng bé khi x $\to$ a. Bây giờ giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các đại lượng vô cùng bé khi x $\to$ a.

Nếu $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ thì ta nói $\alpha(x)$ là vô cùng bé bậc cao hơn so với $\beta(x)$ và ký hiệu: $\alpha(x) = o(\beta(x))$ hoặc $\alpha = o(\beta)$.

Nếu $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = m$ $(m \neq 0)$ thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các vô cùng bé cùng bậc. Đặc biệt nếu $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các vô cùng bé tương đương và ký hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

2) Ngoài bạn *Nhanh*, các bạn sau có lời giải đúng: **An Giang:** *Thái Đức Huy, Nguyễn Đức Mạnh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc; **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, xã Hùng Châu; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Viết Thế Tài, Bùi Tùng Lâm, Ngô Bùi Anh Khoa, Nguyễn Trung Hải*, 11 Toán 1, *Phan Viết Lê Huy*, 11 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh.

TRẦN HỮU NAM

Được quét bằng CamScanner

Bài T11/581. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ *thỏa mãn:*

$$f(xy)+f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x).f(y)+y^2f(xy),\ \forall x,y>0\ (1).$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn) Từ điều kiện bài ra, với $f(x;y)$ thỏa mãn (1), cho $y=1$ suy ra:

$$f(x)(f(1)-1)=0,\forall x\in\mathbb{R}^+\Leftrightarrow f(1)=1.$$

Thay $x=1$ vào (1), ta thu được:

$$f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(y)+y^2f(y),\forall y\in\mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{y}\right)=y^2f(y),\forall y\in\mathbb{R}^+\ (2).$$

Thay y bởi $\frac{1}{x}$ vào (1) và sử dụng (2), ta thu được: $1+f(x^2)=f\left(\frac{1}{x}\right)f(x)+\frac{1}{x^2},\forall x\in\mathbb{R}^+.$

Suy ra: $f(x^2)=x^2(f(x))^2+\frac{1}{x^2}-1,\forall x\in\mathbb{R}^+\ (3).$

Thay y bởi x vào (1), ta được:

$$f(x^2)+f(1)=(f(x))^2+x^2f(x^2),\forall x\in\mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow f(x^2)=(f(x))^2+x^2(f(x))^2-1,\ \forall x\in\mathbb{R}^+\ (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$(f(x))^2=\frac{1}{x^2},\forall x\in\mathbb{R}^+\Leftrightarrow f(t)=\frac{1}{t},\forall t\in\mathbb{R}^+.$$

Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn các điều kiện bài ra.

Nhận xét. Đây là dạng phương trình hàm cơ bản với cặp biến tự do sinh bởi phép nghịch đảo nên đa số các bạn đều giải theo cách đã trình bày. Một số lời giải khác tuy có dài dòng hơn do các phép biến đổi vẫn cho đáp số đúng.

Các bạn sau đây có lời giải đúng: **An Giang:** *Lưu Minh Trí*, 10T2, *Nguyễn Hoài Thanh*, *Thái Đức Huy*, *Nguyễn Đức Mạnh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, *Huỳnh Đức Chí*, 10T1, THPT chuyên Thủ khoa Nghĩa; **Hà Tĩnh:** *Đặng Sỹ Phước Đức*, 10T1, *Nguyễn Tùng Duy*, *Ngô Bùi Anh Khoa*, *Nguyễn Viết Thế Tài*, 11T1, *Phan Viết Lê Huy*, 11T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, xã Hùng Châu; **Thừa Thiên Huế:** *Trần Bá Thịnh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A1, THCS Quang Trung, Bảo Lộc; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 11T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Phú Thọ:** *Nguyễn Quang Huy*, 10 Toán A, THPT chuyên Hùng Vương; **Quảng Trị:** *Phan Viết Hoàng*, *Lê Phước Quý*, 11T2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thanh Hóa:** *Vũ Duy Mạnh*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn; **Vĩnh Long:** *Hồ Dương Đức Đạt*, THPT chuyên Vĩnh Long.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/581. *Cho tứ diện ABCD và điểm M chạy trong tứ diện. Gọi N, P, Q theo thứ tự là giao điểm của BM, CM, DM và các mặt (ACD), (ABD), (ABC). Tìm vị trí của M để thể tích tứ diện MNPQ lớn nhất.*

Lời giải. Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. *Cho tứ diện ABCD và điểm M nằm trong tứ diện. N là giao điểm của AM và mặt phẳng (BCD). Nếu M là tâm tỉ cự của hệ bốn điểm A, B, C, D với các hệ số x, y, z, t thì* $\frac{MN}{AN}=\frac{x}{x+y+z+t}$.

Trở lại giải bài toán trên.

Vì M nằm trong tứ diện $ABCD$ nên tồn tại các số dương x, y, z, t sao cho $x+y+z+t=1$ và M là tâm tỉ cự của hệ bốn điểm A, B, C, D với các hệ số tương ứng là x, y, z, t.

Gọi E là trọng tâm của tam giác BCD; M' là giao điểm của AE và mặt phẳng qua M song song với (BCD); N', P', Q' theo thứ tự là giao điểm của BM', CM', DM' và (ACD), (ABD), (ABC).

Theo bổ đề trên, ta có:

$$V_{MNPQ}=\frac{MN}{MB}.\frac{MP}{MC}.\frac{MQ}{MD}V_{MBCD}$$

$$=\frac{MN}{MB}.\frac{MP}{MC}.\frac{MQ}{MD}.\frac{ME}{AE}V_{ABCD}$$

$$=\frac{xyzt}{(x+z+t)(x+t+y)(x+y+z)}V_{ABCD}$$

$$=\frac{xyzt}{(1-y)(1-z)(1-t)}V_{ABCD}\ (1).$$

Được quét bằng CamScanner

Vì M' thuộc AE và $MM'//(BCD)$ nên M' là tâm tỉ cự của hệ bốn điểm A, B, C, D với các hệ số tương ứng là $x, \frac{y+z+t}{3}, \frac{y+z+t}{3}, \frac{y+z+t}{3}$.

Do đó, tương tự như trên, ta có:

$$V_{M'N'P'Q'}=\frac{x.\frac{y+z+t}{3}.\frac{y+z+t}{3}.\frac{y+z+t}{3}}{\left(x+2\frac{y+z+t}{3}\right)\left(x+2\frac{y+z+t}{3}\right)\left(x+2\frac{y+z+t}{3}\right)}V_{MBCD}$$

$$=\frac{x\left((x+y+z+t)-x\right)^3}{\left(x+2(x+y+z+t)\right)^3}V_{ABCD}=\frac{x(1-x)^3}{(x+2)^3}V_{ABCD} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$V_{MNPQ}\le V_{M'N'P'Q'}$$

$$\Leftrightarrow \frac{xyzt}{(1-y)(1-z)(1-t)}\le\frac{x(1-x)^3}{(x+2)^3}$$

$$\Leftrightarrow yzt(x+2)^3\le(1-x)^3(1-y)(1-z)(1-t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-x)^3}{(x+2)^3}.\frac{(1-y)(1-z)(1-t)}{yzt}\ge 1.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy cho ba số, ta có:

$$\frac{(1-x)^3}{(x+2)^3}.\frac{(1-y)(1-z)(1-t)}{yzt}$$

$$=\frac{(1-x)^3}{(x+2)^3}.\frac{1-(y+z+t)+(zt+ty+yz)-yzt}{yzt}$$

$$=\frac{(1-x)^3}{(x+2)^3}.\frac{x+(zt+ty+yz)-yzt}{yzt}$$

$$=\frac{(1-x)^3}{(x+2)^3}.\left(\frac{x}{yzt}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}-1\right)$$

$$\ge\frac{(1-x)^3}{(x+2)^3}.\left[\frac{27x}{(y+z+t)^3}+\frac{9}{y+z+t}-1\right]$$

$$=\frac{(1-x)^3}{(x+2)^3}.\left[\frac{27x}{(1-x)^3}+\frac{9}{1-x}-1\right]$$

$$=\frac{27x+9(1-x)^2-(1-x)^3}{(x+2)^3}$$

$$=\frac{x^3+6x^2+12x+8}{(x+2)^3}=\frac{(x+2)^3}{(x+2)^3}=1.$$

Tóm lại: $V_{MNPQ}\le V_{M'N'P'Q'}$ (3).

Xét hàm $f(x)=\frac{x(1-x)^3}{(x+2)^3}$ xác định trong khoảng $(0;1)$. Ta có:

$$f'(x)=\frac{\left[(1-x)^3-3x(1-x)^2\right](x+2)^3-3x(1-x)^3(x+2)^2}{(x+2)^6}$$

$$=\frac{\left\{\left[(1-x)-3x\right](x+2)-3x(1-x)\right\}(1-x)^2(x+2)^2}{(x+2)^6}$$

$$=\frac{(-x^2-10x+2)(1-x)^2(x+2)^2}{(x+2)^6}$$

$$=\frac{(-x^2-10x+2)(1-x)^2}{(x+2)^4}.$$

Do đó $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-5\pm3\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Vậy $f(x)$ đồng biến trong khoảng $\left(0;-5+3\sqrt{3}\right)$ và nghịch biến trong khoảng $\left(-5+3\sqrt{3};1\right)$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra V_{MNPQ} lớn nhất $\Leftrightarrow$ $x=-5+3\sqrt{3}$ $\Leftrightarrow$ M thuộc đoạn AE và $\frac{ME}{AE}=-5+3\sqrt{3}$.

Nhận xét. 1) Bài toán này khó, chỉ có 7 bạn tham gia giải và chỉ có 1 bạn có lời giải đúng, đó là bạn *Nguyễn Thanh Trúc*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long**.

