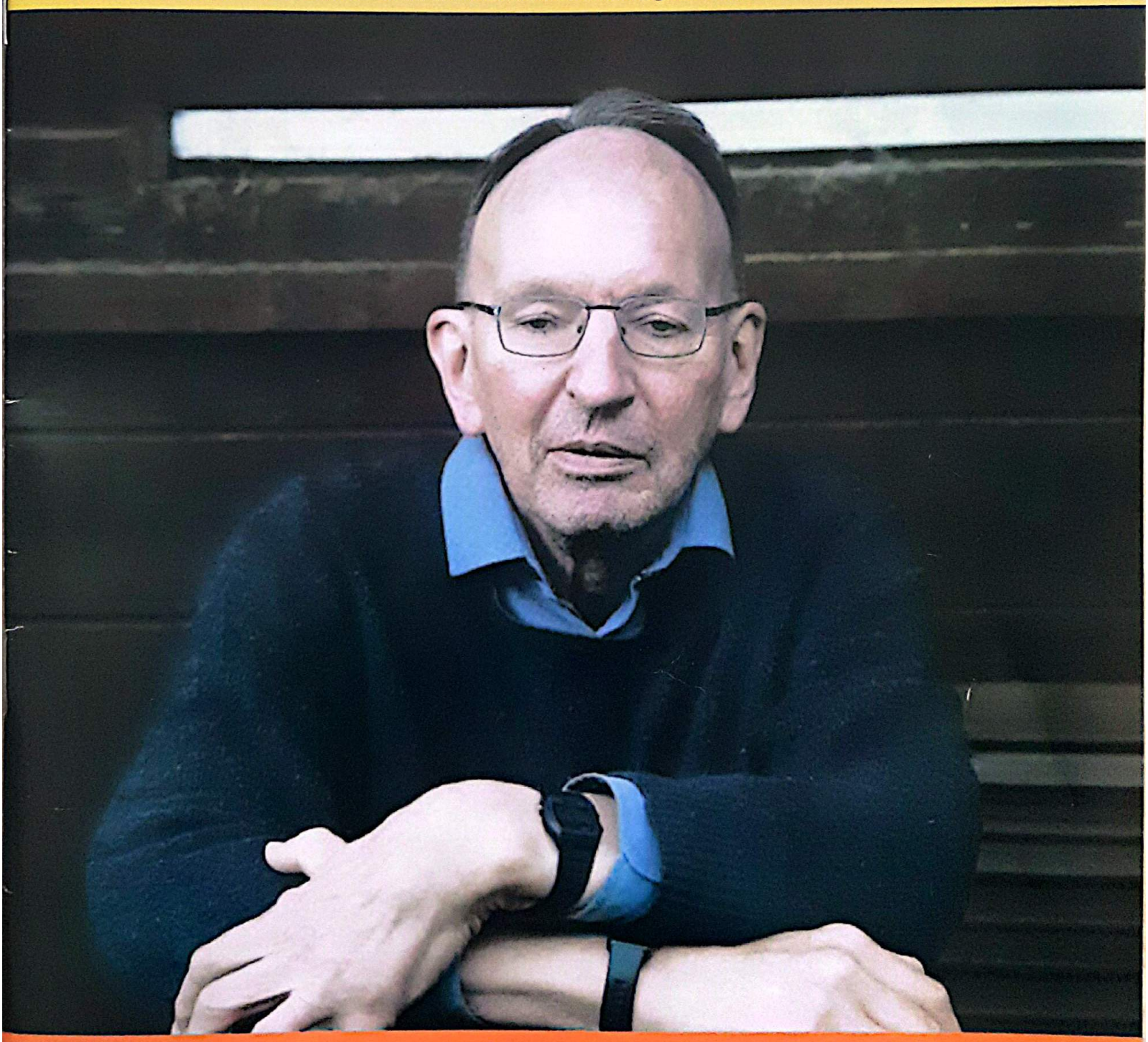
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

TẠP CHÍ Toán học và Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG

Số 586
Tháng 4 - 2026
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 63 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com



Nhà toán học Đức **Gerd Faltings** (71 tuổi) đã được Viện Hàn lâm Khoa học và Văn học Na Uy trao tặng **Giải thưởng Abel** năm 2026 vào ngày 19/3/2026 (Ảnh: Peter Badge_Typose1)

Được quét bằng CamScanner

HỌC LIỆU SỐ CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
GIÚP GIÁO VIÊN, HỌC SINH NÂNG CAO CHẤT LƯỢNG DẠY VÀ HỌC

Trong hành trình chuyển đổi số của giáo dục Việt Nam, việc đưa tri thức từ trang sách truyền thống lên môi trường số không chỉ là sự thay đổi về phương thức truyền tải, mà còn là bước chuyển quan trọng trong tư duy tổ chức dạy và học. Điều này hướng đến mục tiêu kiến tạo một hệ sinh thái học liệu số hiện đại, nơi tri thức được lan tỏa hiệu quả, không còn bị giới hạn trong những trang sách in, mà được mở rộng trên không gian số với nhiều hình thức tương tác phong phú. Từ đó, việc học tập trở nên linh hoạt, cá nhân hóa và gần gũi hơn với thế hệ học sinh trong thời đại số.

Cùng với dòng chảy chuyển đổi ấy, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam không chỉ tạo ra những sản phẩm giáo dục mới, mà còn góp phần định hình một hệ sinh thái giáo dục số bền vững, được kết nối, chia sẻ rộng rãi hơn bao giờ hết. Theo ý kiến chia sẻ của nhiều giáo viên tại các cơ sở giáo dục, sách giáo khoa điện tử bộ Kết nối tri thức với cuộc sống vừa là công cụ hỗ trợ đắc lực cho thầy cô trong việc tổ chức hoạt động dạy học, vừa giúp nâng cao hứng thú và hiệu quả học tập đối với học sinh.



Ứng dụng công nghệ số trong giáo dục góp phần làm phong phú nguồn học liệu và tạo động lực cho quá trình đổi mới phương pháp dạy - học trong nhà trường

Trên nền tảng nội dung chuẩn mực từ bộ sách giáo khoa Kết nối tri thức với cuộc sống đã được lựa chọn là bộ sách giáo khoa giáo dục phổ thông sử dụng thống nhất toàn quốc từ năm học 2026-2027, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam phối hợp cùng đối tác chuyển đổi các xuất bản phẩm giấy sang môi trường số, hình thành hệ thống sách giáo khoa điện tử tương tác, với kho học liệu số phong phú phục vụ dạy và học.

Song song với sách giáo khoa điện tử, một hệ sinh thái học liệu số toàn diện cũng được xây dựng, bao gồm kế hoạch bài học, giáo án điện tử, bài giảng PowerPoint, video bài giảng tương tác, ngân hàng câu hỏi, hệ thống bài luyện tập và các bộ đề kiểm tra, đánh giá. Tất cả được thiết kế theo hướng đồng bộ, bám sát chương trình, giúp giáo viên có thêm công cụ tổ chức bài giảng hiệu quả, đồng thời tạo điều kiện để học sinh học tập linh hoạt trên môi trường số.

Cấu trúc mỗi bài học trên nền tảng số vẫn đáp ứng sự logic, mạch lạc, chuẩn mực và chặt chẽ, khoa học như sách giáo khoa truyền thống, nhằm đảm bảo việc tích hợp không có quá nhiều hiệu ứng gây mất tập trung, làm giảm vai trò định hướng tri thức của sách giáo khoa. Các sản phẩm được cung cấp trên Internet thông qua hệ thống tên miền của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam không chỉ là kênh phát hành học liệu, mà còn là không gian học tập trực tuyến nơi giáo viên, học sinh, nhà trường và phụ huynh có thể kết nối với nhau trong một hệ sinh thái thống nhất.