2) Những bài toán cực trị hình học hay là những bài toán mà trong lời giải của nó người giải cần phải kết hợp tư duy hình học và tư duy đại số.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/581. *Một bình khí nén bằng thép được dùng trong lặn biển được nạp không khí ở áp suất* 200 atm *tại nhiệt độ* 17 °C. *Bình được trang bị một van an toàn, van sẽ tự động xả khí nếu áp suất bên trong vượt quá* 240 atm. *Sau khi nạp bình được để trên boong tàu dưới trời nắng, khiến nhiệt độ của khối khí bên trong tăng lên. Coi không khí là khí lí tưởng và thể tích của bình không đổi. Cho hằng số boltzmann* $k = 1{,}38.10^{-23}$ J/K. *Xét tính đúng/sai của các phát biểu sau (có giải thích).*

Được quét bằng CamScanner

a) *Khi nhiệt độ của bình đạt 47 °C, áp suất bên trong xấp xỉ 22,1 atm.*

b) *Van an toàn của bình sẽ kích hoạt khi nhiệt độ của khí bên trong đạt 384 °C.*

c) *Khi nhiệt độ tăng từ 17 °C đến 47 °C, động năng tịnh tiến trung bình của mỗi phân tử tăng khoảng 10,3%.*

d) *Nếu ban đầu người ta chỉ nạp khí vào bình đến áp suất 150 atm (ở 17 °C), thì nhiệt độ tối đa mà bình có thể chịu được trước khi van an toàn kích hoạt sẽ cao hơn so với trường hợp nạp đến áp suất 200 atm.*

Lời giải. a) Vì thể tích của lượng khí trong bình không đổi, nên ta có:

$$\frac{p_1}{T_1}=\frac{p_2}{T_2}\Rightarrow p_2=\frac{p_1T_2}{T_1}=\frac{200.320}{290}$$

$$\approx 220{,}69 \text{ atm} \Rightarrow \text{a) sai.}$$

b) Ta có: $\frac{p_1}{T_1}=\frac{p_{van}}{T_{van}}\Rightarrow T_{van}=\frac{p_{van}T_1}{p_1}$

$$=\frac{290.240}{200}=348(K)\approx 75\,(^\circ\text{C}) \Rightarrow \text{b) sai.}$$

c) Tỉ lệ phần trăm động năng tịnh tiến trung bình của mỗi phân tử tăng:

$$\frac{\bar{E}_{d2}-\bar{E}_{d1}}{\bar{E}_{d1}}.100\%=\frac{320-290}{290}.100\%$$

$$\approx 10{,}34\% \Rightarrow \text{c) đúng.}$$

d) Khi nạp khí đến áp suất $p_1'=150$ atm ở nhiệt độ $T_1 = 290$ K, nhiệt độ tối đa T'_{van} trước khi van an toàn kích hoạt ($p_{\text{van}} = 240$ atm) là:

$$T'_{\text{van}}=\frac{p_{\text{van}}T_1}{p_1'}=\frac{240.290}{150}=464\,K$$

$$\approx 191\,(^\circ\text{C}) > 75\,(^\circ\text{C}) \Rightarrow \text{d) đúng.}$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: **Hưng Yên:** *Trần Mai Anh*, 11 Lý, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** *Trương Khánh Toàn, Đinh Văn Trường, Đặng Văn Lê Mạnh, Nguyễn Lê Khánh Hà*, 11 Lý, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Phúc Thịnh, Thành Ngô Bảo Long*, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Lê Phước Nguyên*, 11E7, THPT Lê Thánh Tông.

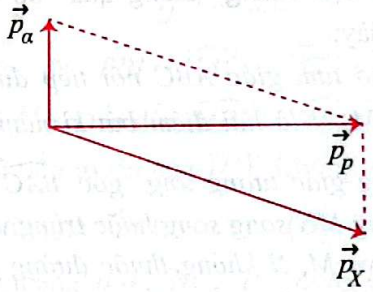
ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/581. *Dùng một proton có động năng 5,45 MeV bắn vào hạt nhân ^9_4Be đứng yên. Phản ứng tạo ra hạt alpha (α) và hạt nhân X. Hạt α bay ra theo phương vuông góc với phương tới của proton và có động năng 4 MeV. Khi tính động năng của các hạt, lấy khối lượng các hạt tính theo đơn vị khối lượng nguyên tử bằng số khối của chúng. Tính năng lượng toả ra của phản ứng.*

Lời giải. Theo đề bài ta có phương trình phản ứng hạt nhân: $^1_1p+^9_4Be\rightarrow {}^4_2He+{}^6_3X$.

Vì hạt ^9_4Be đứng yên, ta có: $\vec{p}_p=\vec{p}_\alpha+\vec{p}_X$.

Theo đề bài ta vẽ được giản đồ như hình sau :



Từ giản đồ có:

$$p_X^2=p_p^2+p_\alpha^2\Leftrightarrow 2m_xW_{dX}=2m_pW_{dp}+2m_\alpha W_{d\alpha}$$

$$\Rightarrow W_{dX}=\frac{m_pW_{dp}+m_\alpha W_{d\alpha}}{m_x}$$

$$=\frac{1.5{,}45+4.4}{6}=3{,}575 \text{ (MeV)}.$$

Năng lượng toả ra của phản ứng:

$$\Delta W_d=W_{d\alpha}+W_{dX}-W_{dp}=2{,}125 \text{ (MeV)}.$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: **Hưng Yên:** *Trần Mai Anh, Nguyễn Lê Khánh Hà*, 11 Lý, *Trần Gia Phú*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** *Trương Khánh Toàn, Đinh Văn Trường, Nguyễn Lê Khánh Hà*, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Phan Phú Lợi, Thành Ngô Bảo Long, Nguyễn Phú Thịnh*, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Quảng Trị:** *Lê Ánh Dương*, 12 chuyên Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **TP. Hồ Chí Minh:** *Lê Phước Nguyên*, 11E7, THPT Lê Thánh Tông.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Được quét bằng CamScanner

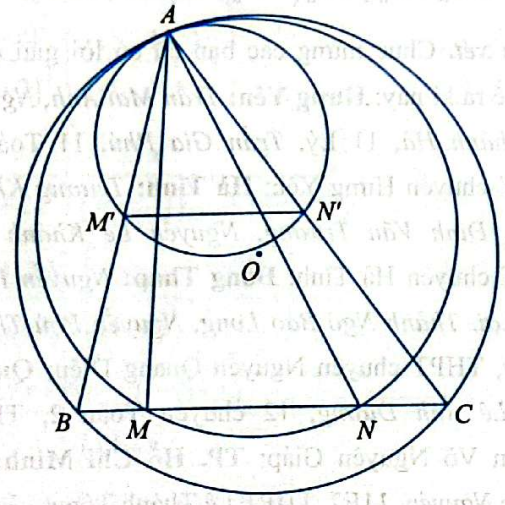


BỔ ĐỀ VỀ HAI ĐƯỜNG TRÒN TIẾP XÚC NHAU

NGUYỄN VĂN THANH
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Trong hình học phẳng, các bài toán về hai đường tròn tiếp xúc nhau luôn đọng lại trong mỗi chúng ta những nét đẹp rất riêng. Đây cũng là dạng toán thường hay xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi các cấp. Nhằm khai thác thêm tính độc đáo của chủ đề này, tác giả xin gửi đến bạn đọc một hướng tiếp cận chúng thông qua bổ đề quen thuộc sau đây:

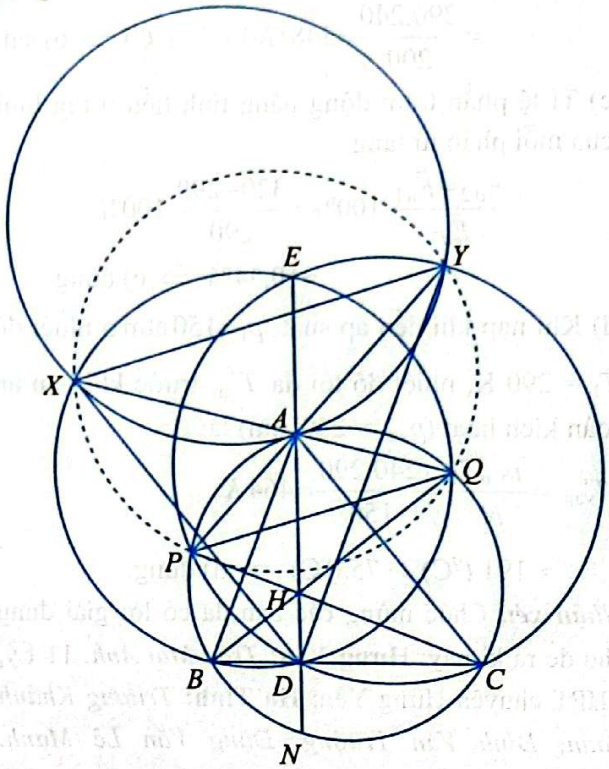
Bổ đề. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N là hai điểm bất kì nằm trên hai đường đẳng giác tương ứng góc $\widehat{BAC}$ sao cho đường thẳng MN song song hoặc trùng với đường thẳng BC và M, N không thuộc đường tròn (O). Khi đó, đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN tiếp xúc với đường tròn (O) tại điểm A. Đặc biệt, nếu hai đường đẳng giác tương ứng góc $\widehat{BAC}$ suy biến, trùng với hai đường thẳng AB, AC và $M' \in AB, N' \in AC$ sao cho $M'N' \parallel BC; M', N'$ không thuộc đường tròn (O) thì hiển nhiên đường tròn ngoại tiếp tam giác $AM'N'$ vẫn tiếp xúc với đường tròn (O) tại điểm A.*



Đây là tính chất khá cơ bản, bạn đọc có thể chứng minh dễ dàng. Bây giờ, chúng ta sẽ đến với một số khai thác khá thú vị bổ đề này thông qua các bài toán dưới đây.

Bài 1 (Iran MO 2021). *Cho tam giác ABC nhọn không cân có AD là đường cao và H là trực tâm. Gọi E là điểm đối xứng của H qua điểm A. Ta chọn điểm X trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE sao cho $AC \parallel DX$ và chọn điểm Y trên đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE sao cho $AB \parallel DY$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AXY tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*

Lời giải.



Gọi N, Q, P lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AH, BH, CH với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ($A \neq N, B \neq Q, C \neq P$). Suy ra $\widehat{ANB} = \widehat{ACB} = \widehat{NHB}$. Từ đó, tam giác HBN cân tại B. Dẫn đến $Đ_{BC}: H \leftrightarrow N$. Chứng

Được quét bằng CamScanner

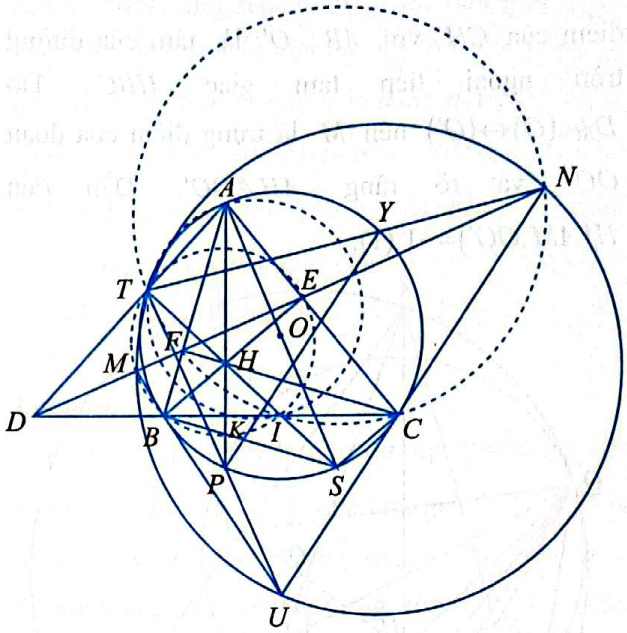
minh tương tự ta cũng được $Đ_{AB}: H \leftrightarrow P$ và $Đ_{AC}: H \leftrightarrow Q$.

Mặt khác, $\overline{HQ}.\overline{HB} = \overline{HA}.\overline{HN} = \overline{HE}.\overline{HD}$ nên điểm Q nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác EDB. Chứng minh tương tự, điểm P cũng nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác EDC. Suy ra $\widehat{YPC} = \widehat{YDC}$. Mà $AB // DY$ nên $\widehat{YDC} = \widehat{ABC} = \widehat{APC}$. Từ đó $\widehat{YPC} = \widehat{APC}$, hay 3 điểm P, A, Y thẳng hàng. Chứng minh tương tự, ta cũng được 3 điểm Q, A, X thẳng hàng. Suy ra $\overline{AP}.\overline{AY} = \overline{AE}.\overline{AD} = \overline{AX}.\overline{AQ}$. Dẫn đến tứ giác $PQYX$ nội tiếp.

Cũng theo chứng minh trên, do $AP = AH = AQ$ nên tam giác APQ cân tại A. Từ đó $\widehat{APQ} = \widehat{AQP} = \widehat{PYX}$. Suy ra $XY // PQ$. Áp dụng bổ đề trên ta được đường tròn ngoại tiếp tam giác AXY tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A.

Bài 2. *Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là trung điểm BC và H là trực tâm tam giác ABC; BH, CH lần lượt cắt AB, AC tại E, F tương ứng. Gọi D là giao điểm của EF và BC; T là giao điểm thứ hai của AD với đường tròn (O); M, N theo thứ tự là giao điểm của EF với đường tròn ngoại tiếp tam giác IBT và đường tròn ngoại tiếp tam giác ICT sao cho M khác phía E đối với F và N khác phía F đối với E. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác TMN tiếp xúc với đường tròn (O).*

Lời giải. Kẻ đường kính AS của đường tròn (O). Ta có tứ giác $BHCS$ là hình bình hành nên dễ dàng suy ra 4 điểm S, I, H, T thẳng hàng. Đường thẳng AH cắt đường thẳng BC tại K và cắt lại đường tròn (O) tại P. Theo tính chất của hàng điều hòa cơ bản ta có $(DK, BC) = -1 \Rightarrow A(TP, BC) = -1$. Từ đó tứ giác $TBPC$ điều hòa.



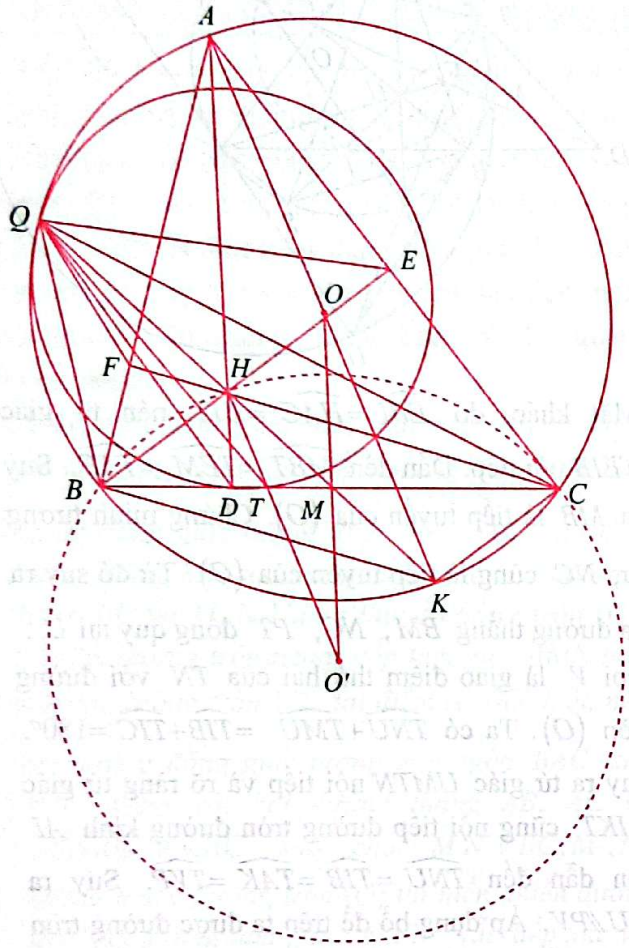
Mặt khác, do $\widehat{EBI} = \widehat{HAC} = \widehat{ETI}$ nên tứ giác $TEIB$ nội tiếp. Dẫn đến $\widehat{MBT} = \widehat{TEM} = \widehat{TAF}$. Suy ra MB là tiếp tuyến của (O). Chứng minh tương tự, NC cũng là tiếp tuyến của (O). Từ đó suy ra ba đường thẳng BM, NC, PT đồng quy tại U. Gọi V là giao điểm thứ hai của TN với đường tròn (O). Ta có $\widehat{TNU} + \widehat{TMU} = \widehat{TIB} + \widehat{TIC} = 180^o$. Suy ra tứ giác $UMTN$ nội tiếp và rõ ràng tứ giác $AIKT$ cũng nội tiếp đường tròn đường kính AI nên dẫn đến $\widehat{TNU} = \widehat{TIB} = \widehat{TAK} = \widehat{TVP}$. Suy ra $NU // PV$. Áp dụng bổ đề trên ta được đường tròn ngoại tiếp tam giác TMN tiếp xúc với đường tròn (O) tại T.

Bài 3. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có H là trực tâm. Gọi D là giao điểm của AH với BC; M là trung điểm cạnh BC; tia MH cắt đường tròn (O) tại Q; qua H kẻ đường thẳng song song với OA cắt BC tại T. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác QDT tiếp xúc với đường tròn (O).*

Lời giải. Kẻ đường kính AK của đường tròn (O). Ta có tứ giác $BHCK$ là hình bình hành nên dễ dàng suy ra 4 điểm K, M, H, Q thẳng hàng. Gọi E là giao điểm của BH với AC; F là giao

Được quét bằng CamScanner

điểm của CH với AB; O' là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC. Do $Đ_{BC}:(O)\leftrightarrow(O')$ nên M là trung điểm của đoạn OO' và rõ ràng $AH\parallel OO'$. Dẫn đến $H(AM,OO')=-1$ (1).



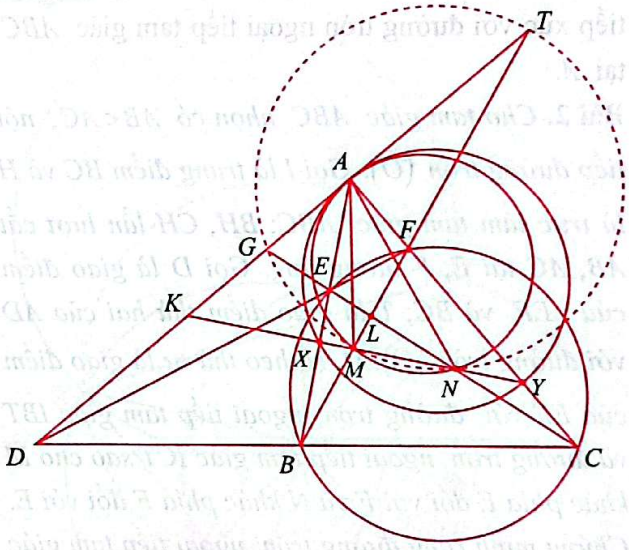
Lại có, theo giả thiết $HT\parallel AO$ nên $H(AK,OT)=-1$ hay $H(AM,OT)=-1$ (2). Từ (1) và (2) suy ra 3 điểm H, T, O' thẳng hàng. Từ đó hai đường thẳng HD, HT đẳng giác trong góc $\widehat{BHC}$ nên theo định lý Steiner ta có:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}.\frac{\overline{TB}}{\overline{TC}}=\frac{HB^2}{HC^2}\ (3)$$

Mặt khác, do $\Delta HFB\sim\Delta HEC$ nên $\frac{HB}{HC}=\frac{BF}{CE}$ và $\Delta QFB\sim\Delta QEC$ nên $\frac{BF}{CE}=\frac{QB}{QC}$. Từ đó $\frac{HB^2}{HC^2}=\frac{QB^2}{QC^2}$. Kết hợp với (3) ta được $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}.\frac{\overline{TB}}{\overline{TC}}=\frac{QB^2}{QC^2}$. Theo định lý Steiner đảo suy ra QD, QT là hai đường đẳng giác góc $\widehat{BQC}$. Áp dụng bổ đề trên trên ta suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác QDT tiếp xúc với đường tròn (O) tại Q.

Bài 4. *Cho tam giác nhọn ABC không cân. Gọi (O) là đường tròn đi qua hai điểm B, C cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E, F tương ứng $(E,F\neq A)$; M, N lần lượt là trung điểm của BF, CE. Giả sử đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại điểm D; đường thẳng MN lần lượt cắt cạnh AB, AC tại các điểm X, Y tương ứng. Chứng minh rằng AD là tiếp tuyến chung của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN và đường tròn ngoại tiếp tam giác AXY.*

Lời giải.



Gọi G, T lần lượt là giao điểm của AD với CE và BF; L là giao điểm của EC và BF; K là trung điểm của AD. Do $BCFE.AD$ là tứ giác toàn phần nên các điểm K, M, N, X, Y thẳng hàng (cùng nằm trên đường thẳng *Gauss-Newton* của tứ giác toàn phần) và ta cũng có $(DA,GT)=-1$. Suy ra $B(DA,GT)=-1$. Từ đó $B(CE,GL)=-1$. Với chú ý rằng N là trung điểm của CE nên theo hệ thức Maclaurin ta có:

$$\overline{LN}.\overline{LG}=\overline{LC}.\overline{LE}.$$

Được quét bằng CamScanner

Hoàn toàn tương tự, $\overline{LM}.\overline{LT}=\overline{LB}.\overline{LF}$.

Mặt khác, $\mathcal{P}_{L/(O)}=\overline{LB}.\overline{LF}=\overline{LE}.\overline{LC}$. Dẫn đến $\overline{LN}.\overline{LG}=\overline{LM}.\overline{LT}$. Suy ra tứ giác $MNTG$ nội tiếp đường tròn (w). Suy ra:

$$\mathcal{P}_{K/(w)}=\overline{KM}.\overline{KN}=\overline{KG}.\overline{KT}.$$

Mà K là trung điểm của AD nên theo hệ thức *Newton* ta có $KA^2=\overline{KG}.\overline{KT}=\overline{KM}.\overline{KN}$, hay KA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN (1).

Lại có $\Delta ABF\sim\Delta ACE$ nên suy ra:

$$\frac{BA}{BF}=\frac{CA}{CE}\Leftrightarrow\frac{BA}{2BM}=\frac{CA}{2CN}\Leftrightarrow\frac{BA}{BM}=\frac{CA}{CN}$$

hay $\Delta ABM\sim\Delta ACN$.

Từ đó $\widehat{BAM}=\widehat{CAN}$, dẫn đến AM, AN đẳng giác trong góc $\widehat{XAY}$. Áp dụng bổ đề trên ta được đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN và đường tròn ngoại tiếp tam giác AXY tiếp xúc nhau tại A (2). Từ (1) và (2) suy ra AD là tiếp tuyến chung của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN và đường tròn ngoại tiếp tam giác AXY.