Ban Truyền thông và Đối ngoại
(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)

CHÀO MỪNG NGÀY SÁCH VÀ VĂN HÓA ĐỌC VIỆT NAM (21/4/2026)

Được quét bằng CamScanner

ỨNG DỤNG QUAN HỆ CÁC ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC

VŨ HỮU CHÍN
(Thành phố Hải Phòng)

Các bài toán về các đường thẳng đồng quy trong tam giác học sinh đã được học từ năm lớp 7 ở bậc THCS, sau đó các em tiếp tục được nghiên cứu và tìm hiểu sâu hơn ở các năm học tiếp theo.

Các bài toán về các đường thẳng đồng quy trong tam giác dựa vào kiến thức đã được học ở lớp 7 là:

1) Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm đó cách mỗi đỉnh của tam giác một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

2) Trong một tam giác, ba đường phân giác cùng đi qua một điểm, điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó.

3) Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác và là tâm của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác đó.

4) Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua đi qua một điểm, điểm đó gọi là trực tâm của tam giác.

Dạng 1. Quan hệ của các đường thẳng đồng quy trong một tam giác

Thí dụ 1.1. Cho ΔABC với $AB \geq AC$. Gọi AD, AM theo thứ tự là đường phân giác trong, đường trung tuyến của ΔABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{AB+AC-BC}{2} < AD \leq AM < \frac{AB+AC}{2}.$$

Lời giải. • Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$.

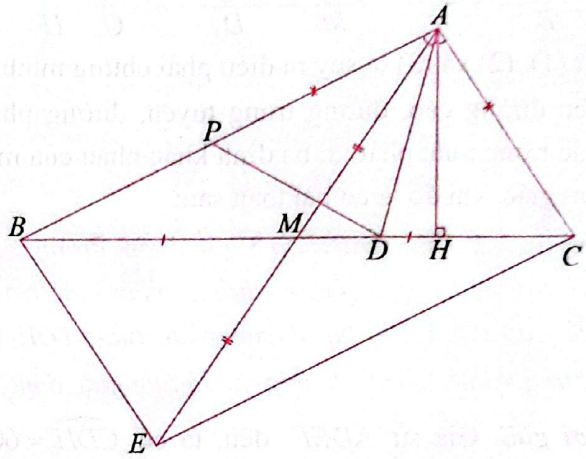
Ta có: $\Delta AMC = \Delta EMB$ (c.g.c) $\Rightarrow AC = BE$.

Từ đó: $2AM = AE < AB + BE = AB + AC$

$$\Rightarrow AM < \frac{AB+AC}{2} \quad (1).$$

• Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác có:

$$AB < AD + BD,\ AC < AD + CD.$$



Cộng theo từng vế hai bất đẳng thức trên được:

$$AB + AC < 2AD + BC \Rightarrow \frac{AB+AC-BC}{2} < AD \ (2).$$

Khẳng định trên vẫn đúng với D là điểm bất kì nằm trên đoạn thẳng BC.

• Vẽ $AH \perp BC$ $(H \in BC)$.

+ Với $AB = AC$ thì $AM = AD$.

+ Với $AB > AC$ thì $BH > CH \Rightarrow BM < BH$

$\Rightarrow M$ thuộc đoạn thẳng BH.

Lại có $\widehat{ADB} > \widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{ADB}$ tù $\Rightarrow D$ thuộc đoạn thẳng BH.

Vẽ điểm P trên tia AB sao cho $AP = AC$, có P thuộc đoạn thẳng AB. Suy ra:

$\Delta ADP = \Delta ADC$ (c.g.c) $\Rightarrow DP = DC, \widehat{APD} = \widehat{ACD}$.

+ Nếu $\widehat{ACB} \leq 90°$ thì $\widehat{APD} = \widehat{ACB} \leq 90°$

$\Rightarrow \widehat{BPD} \geq 90^0 \geq \widehat{ACB} > \widehat{PBD} \Rightarrow BD > PD = CD$

$\Rightarrow BM < BD \Rightarrow MH > DH \Rightarrow AM > AD$.

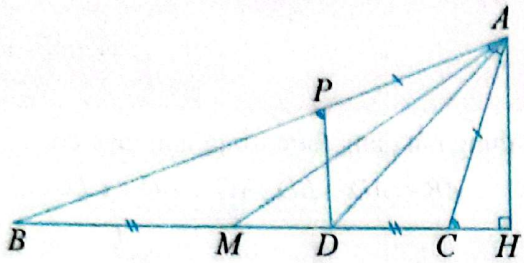
+ Nếu $\widehat{ACB} > 90°$, xét tương tự trường hợp trên, tuy nhiên lúc này có $\widehat{BPD} = \widehat{ACH} > \widehat{ADC} > \widehat{ABC}$ (góc ngoài tam giác).

Được quét bằng CamScanner

Suy ra: $BD > PD = CD \Rightarrow BM < BD$

$\Rightarrow MH > DH \Rightarrow AM > AD.$

Vậy mọi trường hợp ta đều có $AD \le AM$ (3).



Từ (1), (2) và (3) ta suy ra điều phải chứng minh.

Nếu đường cao, đường trung tuyến, đường phân giác trong xuất phát tại ba đỉnh khác nhau của một tam giác, khi đó ta có bài toán sau:

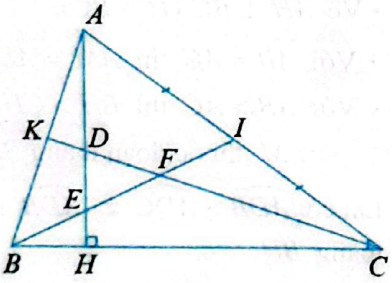
Thí dụ 1.2. *Cho ΔABC có 3 góc nhọn, đường cao AH, đường trung tuyến BI, đường phân giác trong CK cắt nhau tại ba điểm phân biệt D, E, F. Chứng minh ΔDEF không thể là tam giác đều.*

Lời giải. Giả sử ΔDEF đều, ta có $\widehat{CDH} = 60°$ nên $\widehat{HCD} = 30°$. Từ CK là phân giác $\widehat{ACB}$ nên $\widehat{ACD} = 30°$. Ta có $\widehat{CFI} = \widehat{DFE} = 60°$.

Xét ΔCFI có : $\widehat{CFI} = 60°$, $\widehat{FCI} = 30°$

$\Rightarrow \widehat{CIF} = 90°$ hay $BI \perp AC$.

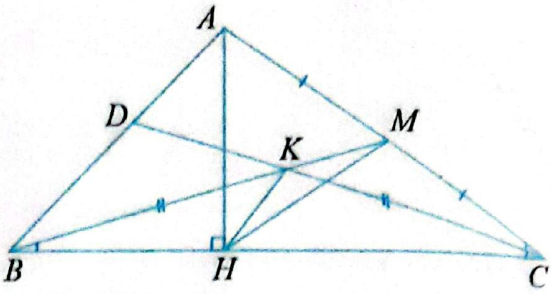
Xét ΔABC có BI vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên ΔABC cân tại đỉnh B.



Mà $\widehat{ACB} = 60°$, do đó ΔABC đều. Suy ra AH, BI, CK đồng quy tại một điểm hay D, E, F trùng nhau (trái với giả thiết), vậy ΔDEF không đều.

Thí dụ 1.3. *Cho ΔABC có đường trung tuyến BM, đường phân giác trong CD cắt nhau tại K. Vẽ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Cho biết $KB = KC$. Chứng minh rằng $KM = KH$.*

Lời giải. Xét ΔAHC vuông tại H có M là trung điểm của BC. Suy ra $MA = MH = MC$.



Suy ra ΔMHC cân tại M nên

$$\widehat{MHC} = \widehat{MCH} = 2.\widehat{KCB} \quad (1).$$

Lại có $\widehat{MHC} = \widehat{CBM} + \widehat{HMB}$ (góc ngoài của ΔMHB) (2).

Từ $KB = KC$ nên ΔKBC cân tại K, do đó $\widehat{KCB} = \widehat{CBM}$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{CBM} = \widehat{HMB}$.

Suy ra ΔHBM cân tại H. Do đó $BH = HM = MC$.

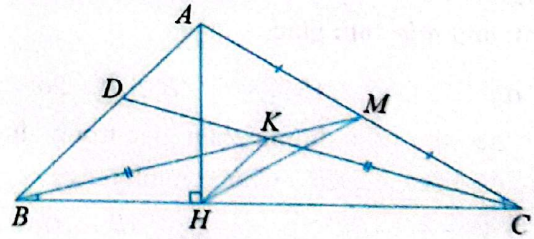
Xét ΔBHK và ΔCMK có:

$$BK = CK,\ \widehat{HBM} = \widehat{MCK},\ BH = MC.$$

Suy ra $\Delta BHK = \Delta CMK$ (c.g.c). Suy ra $KM = KH$.

Thí dụ 1.4. *Cho ΔABC có đường trung tuyến BM và phân giác trong CD cắt nhau tại K sao cho $KB = KC$. Biết $\widehat{BAC} = 105°$. Tính $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$.*

Lời giải. Vẽ $AH \perp BC, H \in BC$, nối H với M khi đó $MH = MA = MC$.



Suy ra $\widehat{MHC} = \widehat{MCH} = 2.\widehat{BCK}$.

Theo giải thiết $KB = KC \Rightarrow \widehat{KBC} = \widehat{KCB}$.

Vậy có $\widehat{MHC} = 2.\widehat{KBC}$ (1).

Mặt khác $\widehat{MHC} = \widehat{KBC} + \widehat{HMB}$ (2).

Từ (1) và (2) nên $\widehat{KBC} = \widehat{HMB}$.

Suy ra ΔHBM cân tại H nên $MH = HB$.

Được quét bằng CamScanner

+ Nếu $HA > HB$ lúc đó $\widehat{ABH} > \widehat{BAH}$ nên $\widehat{BAH} < 45°$ và $\widehat{ABH} > 45°$.

Do $\widehat{BAH} + \widehat{CAH} = 105°$, nên $\widehat{CAH} > 60°$.

Có ΔAHM cân tại đỉnh M suy ra:

$$\widehat{AHM} = \widehat{HAM} > 60° \Rightarrow \widehat{AMH} < 60°.$$

Do đó $HA < MH = HB$ (mâu thuẫn).

+ Lập luận tương tự nếu $HA < HB$, ta cũng có điều mâu thuẫn.

Vậy $HA = HB \Rightarrow \Delta AHB$ vuông cân tại H.

Suy ra $\widehat{ABC} = 45°$, $\widehat{ACB} = 30°$.

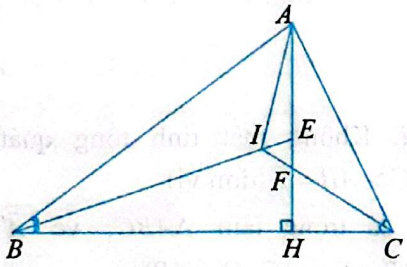
Nhận xét. Thí dụ trên là bài toán đảo của bài toán: *Cho* ΔABC *có* $\widehat{BAC} = 105°$, $\widehat{ABC} = 45°$. *Biết đường trung tuyến* BM *và phân giác trong* CD *cắt nhau tại* K. *Chứng minh* $KB = KC$.

Khi một tam giác có một đường cao, hai đường phân giác trong xuất phát tại ba đỉnh khác nhau, ta có bài toán sau:

Thí dụ 1.5. *Cho* ΔABC *với* $AB > AC$. *Gọi* AH *là đường cao của tam giác* (H *nằm giữa* B *và* C). *Đường phân giác trong của* $\widehat{ABC}$ *và* $\widehat{ACB}$ *cắt* AH *theo thứ tự tại* E *và* F. *Chứng minh rằng*

$$BE > EF + FC.$$

Lời giải. Gọi I là giao điểm của BE và CF thì $\widehat{BAI} = \widehat{CAI} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.



Xét ΔABC có $AB > AC$ nên ta có:

$$\hat{C} > \hat{B} \Rightarrow 90° - \hat{C} < 90° - \hat{B} \Rightarrow \widehat{CAH} < \widehat{BAH}$$

$$\Rightarrow \widehat{CAH} + \widehat{BAH} < 2\widehat{BAH} \Rightarrow \widehat{BAC} < 2\widehat{BAH}.$$

Suy ra $\frac{1}{2}.\widehat{BAC} < \widehat{BAH} \Rightarrow \widehat{BAI} < \widehat{BAH}$.

Do đó, tia AI cắt đoạn thẳng BE tại I. Ta có $BE = BI + IE$. Do đó B và I nằm cùng phía đối với đường thẳng AH, điểm B và C nằm khác phía đối với AH, nên C và I nằm khác phía đối với đường thẳng AH.

Suy ra F nằm giữa I và C. Suy ra $CI = IF + FC$.

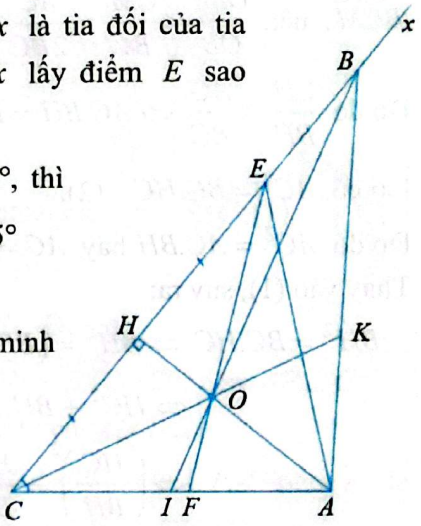
Từ $\hat{B} < \hat{C} \Rightarrow \widehat{IBC} < \widehat{ICB} \Rightarrow BI > CI$

$$\Rightarrow BI + IE > CI + IE = IF + FC + IE$$

$$\Rightarrow BE > (IE + IF) + FC \Rightarrow BE > EF + FC.$$

Thí dụ 1.6. *Cho* ΔABC *có 3 góc nhọn, các đường cao* AH, *trung tuyến* BI *và đường phân giác trong* CK *đồng quy. Chứng minh rằng* $\widehat{ACB} > 45°$.

Lời giải. Gọi Hx là tia đối của tia HC. Trên tia Hx lấy điểm E sao cho $HC = HE$.



Giả sử $\widehat{ACB} \le 45°$, thì

$\widehat{ACE} = \widehat{AEC} \le 45°$

$\Rightarrow \widehat{CAE} \ge 90°$.