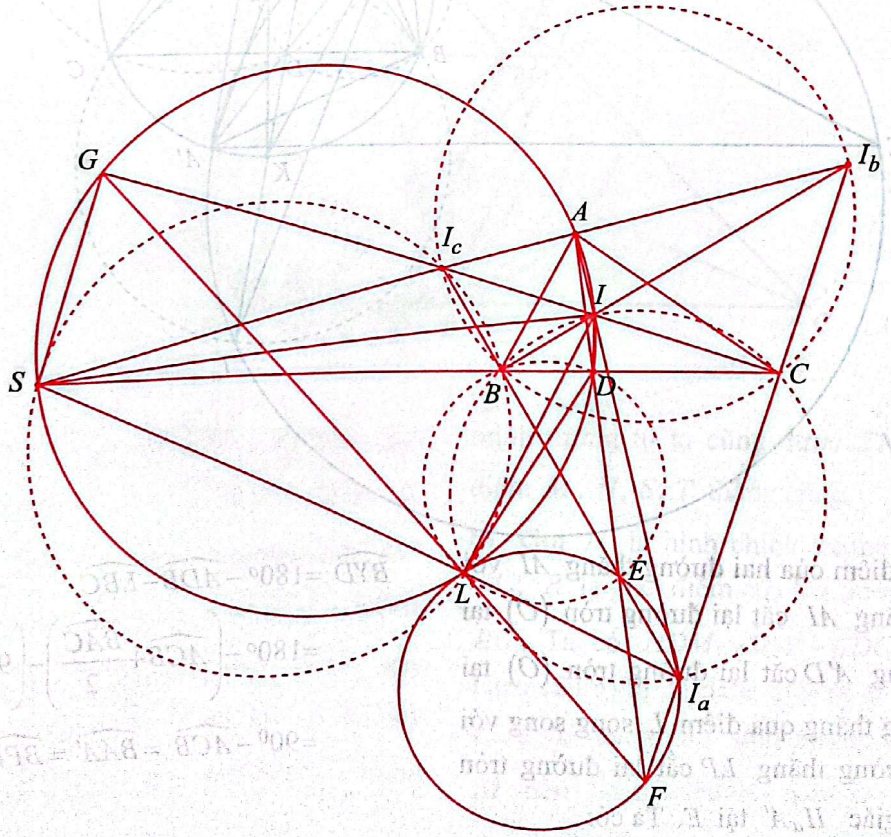
Bài 5 (IMO shorlist 2020). *Cho tam giác ABC với $AB<AC$ có I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác và I_a là tâm đường tròn bàng tiếp góc $\widehat{BAC}$. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với cạnh BC tại D. Gọi E là giao điểm của AD và BI_a, F là giao điểm của AD và CI_a. Chứng minh rằng hai đường tròn ngoại tiếp tam giác AID và tam giác I_aEF tiếp xúc nhau.*

Lời giải.

Gọi I_b, I_c lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp các góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ của tam giác ABC, S là giao điểm của hai đường thẳng I_bI_c và BC, đường thẳng IC cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác AID tại G và L là điểm *Miquel* của tứ giác toàn phần $DCI_aE.FB$. Dễ thấy 5 điểm I, B, L, I_a, C cùng nằm trên đường tròn đường kính II_a nên

$$\widehat{AIL}=180^o-\widehat{LII_a}=180^o-\widehat{LBI_a}=180^o-\widehat{LDE}=\widehat{ADL}.$$

Suy ra tứ giác $AIDL$ nội tiếp.



Được quét bằng CamScanner

Lại có, $\widehat{SAI}=\widehat{SDI}=90^o$ nên 6 điểm S, A, I, D, L và G cùng nằm trên đường tròn đường kính SI. Suy ra $\widehat{SLI}+\widehat{ILI_a}=180^o$, hay 3 điểm S, L, I_a thẳng hàng.

Mặt khác:

$$\widehat{I_aLF}=\widehat{I_aEF}=\widehat{FAI_b}-\widehat{I_aI_cI_b}=\widehat{SLD}-\widehat{SCI_a}.$$

Mà $I_aI_b\parallel SG$ (cùng vuông góc với IC) nên

$$\widehat{SCI_a}=\widehat{GSD}=\widehat{GLD}.$$

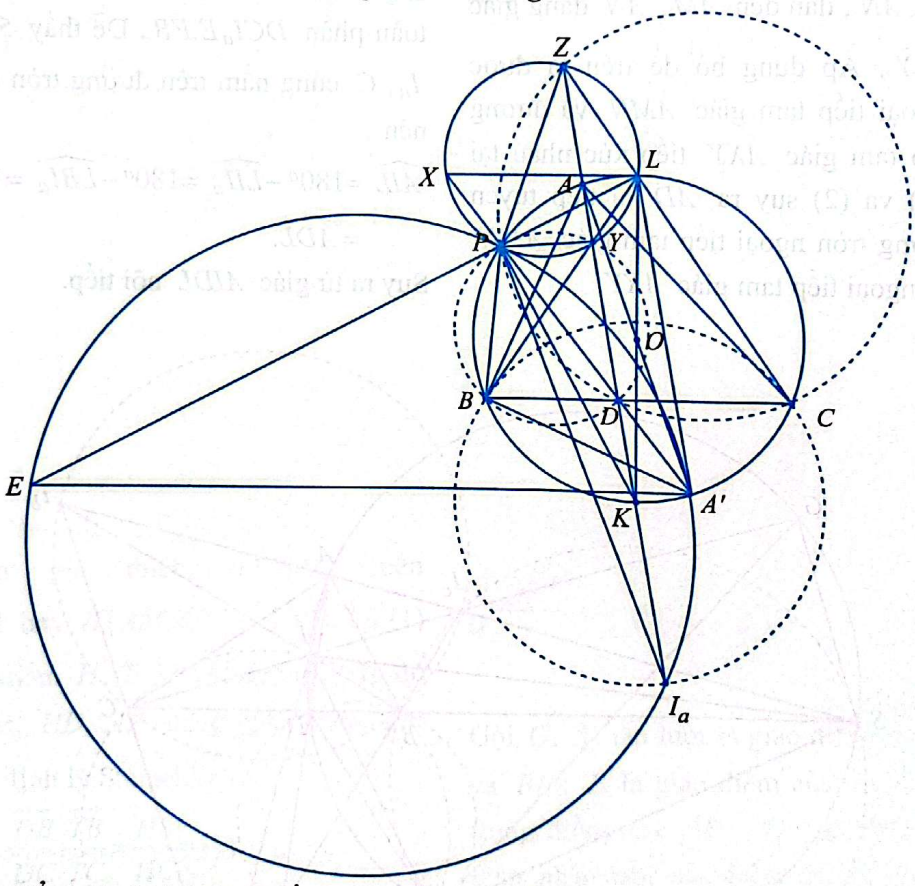
Từ đó: $\widehat{SLD}-\widehat{SCI_a}=\widehat{SLD}-\widehat{GLD}=\widehat{SLG}$,

hay $\widehat{I_aLF}=\widehat{SLG}$.

Dẫn đến 3 điểm F, L, G thẳng hàng. Xét tam giác LI_aF và tam giác GLS có $SG\parallel FI_a$ nên áp dụng bổ đề trên, ta suy ra được hai đường tròn ngoại tiếp tam giác AID và tam giác I_aEF tiếp xúc nhau tại L.

Bài 6 (India EGMO TST 2022). *Gọi I và I_a lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn bàng tiếp góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC không cân. A' là điểm đối xứng của A qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và L là điểm chính giữa cung $\widehat{BAC}$ của đường tròn (O). Hai đường thẳng LB và LC cắt đường thẳng AI tại Y và Z tương ứng. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác LYZ tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'II_a$.*

Lời giải.



Gọi D là giao điểm của hai đường thẳng AI với BC. Đường thẳng AI cắt lại đường tròn (O) tại K; đường thẳng $A'D$ cắt lại đường tròn (O) tại P và cắt đường thẳng qua điểm L song song với BC tại X; đường thẳng LP cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác II_aA' tại E. Ta có:

$$\widehat{BYD}=180^o-\widehat{ADB}-\widehat{LBC}$$
$$=180^o-\left(\widehat{ACB}+\frac{\widehat{BAC}}{2}\right)-\left(90^o-\frac{\widehat{BLC}}{2}\right)$$
$$=90^0-\widehat{ACB}=\widehat{BAA'}=\widehat{BPD}.$$

Được quét bằng CamScanner

Suy ra tứ giác $PYDB$ nội tiếp. Chứng minh tương tự, ta cũng có tứ giác $PZCD$ nội tiếp.

Từ đó $\widehat{LXP}=\widehat{PDB}=\widehat{PYB}=\widehat{PZL}$.

Suy ra 5 điểm X, Y, Z, L, P cùng nằm trên một đường tròn. Lại có $\overline{DP}.\overline{DA'}=\overline{DB}.\overline{DC}=\overline{DI}.\overline{DI_a}$ nên tứ giác $PIA'I_a$ nội tiếp.

Mặt khác, do $KI=KI_a$ và $KA'\perp II_a$ nên tam giác $IA'I_a$ cân tại A'. Với chú ý rằng tứ giác $ALA'K$ là hình chữ nhật nên $\widehat{A'I_aI}=\widehat{A'II_a}=\widehat{IA'L}$. Suy ra $A'L$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác $IA'I_a$. Dẫn đến:

$$\widehat{PEA'}=\widehat{PI_aA'}=\widehat{PA'L}$$
$$=\widehat{PA'A}+\widehat{AA'L}$$
$$=\widehat{PLA}+\widehat{ALX}=\widehat{XLP}.$$

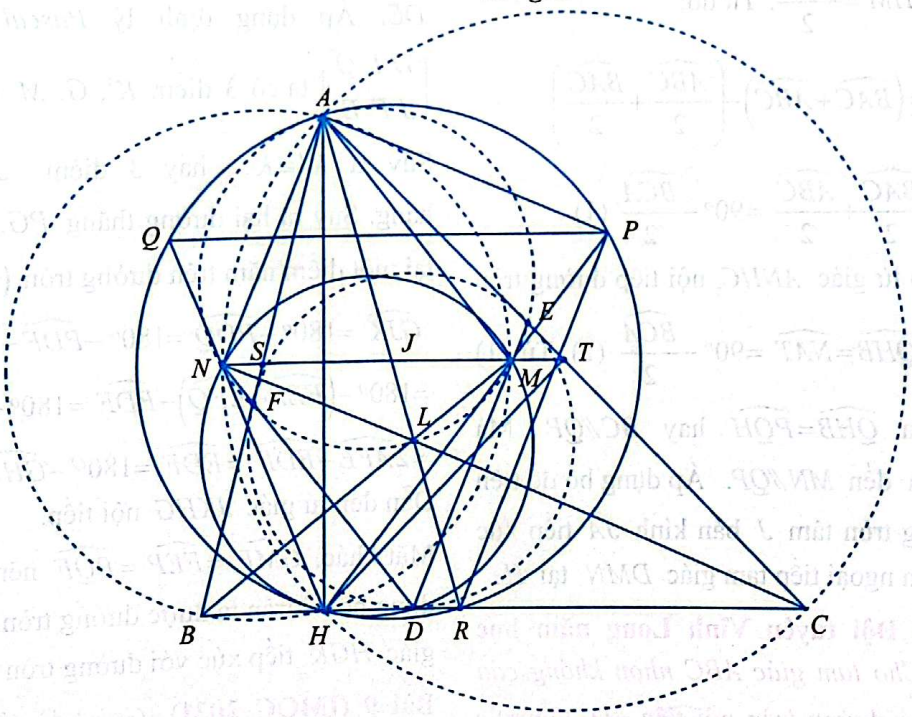
Suy ra $A'E\parallel XL$. Áp dụng bổ đề trên ta được đường tròn ngoại tiếp tam giác LYZ tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'II_a$ tại P.

Bài 7. (Chọn Đội tuyển Bắc Giang năm học 2024-2025) *Cho tam giác ABC không cân. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của IB, IC với DE, DF; S, T lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC.*

a) *Chứng minh rằng bốn điểm M, N, S, T thẳng hàng.*

b) *Gọi J là giao điểm của MN và IA. Chứng minh rằng đường tròn tâm J bán kính JA tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN.*

Lời giải.



a) Do các đường thẳng AD, BE, CF đồng quy tại điểm Gergonne nên ta có $M(DF,BA)=-1$. Với chú ý rằng BM là đường trung trực của DF nên BM là phân giác trong của góc $\widehat{FMD}$. Từ đó AM là phân giác ngoài của góc $\widehat{FMD}$, hay $MA\perp MB$. Dẫn đến tam giác SMB cân tại S. Suy ra $\widehat{SMB}=\widehat{SBM}=\widehat{MBC}$, hay $SM\parallel BC$. Chứng minh tương tự ta cũng được $TN\parallel BC$. Vậy, bốn điểm M, N, S, T thẳng hàng.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC; R là giao điểm của hai đường thẳng AI và BC. Ta có $\widehat{HDM}=180^o-\widehat{EDC}=180^o-\widehat{DEC}$. Theo câu a) ta dễ dàng suy ra 6 điểm A, N, F, I, M, E cùng nằm trên đường tròn đường kính AI nên $\widehat{DEC}=\widehat{ANM}$. Mà ST là đường trung

Được quét bằng CamScanner

trực của cạnh AH nên $\widehat{ANM}=\widehat{MNH}$. Từ đó $\widehat{HDM}=180^o-\widehat{MNH}$. Dẫn đến tứ giác $HDMN$ nội tiếp.

Lại có cũng do ST là đường trung trực của cạnh AH nên $JA=JR=JH$. Suy ra tam giác AHR nội tiếp đường tròn (J). Kẻ HN, HM cắt lại đường tròn (J) tại Q, P tương ứng. Ta có:

$$\widehat{PQH}=\widehat{PRC}=180^o-\widehat{ARP}-\widehat{ARB}$$

$$=180^o-\widehat{AHM}-\widehat{ACB}-\frac{\widehat{BAC}}{2}$$

$$=\left(180^o-\widehat{ACB}\right)-\left(\widehat{AHM}+\frac{\widehat{BAC}}{2}\right).$$

Mặt khác, do tứ giác $AMHB$ nội tiếp đường tròn tâm S nên $\widehat{AHM}=\frac{\widehat{ABC}}{2}$. Từ đó:

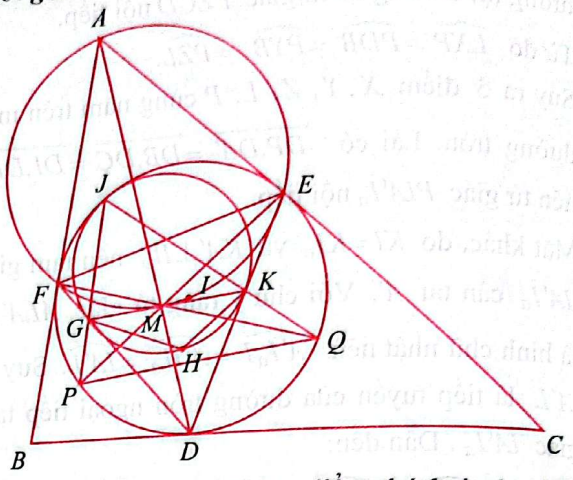
$$\widehat{PQH}=\left(\widehat{BAC}+\widehat{ABC}\right)-\left(\frac{\widehat{ABC}}{2}+\frac{\widehat{BAC}}{2}\right)$$

$$=\frac{\widehat{BAC}}{2}+\frac{\widehat{ABC}}{2}=90^o-\frac{\widehat{BCA}}{2}\ (1).$$

Tương tự, do tứ giác $ANHC$ nội tiếp đường tròn tâm T nên $\widehat{QHB}=\widehat{NAT}=90^o-\frac{\widehat{BCA}}{2}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{QHB}=\widehat{PQH}$ hay $BC//QP$. Mà $MN//BC$, dẫn đến $MN//QP$. Áp dụng bổ đề trên ta được đường tròn tâm J bán kính JA tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN tại H.

Bài 8 (Chọn Đội tuyển Vĩnh Long năm học 2024-2025). *Cho tam giác ABC nhọn không cân $(AB<AC)$, có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA và AB tại D, E, F tương ứng. Đường thẳng AD cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại M. Tiếp tuyến tại M của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF lần lượt cắt DE, DF tại K, G tương ứng. Gọi H là trực tâm của tam giác DKG. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác HGK tiếp xúc với đường tròn (I).*

Lời giải.



Gọi P, Q lần lượt là giao điểm thứ hai của ME, MF với đường tròn (I). Đường thẳng PG cắt lại (I) tại J. Gọi K' là giao điểm của JQ và DE. Áp dụng định lý *Pascal* cho 6 điểm $\begin{pmatrix} D & P & Q \\ J & F & E \end{pmatrix}$ ta có 3 điểm K', G, M thẳng hàng.

Suy ra $K'\equiv K$, hay 3 điểm J, K, Q thẳng hàng. Suy ra hai đường thẳng PG, QK cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (I). Từ đó:

$$\widehat{GJK}=180^o-\widehat{PDQ}=180^o-\widehat{PDF}-\widehat{FDE}-\widehat{EDQ}$$

$$=180^o-\left(\widehat{FEP}+\widehat{EFQ}\right)-\widehat{EDF}=180^o-\widehat{FAE}-\widehat{EDF}$$

$$=2\widehat{AFE}-\widehat{EDF}=\widehat{EDF}=180^O-\widehat{GHK}.$$

Dẫn đến tứ giác $JKHG$ nội tiếp.

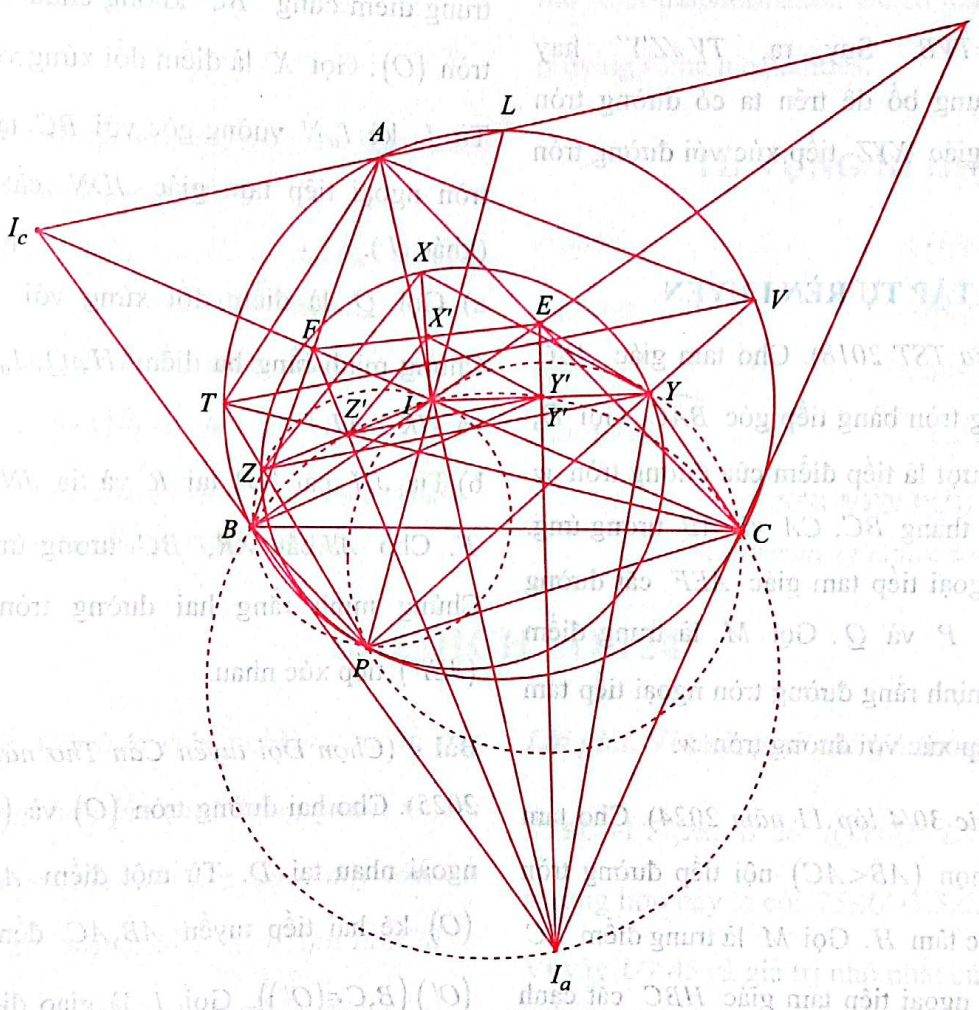
Mặt khác, $\widehat{GMF}=\widehat{FEP}=\widehat{PQF}$ nên $PQ//GK$. Áp dụng bổ đề trên ta được đường tròn ngoại tiếp tam giác HGK tiếp xúc với đường tròn (I) tại J.

Bài 9 (IMOC 2021). *Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và I_a là tâm đường tròn bàng tiếp góc $\widehat{BAC}$; E là giao điểm của BI và AC; F là giao điểm của IC và AB; điểm đối xứng của điểm I qua EF, FI_a, EI_a lần lượt là X, Z, Y. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*

Lời giải.

Được quét bằng CamScanner

Gọi L là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BAC}$ của đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC; đường thẳng LI cắt lại đường tròn (O) tại P; đường thẳng PZ, PY cắt lại đường tròn (O) tại T, V tương ứng; X', Y', Z' lần lượt là trung điểm của các cạnh IX, IY, YZ; I_b, I_c lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc $\widehat{ABC}$ và góc $\widehat{BCA}$ tương ứng.



Theo giả thiết, hai điểm I và Y đối xứng nhau qua đường thẳng EI_a nên

$$\widehat{EYI_a}=\widehat{EII_a}=180^o-\widehat{BII_a}$$
$$=90^o+\frac{\widehat{ACB}}{2}=\widehat{ECI_a}.$$

Suy ra tứ giác $EYCI_a$ nội tiếp.

Mặt khác, do 6 điểm I_a, B, Z', I, Y', C cùng nằm trên đường tròn đường kính II_a nên

$$\widehat{IYC}=\widehat{EYC}-\widehat{EYI}=180^o-\widehat{EI_aC}-\widehat{EIY}$$
$$=180^o-\left(\widehat{EI_aC}+\widehat{EI_aB}\right)$$
$$=180^o-\widehat{BI_aC}=\widehat{BIC}$$
$$=90^o+\frac{\widehat{BAC}}{2}=180^o-\widehat{IPC}.$$

Suy ra, tứ giác $PIYC$ nội tiếp. Chứng minh tương tự, tứ giác $PIZB$ cũng nội tiếp.