Ta sẽ chứng minh $\widehat{CAB} > \widehat{CAE}$.

Gọi O là giao điểm của AH, BI, CK; gọi F là giao điểm của OE với AC.

Xét ΔAEC có $\widehat{CAE} > \widehat{ACE}$, nên $EC > EA$.

Ta có O là giao điểm ba đường phân giác trong của ΔAEC. Suy ra $CF > AF$ nên $CF > \frac{AC}{2}$.

Lại có I là trung điểm AC. Suy ra $CF > CI$, nên I nằm giữa điểm C và điểm F.

Xét ΔCEF có I nằm giữa hai điểm C và F, O nằm giữa điểm E và điểm F suy ra B thuộc tia Ex. Do đó $\widehat{CAB} > \widehat{CAE}$, mà $\widehat{CAE} \ge 90°$.

Suy ra $\widehat{CAB} > 90°$ (trái với giả thiết ΔABC là tam giác có ba góc nhọn). Vậy $\widehat{ACB} > 45°$.

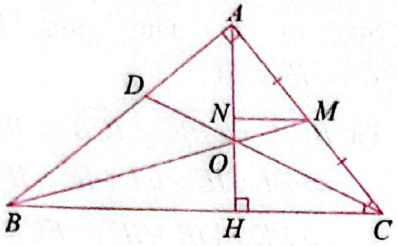
Thí dụ 1.7. *Cho* ΔABC *vuông tại* A, *đường cao* AH, *trung tuyến* BM *và phân giác trong* CD *đồng quy tại một điểm. Tính tỉ số* $\frac{AC}{BC}$.

Được quét bằng CamScanner

Lời giải. Gọi O là giao điểm của AH, BM, CD.

Qua điểm M vẽ $MN \parallel BC, N \in AH$.

Từ ΔOBH có $MN \parallel BH$, suy ra $\dfrac{MN}{BH} = \dfrac{OM}{OB}$, mà $MN = \dfrac{1}{2}CH$



$\Rightarrow \dfrac{CH}{2BH} = \dfrac{OM}{OB}$.

Xét ΔBCM có CO là đường phân giác trong của $\widehat{BCM}$, nên $\dfrac{OM}{OB} = \dfrac{CM}{BC} = \dfrac{AC}{2BC}$.

Do đó $\dfrac{CH}{BH} = \dfrac{AC}{BC} \Leftrightarrow AC.BH = BC.HC$ (1).

Lại có $AC^2 = BC.HC$ (2).

Do đó $AC^2 = AC.BH$ hay $AC = BH$.

Thay vào (1), suy ra:

$$BH^2 = BC.HC \Leftrightarrow BH^2 = (BH + HC).HC$$
$$\Leftrightarrow HC^2 + BH.HC - BH^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{HC}{BH}\right)^2 + \frac{HC}{BH} - 1 = 0.$$

Suy ra $\dfrac{HC}{BH} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ nên $\dfrac{HC}{AC} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (vì $AC = BH$) mà theo (1) suy ra:

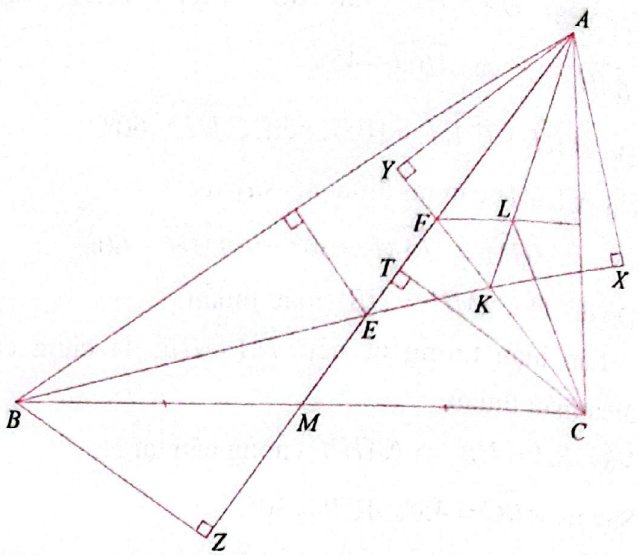
$$\frac{HC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Thí dụ 1.8. *Cho ΔABC không cân tại A, $(\hat{A} < 90°)$. Đường trung trực của các cạnh AB, AC theo thứ tự cắt trung tuyến AM tại E, F. Gọi K là giao điểm của BE và CF. Chứng minh rằng $\widehat{AKB} = \widehat{AKC}$, $\widehat{MAB} = \widehat{KAC}$.*

Lời giải. Không mất tính tổng quát giả sử $AB > AC$.

Do $\widehat{BAC} < 90°$ suy ra $AM > BM = CM$.

• Gọi X, Y theo thứ tự là chân đường đường vuông góc hạ từ đỉnh A tới BE, CF; gọi Z, T theo thứ tự là chân đường vuông góc hạ từ đỉnh B, C tới AM.



Ta có: ΔABE cân tại E, ΔACF cân tại F, $\Delta MBZ = \Delta MCT$ (g.c.g), suy ra:

$$AX = BZ = CT = AY \text{ và } \widehat{AKX} = \widehat{AKY}.$$

Do đó $\widehat{AKB} = 180° - \widehat{AKX} = 180° - \widehat{AKY} = \widehat{AKC}$.

• Gọi L là giao điểm của AK với đường trung trực của AC, suy ra $\widehat{LAF} = \widehat{LCF}$.

Xét ΔAEK và ΔCLK có:

$\widehat{LAF} = \widehat{LCF}$, $\widehat{AKB} = \widehat{AKC}$ nên $\widehat{AEK} = \widehat{CLK}$.

Vậy $180° - \widehat{AEK} = 180° - \widehat{CLK} \Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{ALC}$.

Lại có ΔAEB cân tại E, ΔALC cân tại L.

Do đó $\widehat{MAB} = \widehat{KAC}$ (đpcm).

Thí dụ 1.9. *Cho ΔABC không cân. Kẻ các đường trung tuyến AA', BB', CC'; các đường cao AH, BF, CK. Biết rằng $CK = BB'$, $BF = AA'$. Tính tỉ số $\dfrac{CC'}{AH}$.*

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $BC > AC > AB = 1$ (đơn vị).

Gọi M là trọng tâm ΔABC, vẽ $A'E \perp AC$, $B'Q \perp AB$ $(E \in AC, Q \in AB)$.

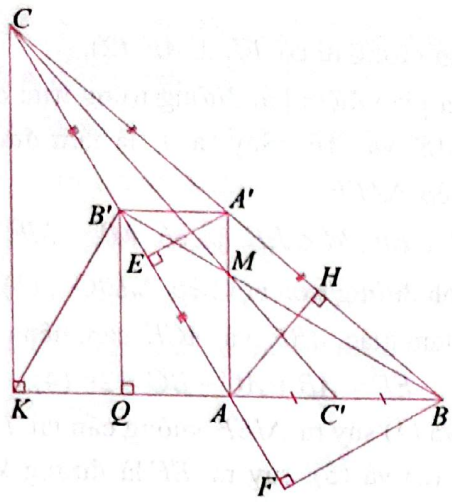
Ta có: $A'E = \dfrac{1}{2}BF = \dfrac{1}{2}AA'$.

Xét $\Delta AA'E$ vuông tại E, $A'E = \dfrac{1}{2}AA'$ nên là một tam giác nửa đều, suy ra $\widehat{A'AE} = 30°$.