Lại có,

$$\widehat{TPV}=180^o-\widehat{TAV}$$
$$=180^o-\widehat{BAC}-\widehat{TAB}-\widehat{VAC}$$
$$=180^o-\widehat{BAC}-\widehat{TPB}-\widehat{VPC}$$
$$=180^o-\widehat{BAC}-\widehat{ZIB}-\widehat{YIC}$$
$$=\left(\widehat{I_cAB}-\widehat{ZIB}\right)+\left(\widehat{I_bAC}-\widehat{YIC}\right).$$

Với chú ý rằng các tứ giác AI_cBI, AI_bCI, $FX'IZ'$ và $EX'IY'$ nội tiếp nên

$$\left(\widehat{I_cAB}-\widehat{ZIB}\right)+\left(\widehat{I_bAC}-\widehat{YIC}\right)=\widehat{FIZ'}+\widehat{Y'IE}$$

Được quét bằng CamScanner

$=\widehat{FX'Z'}+\widehat{EX'Y'}$

$=180^o-\widehat{Z'X'Y'}.$

Từ đó $\widehat{TPV}=180^o-\widehat{ZXY}$. Suy ra, tứ giác $PZXY$ nội tiếp.

Mặt khác, $\widehat{CBV}=\widehat{CPV}=\widehat{CIY}=\widehat{CBY'}$ nên 3 điểm B, Y', V thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta cũng có 3 điểm C, Z', T thẳng hàng. Từ đó $\widehat{Z'Y'B}=\widehat{Z'CB}=\widehat{TVB}$. Suy ra, $TV//Z'Y'$ hay $TV//ZY$. Áp dụng bổ đề trên ta có đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ tiếp xúc với đường tròn (O) tại P.

BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN

Bài 1 (*Romania TST 2018*). Cho tam giác ABC có w là đường tròn bàng tiếp góc $\widehat{BAC}$. Gọi D, E và F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn w với các đường thẳng BC, CA và AB tương ứng. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường thẳng BC tại P và Q. Gọi M là trung điểm AD. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ tiếp xúc với đường tròn w.

Bài 2 (*Olympic 30/4 lớp 11 năm 2024*). Cho tam giác ABC nhọn $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm H. Gọi M là trung điểm BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC cắt cạnh AM tại K; tiếp tuyến của (O) tại A cắt đường thẳng BC ở điểm S.

a) Chứng minh rằng $MK.MA=MB^2$ và $SA=SK$.

b) Đường thẳng SK cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q. Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác (TPQ) tiếp xúc với đường tròn (O).

Bài 3 (*Chọn Đội tuyển Kiên Giang năm học 2024-2025*). Cho tam giác ABC có O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC tại D. Kẻ AH vuông góc với BC tại H. Gọi I_a là tâm đường tròn bàng tiếp góc $\widehat{CAB}$ của tam giác ABC; J là trung điểm cung $\widehat{BC}$ không chứa A của đường tròn (O). Gọi X là điểm đối xứng với J qua O. Từ I_a kẻ I_aN vuông góc với BC tại N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác JDN cắt AJ tại K (khác J).

a) Gọi Q là điểm đối xứng với I qua BC. Chứng minh rằng ba điểm H, Q, I_a thẳng hàng và $HK\perp AJ$.

b) Tia JH cắt (O) tại R và tia JN cắt (O) tại F. Cho AJ cắt XR, BC tương ứng tại E, L. Chứng minh rằng hai đường tròn (JLN) và (JEF) tiếp xúc nhau.

Bài 4 (*Chọn Đội tuyển Cần Thơ năm học 2024-2025*). Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài nhau tại D. Từ một điểm A bất kỳ trên (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O') $(B, C\in(O'))$. Gọi I là giao điểm của AD và BC. M là trung điểm BC. Đường tròn đường kính AI cắt lại đường tròn (O) tại P (P khác A).

a) Chứng minh đường thẳng AP, IM và tiếp tuyến tại D của đường tròn (O) đồng quy tại một điểm.

b) Gọi G là giao điểm của PD và BC. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác GPM tiếp xúc với đường tròn (O).

Được quét bằng CamScanner

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 126

PROBLEM. *Given two sequences* $a_1, ..., a_n$ *and* $b_1, ..., b_n$. *Let*

$$B_1 = b_1,\ B_2 = b_1 + b_2, ..., B_n = b_1 + b_2 + ... + b_n.$$

Prove that

$$a_1b_1 + ... + a_nb_n = (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + ... + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_nB_n.$$

Solution. We expand and regroup the right hand side from the end. For example,

$$(a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_nB_n = a_{n-1}B_{n-1} + a_n(B_n - B_{n-1}) = a_{n-1}B_{n-1} + a_nb_n.$$

Then, we continue in the same way to get the equality: $(a_{n-2} - a_{n-1})B_{n-2} + a_{n-1}B_{n-1} + a_nb_n$

$$= a_{n-2}B_{n-2} + a_{n-1}(B_{n-1} - B_{n-2}) + a_nb_n = a_{n-2}B_{n-2} + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n.$$

Keep doing like that, we can transform the right hand side into the left hand side.

Remark: The above inequality is usually called the Abel transformation which plays a key role in proving some inequalities.

TỪ VỰNG/KÍ HIỆU

expand : *khai triển*

regroup : *nhóm lại*

equality : *đẳng thức*

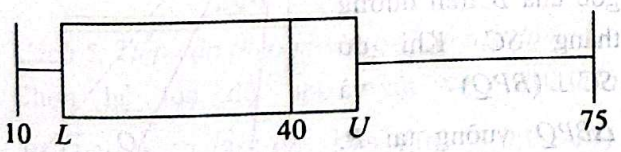
transform : *biến đổi*

NGUYEN PHU HOANG LAN

(*University of Education, VNU, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 124

BÀI TOÁN. *Một học viên nghiên cứu đã cân các quả trứng thằn lằn (tính bằng* gram*) và ghi lại các kết quả. Biểu đồ hộp dưới đây tóm tắt các kết quả đó, trong đó L và U lần lượt là tứ phân vị dưới và tứ phân vị trên.*



Khoảng biến thiên tứ phân vị (IQR) là 20 gram *và không có giá trị ngoại lai trong các kết quả. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của U.*

Lời giải. Vì không có các giá trị ngoại lai, ta có: $75 \le U + 1.5IQR$, ở đó $IQR = U - L$. Vì vậy trong trường hợp này ta có: $75 \le U + 1.5 \times 20 = U + 30$.

Vì vậy $U \ge 45$ và giá trị nhỏ nhất của U là 45.

Ghi chú. Bài toán này được trích từ đề thi Toán của chương trình International Baccalaureate.

Nhận xét. Hoan nghênh bạn *Dương Trường Giang*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên** và bạn *Nguyễn Hùng Cường*, phường An Nhơn, **Gia Lai** đã có bài dịch tốt.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Được quét bằng CamScanner

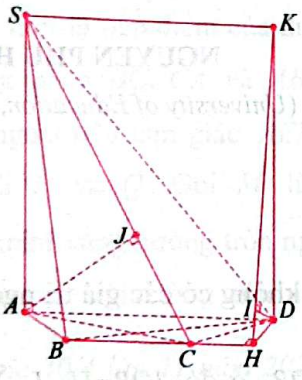


BÀI TOÁN 105. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AB=BC=CD=2, AD=4$, cạnh bên $SA=2\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính côsin góc phẳng nhị diện $[B;SC;D]$.*

Lời giải.

1) *Trước hết ta sẽ chứng minh góc phẳng nhị diện $[B,SC,D]$ là góc tù.*

Đặt $[B,SC,D]=\alpha$. Dễ thấy hình thang $ABCD$ là nửa lục giác đều.



Cách 1. $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$

$\Rightarrow (SCD) \perp (SAC)$ (1).

Hai điểm B và D khác phía so với đường thẳng AC nên điểm B và D khác phía so với mặt phẳng (SAC) (2).

Từ (1) và (2) suy ra góc phẳng nhị diện $[B,SC,D]$ là góc tù và $\alpha=90^0+\beta$ (với $\beta=[B,SC,A]$, β nhọn).

Cách 2. Dựng K là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật $SADK$, H là hình chiếu vuông góc của D lên đường thẳng BC, $\widehat{BCD}=120^\circ$. Suy ra H nằm ngoài cạnh BC. Khi đó ta có:

$\begin{cases} AD \perp DH \\ AD \perp DK \end{cases} \Rightarrow AD \perp (DHK);$

$BC // AD \Rightarrow BC \perp (DHK).$

Gọi I là hình chiếu vuông góc của D trên đường thẳng HK, suy ra I là hình chiếu vuông góc của D trên mp(SBC). Vì tam giác DHK vuông tại D điểm I thuộc cạnh HK, trong mp$(SBCK)$ có điểm B và I khác phía so với đường thẳng SC, suy ra góc phẳng nhị diện $[B,SC,D]$ là góc tù.

2) *Tính số đo góc α.*

Cách 1. $\cos\alpha=\cos(\beta+90^\circ)=-\sin\beta.$

Gọi J là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng SC. Ta có:

$AC=\sqrt{AD^2-CD^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3};$

$\frac{1}{AJ^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{24}+\frac{1}{12}=\frac{1}{8}\Rightarrow AJ=2\sqrt{2}.$

Suy ra: $d(A,(SBC))=d(D,(SBC))=DI,$

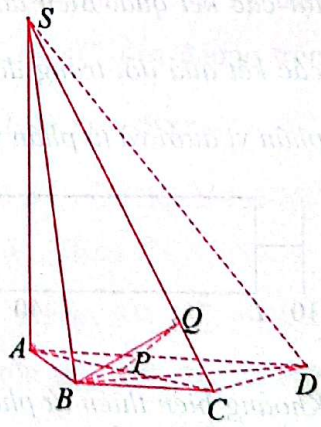
$HD=\sqrt{3}$ (ΔHCD là nửa tam giác đều),

do đó: $\frac{1}{DI^2}=\frac{1}{DK^2}+\frac{1}{DH^2}=\frac{1}{(2\sqrt{6})^2}+\frac{1}{(\sqrt{3})^2}$

$=\frac{3}{8}\Rightarrow DI=\frac{2\sqrt{6}}{3}.$

Vậy: $\sin\beta=\frac{d(A,(SBC))}{AJ}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$

Cách 2. Gọi P là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng AC, Q là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng SC. Khi đó $SC \perp (BPQ)$ và ΔBPQ vuông tại P, $\beta=\widehat{BQP}$.



Ta có:

$SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=6,\ SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=2\sqrt{7},$

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.BA.BC.\sin 120^\circ=\sqrt{3}$

Được quét bằng CamScanner

$$\Rightarrow BP = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1.$$

Từ đó ta có: $\cos\widehat{BCS} = \dfrac{SC^2 + BC^2 - SB^2}{2.SC.BC} = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \widehat{BCS} = 60°.$$

Do đó: $S_{\Delta SBC} = \dfrac{1}{2}.SC.BC.\sin 60° = 3\sqrt{3}$

$$\Rightarrow BQ = \frac{2S_{\Delta SBC}}{SC} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}.$$

Vậy: $\sin\beta = \dfrac{BP}{BQ} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

Cách 3. Tiếp cận theo công thức tính nhanh thể tích.