Tương tự ta có $\widehat{B'BA} = 30°$. Có $A'B' \parallel AB$, suy ra:

$$\widehat{A'B'M} = \widehat{B'BA} = \widehat{B'AM} = 30°.$$

Được quét bằng CamScanner



Xét $\Delta B'A'M$ và $\Delta AA'B'$ có:

$\widehat{A'B'M} = \widehat{B'AM} = 30°$, $\widehat{B'A'M}$ chung nên $\Delta B'A'M \backsim \Delta AA'B'$ (g.g).

Suy ra: $\dfrac{A'B'}{A'M} = \dfrac{AA'}{A'B'} \Rightarrow A'B'^2 = AA'.A'M.$

Do đó $A'B'^2 = 3A'M^2 \Rightarrow A'B' = \sqrt{3}.A'M.$

Xét $\Delta A'B'M$ có: $\dfrac{A'B'}{\sin\widehat{A'MB'}} = \dfrac{A'M}{\sin\widehat{A'B'M}}$

$\Rightarrow \dfrac{A'B'}{A'M} = \dfrac{\sin\widehat{A'MB'}}{\sin 30°} = \sqrt{3} \Rightarrow \sin\widehat{A'MB'} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{A'MB'} = 120°$ hoặc $\widehat{A'MB'} = 60°$.

• Nếu $\widehat{A'MB'} = 120°$ thì $\Delta A'MB'$ cân tại M.

Suy ra $AA' = BB'$ nên $AC = BC$ (mâu thuẫn với $AC < BC$).

• Nếu $\widehat{A'MB'} = 60°$ thì $\widehat{B'A'A} = \widehat{A'AB} = 90°$, $\widehat{B'BA} = 30°$. Suy ra $\Delta BAB'$ cân tại A, nên $AB' = AB = 1$.

Do đó: $AC = 2.AB = 2; \widehat{BAC} = 120°$.

Suy ra $\Delta AKB'$ là tam giác đều. Do đó có:

$AK = AB' = AC : 2 = 1$, $C'K = 1 + 0,5 = 1,5$;

$CK = \sqrt{3} \Rightarrow CC'^2 = CK^2 + C'K^2 = 3 + 1,5^2 = \dfrac{21}{4}$

$\Rightarrow CC' = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$ và $AA' = \dfrac{1}{2}CK = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Mặt khác, $\Delta AA'B$ vuông tại A, $AH \perp BA'$.

Suy ra: $AH.A'B = AA'.AB$

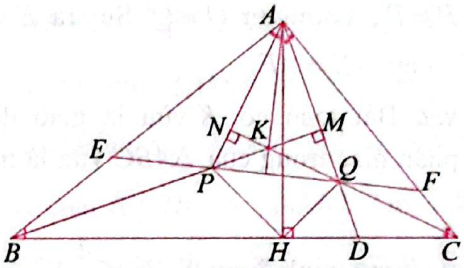
$\Rightarrow AH = \dfrac{AA'.AB}{\sqrt{(AA')^2 + AB^2}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}.$

Do đó $\dfrac{CC'}{AH} = \dfrac{7}{2}.$

Dạng 2. Quan hệ giữa các đường thẳng đồng quy trong nhiều tam giác

Thí dụ 2.1. *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi P, Q theo thứ tự là giao điểm các đường phân giác trong của hai tam giác AHB, AHC. Đường thẳng PQ cắt AB tại E và cắt AC tại F. Chứng minh rằng $AE = AF$.*

Lời giải. Cách 1. Gọi tia BP cắt CQ và AQ lần lượt tại K và M; tia CQ cắt AP tại N.



Ta có: AK là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ (1).

$\widehat{BAH} = \widehat{ACH}$ (2).

Suy ra $\widehat{BAP} = \widehat{ACN}$. Do đó:

$\widehat{CAN} + \widehat{ACN} = \widehat{CAN} + \widehat{BAP} = 90°$ nên $AP \perp CN$.

Chứng minh tương tự có $AQ \perp BM$.

Xét ΔAPQ có $AP \perp QN$, $AQ \perp PM$ nên K là trực tâm ΔAPQ, suy ra $AK \perp PQ$ (3).

Từ (1) và (3) suy ra: ΔAEF cân tại A, nên $AE = AF$.

Cách 2. Gọi tia AQ cắt BC tại D.

Theo (2) có $\widehat{BAH} = \widehat{ACH}$. Suy ra:

$\widehat{ADB} = \widehat{ACD} + \widehat{CAD} = \widehat{BAH} + \widehat{HAD} = \widehat{BAD}.$

Vậy ΔABD cân tại B mà BP là đường phân giác của $\widehat{ABD}$ nên $BM \perp AD$.

Tương tự có $CN \perp AP$.

Từ đó lập luận theo cách 1) ta có đpcm.

Cách 3. Ta có: $\widehat{PAQ} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAH} + \dfrac{1}{2}\widehat{CAH} = 45°$.

Mặt khác: $\widehat{AQN} = \widehat{CAQ} + \widehat{ACQ}$

$= \dfrac{1}{2}\widehat{CAH} + \dfrac{1}{2}\widehat{ACH} = 45°.$

Xét ΔAQN có $\widehat{PAQ} = \widehat{AQN} = 45°$,

suy ra $\widehat{ANQ} = 90^0$ do đó $CN \perp AP$.

Được quét bằng CamScanner

Chứng minh tương tự có $BM \perp AD$. Từ đó lập luận theo cách 1) ta có đpcm.

Cách 4. Trên tia AB lấy điểm E', trên tia AC lấy điểm F' sao cho $AE' = AH = AF'$.

Suy ra $\Delta AE'F'$ vuông cân tại A, nên

$$\widehat{AE'F'} = \widehat{AE'F'} = 45°.$$

Gọi $E'F'$ cắt AP, AQ lần lượt tại P', Q'. Ta có: $\Delta AP'E' = \Delta AP'H$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{AHP'} = 45°$ mà $\widehat{AHP} = 45°$.

Do đó $P \equiv P'$. Tương tự $Q \equiv Q'$. Suy ra $E \equiv E'$ và $F \equiv F'$. Vậy $AE = AF$.

Nhận xét. Bài toán có K vừa là giao điểm ba đường phân giác trong của ΔABC vừa là trực tâm ΔAPQ.

Ngoài ra chứng minh được $S_{\Delta AEF} \le \frac{1}{2} S_{\Delta ABC}$.

Thí dụ 2.2. *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, AHB, AHC. Chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔII_1I_2 bằng bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC.*

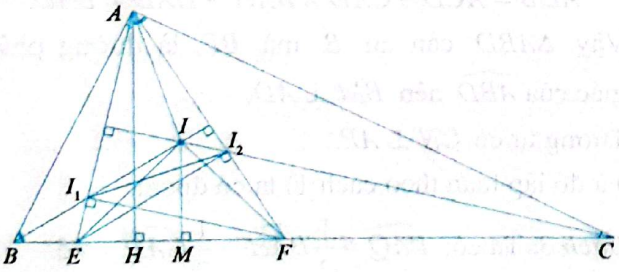
Lời giải. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AI_1, AI_2 với BC.

Ta có: $\widehat{BAF} = \widehat{BFA} = \widehat{ACB} + \frac{1}{2}\widehat{HAC}$.

Suy ra ΔABF cân tại B.

Tương tự ΔACE cân tại C.

Vậy $BI \perp AF$, $CI \perp AE$.



Do đó BI_1 là đường trung trực của AF, CI_2 là đường trung trực của AE.

Suy ra $\widehat{I_2AC} = \widehat{I_2EC}$. Lại có $\widehat{I_2AC} = \widehat{IBC}$.

Suy ra $\widehat{I_2EC} = \widehat{IBC}$, do đó $IB \parallel EI_2$, mà $BI \perp AF \Rightarrow EI_2 \perp AF$ (1).

Lập luận tương tự có $FI_1 \perp AE$ (2).

Có I là giao điểm hai đường trung trực của đoạn thẳng AE và AF. Suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAEF.

Vẽ $IM \perp EF$, $M \in EF$ ta có $ME = MF$, $IM = r$ (bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC) (3).

Từ các tam giác ABF và ACE cân, nên

$$EF = AB + AC - BC = 2r \quad (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra ΔIEF vuông cân tại I (5).

Từ (1), (2) và (5), suy ra EF là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔII_1I_2.

Suy ra bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔII_1I_2 bằng r.

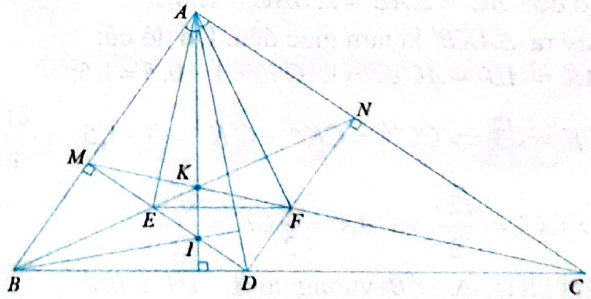
Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔII_1I_2 bằng bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC.

Thí dụ 2.3. *Cho ΔABC vuông tại A, đường phân giác trong AD. Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của D trên hai cạnh AB, AC. Gọi BN cắt CM tại K; AK cắt DM tại I. Tính số đo $\widehat{BID}$.*

Lời giải. *Trường hợp 1.* Xét $AB < AC$, khi đó điểm I nằm giữa điểm M và D. Gọi E là giao điểm của BN và MD; F là giao điểm của CM và DN. Ta có $AMDN$ là hình vuông. Áp dụng định lí Thalès, ta có:

$$\frac{MF}{FC} = \frac{BD}{DC} = \frac{BM}{MA} = \frac{BM}{DN} = \frac{ME}{ED}.$$

Suy ra $EF \parallel CD$ hay $EF \parallel BC$ (1).



Áp dụng định lí Thalès, ta có:

$$\frac{AN}{AB} = \frac{DN}{AB} = \frac{NC}{AC} = \frac{NF}{AM} = \frac{NF}{AN}.$$

Suy ra $\Delta ANF \backsim \Delta BAN$ (c.g.c).

Do đó $\widehat{NAF} = \widehat{NBA}$, suy ra $AF \perp BN$.

Chứng minh tương tự có $AE \perp CM$.

Được quét bằng CamScanner

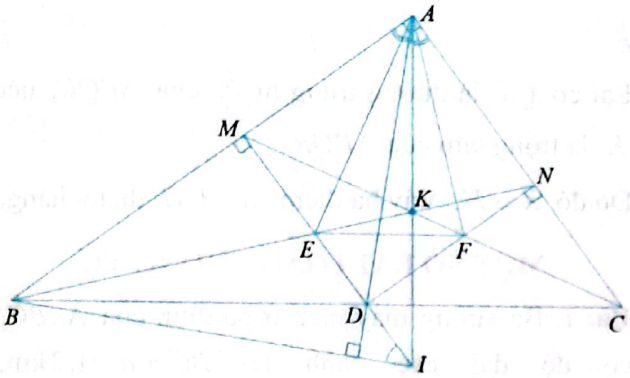
Xét ΔAEF có $AF \perp BN$, $AE \perp CM$. Suy ra K là trực tâm ΔAEF nên $AI \perp EF$ (2).

Từ (1) và (2) có $AI \perp BD$ mà $DM \perp AB$.

Suy ra I là trực tâm ΔABD.

Do đó $\widehat{BID} = 180° - \widehat{BAD} = 180° - 45° = 135°$.

Trường hợp 2. Xét $AB > AC$, khi đó D nằm giữa M và I. Chứng minh tương tự trường hợp 1) ta được $\widehat{BID} = 45°$.



Trường hợp 3. Xét $AB = AC$, khi đó $D \equiv I$ nên $\widehat{BID}$ không xác định.

Vậy: + Nếu $AB < AC$ thì $\widehat{BID} = 135°$.

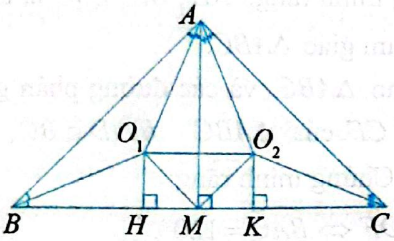
+ Nếu $AB > AC$ thì $\widehat{BID} = 45°$.

Thí dụ 2.4. *Cho ΔABC, trung tuyến AM. Gọi O_1, O_2 theo thứ tự là giao điểm của các đường phân giác trong hai ΔABM và ΔACM.*

Chứng minh rằng: $AB = AC \Leftrightarrow MO_1 = MO_2$.

Lời giải. a) Giả sử ΔABC cân tại A, suy ra $\Delta AMB = \Delta AMC$ (c.c.c).

Vẽ $O_1H \perp BM, O_2K \perp CM$ $(H, K \in BC)$.

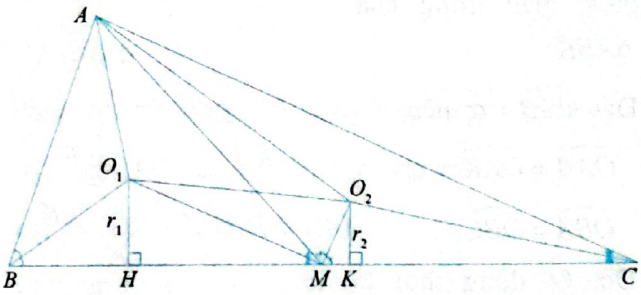


Suy ra $O_1H = O_2K$, $\widehat{AMH} = \widehat{AMK} = 90°$.

Do đó: $\Delta O_1MH = \Delta O_2MK$ (g.c.g).

Suy ra $MO_1 = MO_2$ (đpcm).

b) Ngược lại, giả sử $MO_1 = MO_2$, ta chứng minh $AB = AC$.



Giả sử $AB < AC$, gọi r_1 là khoảng cách từ O_1 đến các cạnh của ΔAMB; r_2 là khoảng cách từ O_2 đến các cạnh của ΔAMC; gọi p_1, p_2 lần lượt là chu vi của ΔAMB và ΔAMC. Do $AB < AC$ nên $p_1 < p_2$. Lại có: $S_{AMB} = S_{AMC} \Rightarrow p_1r_1 = p_2r_2$.

Suy ra: $r_1 > r_2$ (1). Từ $MO_1 = MO_2$ nên ΔMO_1O_2 vuông cân tại M. Suy ra: $\widehat{O_1MH} = \widehat{MO_2K}$.

Do đó $\Delta O_1MH = \Delta MO_2K$ (cạnh huyền – góc nhọn). Suy ra $HM = O_2K = r_2$ (2).