Ta có: $S_{\Delta SCD} = \dfrac{1}{2}.SC.CD = 6,$

$$V_{S.BCD} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta BCD} = \frac{1}{3}.2\sqrt{6}.\sqrt{3} = 2\sqrt{2}.$$

Mặt khác: $V_{S.BCD} = \dfrac{2.S_{\Delta SBC}.S_{\Delta SCD}.\sin\alpha}{3.SC}$

$$= \frac{2.3\sqrt{3}.6.\sin\alpha}{3.6} = 2\sqrt{3}\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Cách 4. Tiếp cận theo công thức tính nhanh thể tích.

Ta có: $V_{SABC} = \dfrac{2.S_{\Delta SBC}.S_{\Delta SAC}.\sin\beta}{3.SC}$

$$= \frac{2.3\sqrt{3}.6\sqrt{2}.\sin\beta}{3.6} = 2\sqrt{6}\sin\beta$$

$$\Rightarrow \sin\beta = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

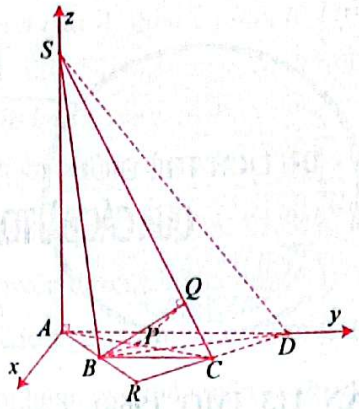
Cách 5. Tiếp cận theo phương pháp toạ độ hoá.

Chọn hệ toạ độ như hình vẽ: $A(0;0;0)$, $B(\sqrt{3};1;0)$, $C(\sqrt{3};3;0)$, $D(0;4;0)$, $S(0;0;2\sqrt{6})$.

Khi đó: $\overrightarrow{SB} = (\sqrt{3};1;-2\sqrt{6})$, $\overrightarrow{BC} = (0;2;0)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{BC}\right] = (4\sqrt{6};0;2\sqrt{3}).$$

Chọn $\overrightarrow{n_1} = (2\sqrt{2};0;1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBC).



Ta có:

$$\overrightarrow{SC} = (\sqrt{3};3;-2\sqrt{6}), \overrightarrow{SD} = (0;4;-2\sqrt{6})$$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right] = (2\sqrt{6};6\sqrt{2};4\sqrt{3}).$$

Chọn $\overrightarrow{n_2} = (\sqrt{6};3\sqrt{2};2\sqrt{3})$ là một vectơ pháp của tuyến mặt phẳng (SCD). Suy ra:

$$\cos\alpha = -\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = -\frac{6\sqrt{3}}{3.6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

NGUYỄN QUANG NAM

(GV Trường THPT Quỳ Hợp 2, Nghệ An

Nhận xét. Toà soạn nhận được bài của bạn *Nguyễn Hoàng Anh*, 11A1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, **TP. Hồ Chí Minh** cho chuyên mục này. Bạn đã đóng góp một cách giải, khác với những cách giải trên của bạn *Nguyễn Quang Nam*, người giới thiệu bài toán, xin hoan nghênh bạn.

KHÁNH BÌNH *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 107 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30/4/2026.

BÀI TOÁN 107. *Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} = 60^0$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm P, Q. Chứng minh rằng $\widehat{PMQ} = 90^0$ khi và chỉ khi*

$$BP + \sqrt{3}CQ = BC.$$

(Ví dụ 4, trang 69, tập 1, SGK Toán 10 – Kết nối tri thức với cuộc sống).

LA ĐẠI CƯƠNG

(GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị)

Được quét bằng CamScanner



BÀI TOÁN 113 (IMO 1968). *Cho hệ phương trình với $x_1, x_2, ..., x_n$ là các ẩn số:*

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = x_2 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ ax_{n-1}^2 + bx_{n-1} + c = x_n \\ ax_n^2 + bx_n + c = x_1 \end{cases},$$

trong đó a, b, c là các số thực và $a \neq 0$. Chứng minh rằng:

a) *hệ không có nghiệm thực nếu $(b-1)^2 - 4ac < 0$.*

b) *hệ có một nghiệm duy nhất nếu $(b-1)^2 - 4ac = 0$.*

c) *hệ có hơn một nghiệm thực nếu $(b-1)^2 - 4ac > 0$.*

Lời giải. Trước hết ta xét trường hợp $a > 0$. Đề bài gợi ý cho ta xét tam thức bậc hai:

$$f(t) = at^2 + (b-1)t + c.$$

Biến đổi hệ đã cho thành hệ tương đương:

$$\begin{cases} ax_1^2 + (b-1)x_1 + c = x_2 - x_1 \\ ax_2^2 + (b-1)x_2 + c = x_3 - x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ ax_n^2 + (b-1)x_n + c = x_1 - x_n \end{cases} \quad (1).$$

Đặt $y_1 = x_2 - x_1$, $y_2 = x_3 - x_2, ..., y_n = x_1 - x_n$, thì hệ (1) có thể viết dưới dạng

$$y_i = f(x_i), i = 1, 2, ..., n \quad (2)$$

và để ý rằng ta luôn có: $y_1 + y_2 + ... + y_n = 0$ (3).

a) Nếu $(b-1)^2 - 4ac < 0$ thì $\Delta < 0$, suy ra $f(t) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ (do $a > 0$), nhưng điều này mâu thuẫn với (3). Vì vậy trong trường hợp này hệ (2), do đó hệ đã cho không thể có nghiệm thực.

b) Nếu $(b-1)^2 - 4ac = 0$ thì tam thức $f(t)$ có một nghiệm duy nhất $t_0 = \dfrac{1-b}{2a}$ và nếu $t \neq t_0$ thì $f(t) > 0$. Từ (2) ta thấy rằng $y_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., n$, do đó đẳng thức (3) chỉ xảy ra nếu $y_1 = y_2 = ... = y_n = 0$, vì vậy ta phải có:

$$f(x_i) = 0, i = 1, 2, ..., n,$$

hay $x_1 = x_2 = ... = x_n = \dfrac{1-b}{2a}$. Vậy trong trường hợp này hệ (2), do đó hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x_1 = x_2 = ... = x_n = \dfrac{1-b}{2a}$.

c) Nếu $(b-1)^2 - 4ac > 0$ thì tam thức $f(t)$ có hai nghiệm phân biệt: $t_1 = \dfrac{1-b-\sqrt{(b-1)^2 - 4ac}}{2a}$,

$$t_2 = \frac{1-b+\sqrt{(b-1)^2 - 4ac}}{2a}.$$

Rõ ràng khi đó hệ (1), do đó hệ đã cho được nghiệm đúng nếu ta lấy $x_1 = x_2 = ... = x_n = t_1$ hoặc $x_1 = x_2 = ... = x_n = t_2$. Như vậy trong trường hợp này hệ đã cho có ít nhất hai nghiệm đã nêu.

Trường hợp $a < 0$ cũng được xét tương tự.

Nhận xét. Hoan nghênh bạn *Vũ Đức Duy*, phường Bình Lợi Trung, **TP. Hồ Chí Minh** và bạn *Nguyễn Hùng Cường*, phường An Nhơn, **Gia Lai** đã có lời giải đúng cho bài toán này.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30/4/2026.

BÀI TOÁN 115. *Tìm tất cả các số tự nhiên a, b, c khác 0 sao cho các nghiệm của các phương trình:*

$$x^2 - 2ax + b = 0;$$

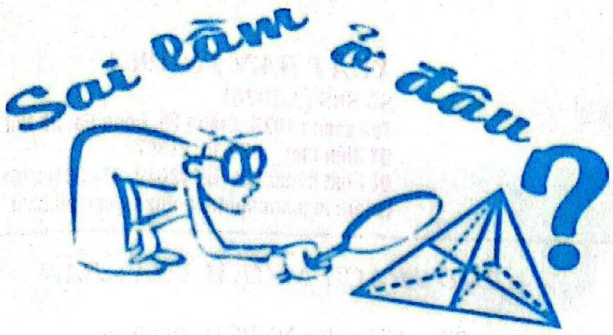
$$x^2 - 2bx + c = 0;$$

$$x^2 - 2cx + a = 0$$

đều là số tự nhiên.

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

Được quét bằng CamScanner



GIẢI ĐÁP: SAI Ở ĐÂU NHỈ ?

(Đề đăng trên TH&TT số 581, tháng 11 năm 2025)

Phân tích sai lầm. Lời giải chưa tìm các số có chữ số $a_2=0$, số có dạng $\overline{00a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$ có trong 4374 số. Các số dạng này có 2.3^5 số.

Tương tự $a_i=0\,(i=3,4,...,7)$, $a_8=0$ có 1 số (các a_i đồng thời bằng 0). Số các số này là:

$$2(3^5+3^4+3^3+3^2+3^1+1)+1=729$$

(số các số không là số cần tìm).

Do đó kết quả đúng phải là:

$$4374-(1458+729)=2187.$$

Có thể giải bài toán bằng cách đơn giản hơn như sau.

a_1 không thể là số 0; a_1 không thể là số 2 vì số tự nhiên nhỏ nhất có 9 chữ số là 2.10^8 không nhỏ hơn 2.10^8. Chỉ có 1 cách chọn $a_1=1$.

Các số từ a_2 đến a_8 mỗi số đều có 3 cách chọn.

Chữ số a_9 chỉ có 1 cách chọn (vì nếu $a_1+...+a_8$ chia cho 3 dư 0 thì chọn $a_9=0$, dư 1 thì chọn $a_9=2$ và dư 2 thì chọn $a_9=1$).)

Suy ra có tất cả là $3^7=2187$ số.

Nhận xét. Không có bạn nào phát hiện được sai lầm trong bài này.

KIHIVI

ĐÚNG HAY KHÔNG ?



Đề bài. *Cho tập $A=\{1;2;3;4;5;\ldots;100\}$. Chọn tùy ý một tập con gồm 3 phần tử của A sao cho tổng 3 phần tử đó bằng 91. Tính xác suất để chọn được tập con của A gồm 3 phần tử lập thành cấp số nhân có công bội là số nguyên dương.*

Lời giải của bạn Giang.

Gọi M là biến cố cần tính xác suất.

Ta thấy rằng, phương trình $a+b+c=91$ có C_{90}^2 nghiệm nguyên dương.

Trong số các nghiệm nguyên dương $(a;b;c)$ đó, không có nghiệm nào thỏa mãn $a=b=c$.