Xét ΔMAB và ΔMAC có: MA chung, $MB = MC$, $AB < AC$ (giả sử) suy ra $\widehat{AMB} < \widehat{AMC}$, mà $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^0$ nên ta có $\widehat{AMB} < 90°$. Do đó: $\widehat{O_1MH} < 45°$, $\widehat{MO_1H} > 45°$.

Xét ΔO_1MH có: $\widehat{O_1MH} < \widehat{MO_1H}$

nên $r_1 = O_1H < HM$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $r_1 < r_2$ (4).

Ta có (1) và (4) mâu thuẫn với nhau. Vậy không xảy ra $AB < AC$.

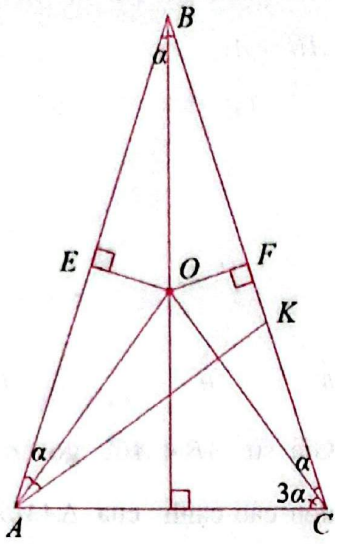
Lập luận tương tự $AB > AC$ cũng không xảy ra.

Vậy $AB = AC$ nên ΔABC cân tại A.

Thí dụ 2.5. *Cho ΔABC và đường phân giác trong AK. Biết giao điểm ba đường phân giác trong của ΔABK trùng với giao điểm ba đường trung trực của ΔABC. Tính số đo các góc của ΔABC.*

Được quét bằng CamScanner

Lời giải. Gọi O là giao điểm ba đường phân giác trong của ΔABK.



Đặt $\widehat{OAB}=\alpha$ nên

$\widehat{OAB}=\widehat{OAK}=\alpha$;

$\widehat{OBA}=\widehat{OBC}$.

Do O đồng thời là cũng là giao điểm ba đường trung trực ΔABC nên

$\widehat{OAB}=\widehat{OBA}=\alpha$.

Suy ra: $\widehat{OAB}=\widehat{OBA}=\widehat{OBC}=\widehat{OCB}=\widehat{OAK}=\alpha$.

Do AK là phân giác $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{BAK}=\widehat{CAK}=2\alpha$.

Mặt khác, do $OA=OC$, nên ΔOAC cân tại O nên $\widehat{OAC}=\widehat{OCA}=3\alpha$.

Vậy $\widehat{ABC}=2\alpha$, $\widehat{BAC}=\widehat{BCA}=4\alpha$.

Xét ΔABC có: $\widehat{ABC}+\widehat{BAC}+\widehat{BCA}=180°$

$\Rightarrow 2\alpha+4\alpha+4\alpha=180°\Rightarrow\alpha=18°$.

Vậy: $\widehat{ABC}=2.18°=36°$; $\widehat{BAC}=\widehat{BCA}=4.18°=72°$.

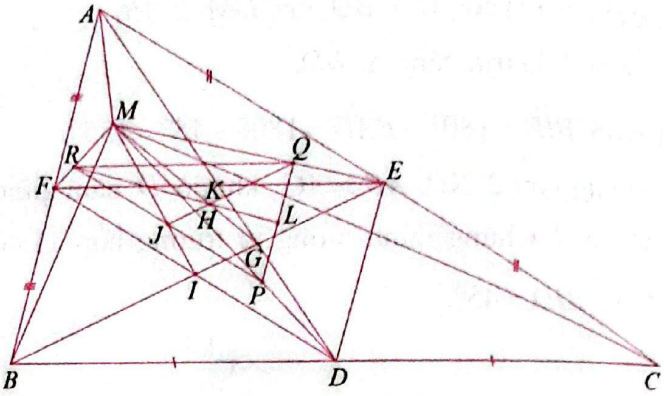
Thí dụ 2.6. *Cho ΔABC có M là một điểm nằm trong tam giác. Gọi P, Q, R, H, G lần lượt là trọng tâm của các tam giác MBC, MAC, MAB, PQR, ABC. Chứng minh ba điểm M, H, G thẳng hàng.*

Lời giải. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB thì AG đi qua trung điểm của EF, BG đi qua trung điểm I của DF nên G là trọng tâm của ΔDEF. Gọi J là giao điểm của MI và PR. Ta có $\dfrac{MR}{MF}=\dfrac{MP}{MD}=\dfrac{2}{3}$ nên $PR\,//\,DF$.

Xét ΔMDF có $PR\,//\,DF$, áp dụng định lý Thalès có $\dfrac{JR}{IF}=\dfrac{MJ}{MI}=\dfrac{JP}{ID}$. Mà $ID=IF$ suy ra $JP=JR$, $\dfrac{MJ}{MI}=\dfrac{2}{3}$. Lại có $\dfrac{MQ}{ME}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\dfrac{MJ}{MI}=\dfrac{MQ}{ME}$.

Do đó $JQ\,//\,IE$. Gọi K là giao điểm của JQ và MG.

Áp dụng định lí Thalès có $\dfrac{JK}{KQ}=\dfrac{IG}{GE}=\dfrac{1}{2}$.



Lại có QJ là đường trung tuyến của ΔPQR, nên K là trọng tâm của ΔPQR.

Do đó $K\equiv H$. Vậy ba điểm M,H,G thẳng hàng.

MỘT SỐ BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ

Bài 1. Ba xưởng máy nằm ở ba đỉnh của ΔABC, có độ dài các cạnh là $BC=a=1,2$ km, $AC=b=1,0$ km, $AB=c=0,8$ km. Công nhân ở ba xưởng máy ở chung trong một nhà tập thể đặt tại giao điểm O ba đường phân giác trong của ΔABC. Hằng ngày một ô tô đưa công nhân từ nhà tập thể đến ba xưởng máy rồi trở về O. Hỏi ô tô đi theo cách nào thì tổng độ dài quãng đường là ngắn nhất?

Bài 2. Cho ΔABC nhọn, đường cao AH. Gọi E và F là các điểm đối xứng của H qua các cạnh AB, AC. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của EF với AB, AC.

a) Chứng minh rằng: AH, BN, CM là các đường phân giác trong của ΔHMN.

b) Chứng minh rằng: AH, BN, CM là các đường cao của tam giác ΔABC.

Bài 3. Cho ΔABC và các đường phân giác trong AD, BE, CF của ΔABC với $D\in BC$, $E\in CA$, $F\in AB$. Chứng minh rằng:

$DE\perp DF\Leftrightarrow\widehat{BAC}=120°$.