Nếu $\begin{cases}a=b\neq c\\a+b+c=91\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\neq c\\2a+c=91\end{cases}$ thì có 45 cách chọn a (là số nguyên dương từ 1 đến 45) và mỗi cách chọn a có một cách chọn b và c. Do đó, trong số các nghiệm nguyên dương $(a;b;c)$ của phương trình $a+b+c=91$, có 45 nghiệm thỏa mãn $a=b\neq c$. Tương tự, cũng sẽ có 45 nghiệm thỏa mãn $a\neq b=c$, có 45 nghiệm thỏa mãn $b\neq a=c$. Từ đó suy ra số nghiệm nguyên dương $(a;b;c)$ của phương trình $a+b+c=91$ sao cho a,b,c đôi một phân biệt là $C_{90}^2-45\cdot3$. Vậy số phần tử không gian mẫu là $|\Omega|=C_{90}^2-45\cdot3=3870$.

Nếu ba số a,b,c có tổng bằng 91 và lập thành cấp số nhân có công bội q nguyên dương thì

$$a+aq+aq^2=91\Rightarrow1+q+q^2\in U(91)=\{1;7;13;91\}$$

$\Rightarrow q\in\{2;3;9\}$. Từ đó tìm ra các tập con gồm 3 phần tử của A sao cho 3 phần tử đó có tổng bằng 91 và chúng lập thành cấp số nhân có công bội là số nguyên dương là $(1;9;81),(7;21;63),(13;26;52)$.

Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố M, $|M|=3$.

$$\text{Vậy } P(M)=\frac{|M|}{|\Omega|}=\frac{3}{3870}=\frac{1}{1290}.$$

Các bạn có tìm ra kết quả như vậy không?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, xã Yên Phong, Bắc Ninh)

Được quét bằng CamScanner

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 585 (3.2026)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
NGUYỄN TIẾN THANH
Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam
PHẠM VĨNH THÁI
Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD
LÊ HỒNG SƠN

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

***Tổng biên tập*: NGUYỄN HỮU BẮC** ***Thư kí Tòa soạn*: VÕ THỊ HỒNG THU**

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* TRẦN HỮU NAM, *TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Nguyễn Công Chuẩn – Ứng dụng của định lý Viète để giải một số dạng toán liên quan đến phương trình bậc hai.

9 Hướng dẫn giải đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 thành phố Hà Nội, năm học 2025 – 2025.

12 Đề thi học sinh giỏi Toán 9 tỉnh Thanh Hóa, năm học 2025 – 2026.

14 **Diễn đàn dạy học toán**
Dương Đình Dũng – Khai thác giả thiết hình học để giải một số bài toán trong mặt phẳng tọa độ. (*Kỳ 2*).

20 **Đề ra kỳ này** *Problems in This Issue*
T1/585, ..., T12/585, L1/585, L2/585.

23 **Giải bài kì trước**
Solutions to Previous Problems
T1/581, ..., T12/581, L1/581, L2/581

34 **Phương pháp giải toán**
Nguyễn Văn Thanh – Bổ đề về hai đường tròn tiếp xúc nhau.

43 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 126 – Bài dịch số 124.

44 **Nhiều cách giải cho một bài toán** – Giải bài toán 105 – Đề bài toán 107.

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay** – Giải bài toán 113. Đề bài toán 115.

47 **Sai lầm ở đâu?**

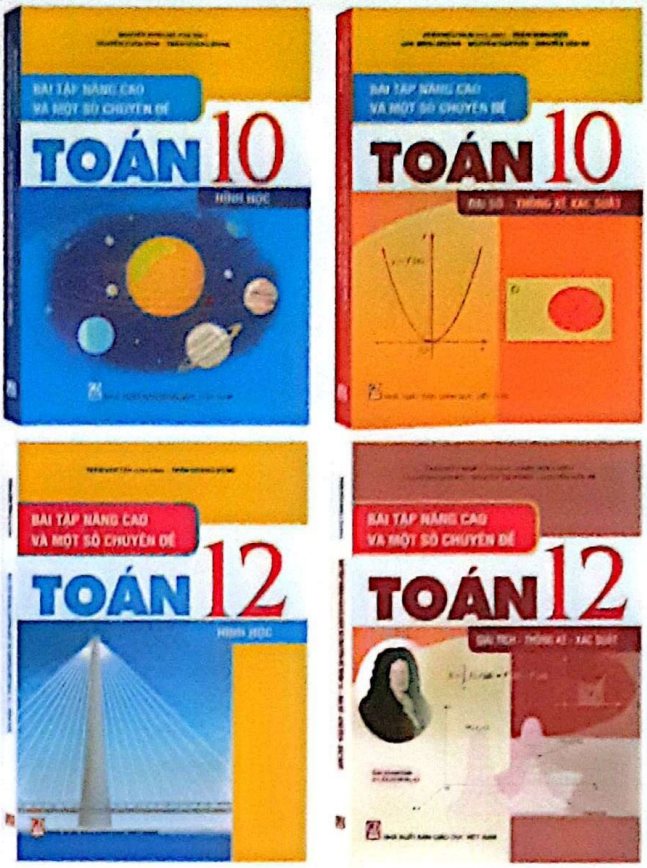
***Biên tập*:** KIM THANH, NHƯ HOÀNG
***Trị sự, phát hành*:** TRẦN THỊ MINH HIỀN
***Mĩ thuật*:** QUỐC HIỆP, THANH LONG
***Thiết kế, chế bản*:** MINH HÒA

Mã Bđ: (C168)

Được quét bằng CamScanner

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Giới thiệu bộ sách



BÀI TẬP NÂNG CAO VÀ MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ TOÁN

(DÀNH CHO HỌC SINH THPT – THEO CHƯƠNG TRÌNH GDPT 2018)

TÁC GIẢ: TRẦN VĂN TẤN, NGUYỄN MINH HÀ, TRẦN QUANG HÙNG, TRẦN HỮU NAM,...

Bộ sách "Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Toán" gồm các cuốn:

– Bài tập nâng cao và một số chuyên đề - Đại số, Giải tích, Xác suất, Thống kê.

– Bài tập nâng cao và một số chuyên đề - Hình học

Mỗi cuốn sách gồm hai phần:

Phần một gồm các chương, bài bám sát Chương trình giáo dục phổ thông 2018, mỗi bài gồm:

• Tóm tắt kiến thức: tóm tắt những kiến thức trọng tâm của bài, được vận dụng để giải các bài tập, các dạng toán trong bài. Tuỳ theo nội dung từng bài mà ở phần này có thể có thêm phần Kiến thức bổ sung nâng cao liên quan đến chủ đề của bài học.

• Ví dụ minh hoạ: phương pháp giải, các ví dụ giúp học sinh hiểu sâu, rộng hơn những kiến thức đã học, đồng thời có được những kĩ năng cần thiết cho việc giải toán.

• Bài tập đề nghị: bổ sung các bài tập đề nghị cho mỗi dạng toán. Các bài tập được phân loại từ cơ bản đến nâng cao.

Phần hai gồm các Chuyên đề (dành cho học sinh khá, giỏi): các dạng toán thường xuất hiện trong các kì thi vào Đại học&Cao đẳng, trong các kì thi học sinh giỏi và Olympic. Các chuyên đề sẽ giúp học sinh phát triển kiến thức đã học, cung cấp cho học sinh cơ sở của những phương pháp giải toán thường sử dụng.

Sách được biên soạn theo Chương trình Giáo dục phổ thông 2018 để học sinh có thể củng cố kiến thức của mình ngay sau mỗi giờ học trên lớp, đồng thời bổ sung và khắc sâu thêm một số vấn đề lí thuyết nhằm bồi dưỡng học sinh giỏi.

BẠN ĐỌC TÌM MUA SÁCH TẠI

CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

Địa chỉ: Tầng 4, Tòa Diamond Flower, số 48 Lê Văn Lương, Q. Thanh Xuân, TP Hà Nội

Điện thoại: 024.35121533 (số máy lẻ 118) - 0904893398 | **Fax:** 024.35123278

Email: kinhdoanh.heps@gmail.com | **Website:** http://xbgdhn.vn/

Được quét bằng CamScanner

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
CTCP ĐẦU TƯ VÀ PHÁT TRIỂN GIÁO DỤC HÀ NỘI

TỰ TIN CHINH PHỤC TIẾNG ANH VỚI GLOBAL SPEAK

5 CÁCH HỌC TẠI NHÀ CÙNG ỨNG DỤNG

BẠN CÓ BIẾT

Các bài học trong ứng dụng được thiết kế theo SGK Tiếng Anh Global Success và Chương trình GDPT môn Tiếng Anh, mở rộng thêm nhiều kiến thức, kỹ năng để giỏi hơn mỗi ngày!



01 XEM VIDEO TƯƠNG TÁC
LET'S WATCH

Thời lượng: 10 phút

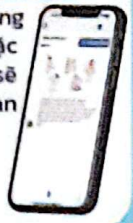
Bài học bắt đầu bằng những video ngắn, hãy xem - nghe - nói theo và trả lời câu hỏi ngay trên màn hình. App chấm phát âm tức thì, giúp bạn biết nói đúng hay sai ngay lúc học



02 NÓI CHUYỆN CÙNG AI
TALK WITH TUTOR

Thời lượng: 10 phút

AI Tutor sẽ đặt câu hỏi, tạo tình huống quen thuộc như ở lớp học hoặc ngoài đời. Bạn chỉ cần trả lời, AI sẽ sửa lỗi và khuyến khích giúp bạn nói tự nhiên hơn mỗi lần



03 HỌC QUA TRÒ CHƠI
GAME SPACE

Thời lượng: 10 phút

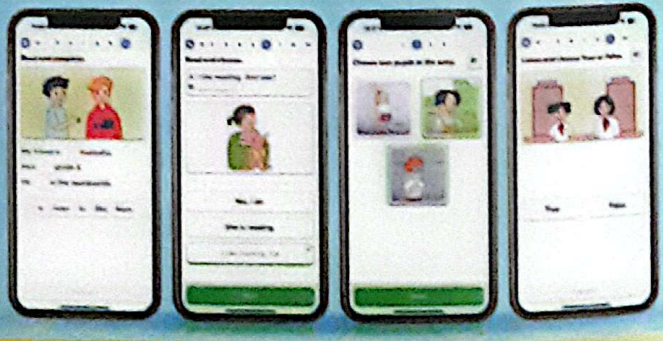
Từ vựng và cấu trúc câu được biến thành các minigame vui nhộn. Vừa chơi vừa học, sẽ giúp bạn nhớ bài lâu hơn mà không cần học thuộc máy móc



04 KIỂM TRA NHANH
QUIZ

Thời lượng: 5 phút

Chỉ với vài câu hỏi ngắn, bạn có thể ôn lại ngay phần vừa học và biết mình còn yếu chỗ nào để luyện tập thêm



05 THEO DÕI TIẾN BỘ
BẢNG XẾP HẠNG



Xem thành tích của mình thi đua với bạn bè trong lớp để có thêm động lực cố gắng mỗi ngày



QUÉT MÃ

Cào mã thẻ tại bìa 2 SGK Tiếng Anh Global Success để kích hoạt sử dụng.

HỖ TRỢ - GIẢI ĐÁP - TƯ VẤN

globalspeak.vn
GlobalSpeak.vn
1900 4639
cskh@globalspeak.vn

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT3M26
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2026

Giá: 22.000 đồng
Hai mươi hai nghìn đồng

Được quét bằng CamScanner