Bài 4. Cho ΔABC có $\widehat{BAC}=45°$, đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm của DE. Chứng minh rằng đường thẳng HI đi qua trọng tâm ΔABC. *(Xem tiếp trang 24)*

Được quét bằng CamScanner

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH THANH HOÁ

Năm học 2025-2026

Câu 1. *Rút gọn biểu thức:*

$$M=\left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8}+\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}\right):\left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}+\frac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5}\right)$$

với $x\ge 0; x\ne 1;3;4.$

Đáp số. $M=\dfrac{\sqrt{x}+1}{3\left(\sqrt{x}-1\right)}.$

Câu 2. *Cho đa thức* $P(x)=x^3+6x^2+ax+b$ *với* a, b *là các số hữu tỉ thỏa mãn* $P(1-\sqrt{3})=0.$ *Tính giá trị của biểu thức:*

$$Q=17.P(3)+12.P(2)+2025(a+b+35)^{2026}+54.$$

Đáp số. $Q=2026.$:

Câu 3. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} y\sqrt{x-2}+y^2=x-1 & (1)\\ 3y\sqrt{x-2}-2\sqrt{(x-2)(2y-1)}=x-2y & (2)\end{cases}.$$

HDG. ĐK: $x\ge 2; y\ge\dfrac{1}{2}.$ Lấy (2) – (1) theo vế và biến đổi ta được:

$$\left(2\sqrt{x-2}-y-\sqrt{2y-1}\right)\left(-\sqrt{2y-1}+y\right)=0.$$

Giải các trường hợp $\sqrt{2y-1}=y$ và $2\sqrt{x-2}=y+\sqrt{2y-1}$ kết hợp với ĐK ta được nghiệm của HPT là: $(x;y)=(2;1);\ (x;y)=(3;1).$

Câu 4. *Gọi* X *là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số phân biệt được lập từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của* X*. Tính xác suất để phần tử đó là một số nhỏ hơn 45000.*

Lời giải. Số phần tử của tập hợp X là:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120.$$

Gọi A là biến cố "Chọn được một phần tử của X là một số nhỏ hơn 45000".

Phần tử cần chọn có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ (với $a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5\in\{1;2;3;4;5\}$ và $a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5$ đôi một khác nhau).

Vì phần tử được chọn là một số nhỏ hơn 45000, nên $a_1\le 4,$ do đó ta có các trường hợp sau:

• Trường hợp 1: $a_1=4,$ có 1 cách chọn $a_1.$ Khi đó ta có $a_2<5,$ suy ra có 3 cách chọn $a_2.$ Số cách chọn $a_3;a_4;a_5$ và sắp xếp vào 3 vị trí còn lại là: $1.2.3=6$ (cách).

Suy ra trường hợp này có: $3.6=18$ (cách chọn phần tử).

• Trường hợp 2: $a_1<4,$ khi đó $a_1\in\{1;2;3\}$ nên có 3 cách chọn $a_1.$ Số cách chọn 4 chữ số $a_2;a_3;a_4;a_5$ và sắp xếp vào các vị trí còn lại là: $1.2.3.4=24$ (cách).

Suy ra trường hợp này có $3.24=72$ (cách chọn phần tử).

Suy ra: $n(A)=18+72=90.$

Do đó xác suất để phần tử được chọn là một số nhỏ hơn 45000 là: $P(A)=\dfrac{90}{120}=\dfrac{3}{4}.$

Câu 5. *Chứng minh rằng nếu các số tự nhiên* a, b, c *thỏa mãn* $ab^2+b=(a+1)c^2+c$ *thì* $ab+ac+1$ *là số chính phương.*

Lời giải. Ta có: $ab^2+b=(a+1)c^2+c$

$$\Leftrightarrow a\left(b^2-c^2\right)+b-c=c^2\Leftrightarrow(b-c)(ab+ac+1)=c^2.$$

Đặt $d=(b-c;ab+ac+1)$ (với $d\in\mathbb{N}^*$)

$$\Rightarrow\begin{cases}(b-c)\vdots d\\(ab+ac+1)\vdots d\end{cases}.$$

Vì $(b-c)(ab+ac+1)=c^2\Rightarrow c^2\vdots d^2\Rightarrow c\vdots d.$

Do $(b-c)\vdots d\Rightarrow b\vdots d\Rightarrow(ab+ac)\vdots d.$

Được quét bằng CamScanner

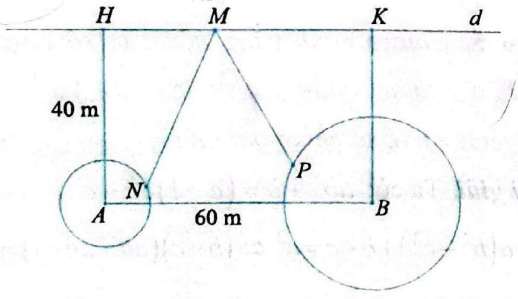
Ta có: $\begin{cases}(ab+ac)\vdots d\\(ab+ac+1)\vdots d\end{cases}\Rightarrow 1\vdots d\Rightarrow d=1.$

Vậy $b-c$ và $ab+ac+1$ là hai số nguyên tố cùng nhau, mà $(b-c)(ab+ac+1)=c^2$ là số chính phương nên từng số $(b-c);(ab+ac+1)$ là các số chính phương.

Câu 6. *Ba xe ô tô cùng xuất phát từ địa điểm A đến địa điểm B. Mỗi giờ, xe thứ nhất đi được nhiều hơn xe thứ hai 15 km, nhiều hơn xe thứ ba 5 km. Biết rằng xe thứ hai đến B chậm hơn xe thứ nhất 28 phút, chậm hơn xe thứ ba 20 phút. Tìm tốc độ từng xe (xem như tốc độ từng xe là không đổi trong suốt hành trình).*

Đáp số. Tốc độ của xe thứ nhất là 75 km/h, tốc độ của xe thứ hai là 60 km/h, tốc độ của xe thứ ba là 70 km/h.

Câu 7. *Hai bể cá hình tròn lần lượt có tâm A, bán kính $r_1=10$ m và tâm B, bán kính $r_2=20$ m, $AB=60$ m, ở gần một con kênh có bờ là một đường thẳng d song song với AB. Khoảng cách từ A, B đến bờ kênh là 40 m. Người ta cần chọn một vị trí M trên bờ kênh để lắp máy bơm nước đến hai bể. Các ống dẫn nước MN, MP là các đoạn thẳng nối từ M đến mép bể (tham khảo hình vẽ). Hỏi tổng độ dài 2 ống dẫn nước nhỏ nhất là bao nhiêu (biết rằng chênh lệch về độ cao của các bể so với bờ kênh là không đáng kể)?*



Lời giải. Dựng đường tròn tâm C đối xứng với đường tròn tâm A qua đường thẳng d. Gọi N' là điểm đối xứng với N qua đường thẳng d. Khi đó $N'\in(C)$, $MN=MN'$. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của BC với đường tròn (B), (C).

Ta có: $\begin{cases}MP+BP\ge BM\\MN'+N'C\ge MC\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}MP+r_1\ge BM\\MN'+r_1\ge MC\end{cases}$

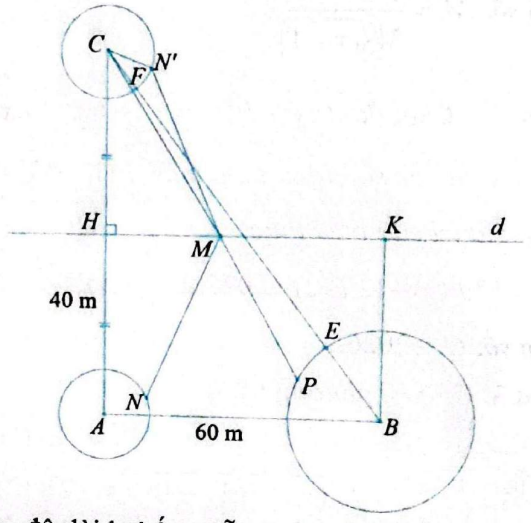
$\Rightarrow MP+r_2+MN'+r_1\ge BM+MC\ge BC$

$\Rightarrow MP+r_2+MN+r_1\ge r_2+r_1+EF$

$\Rightarrow MP+MN\ge EF$. Nên $MN+MP$ nhỏ nhất là bằng EF. Dấu "=" xảy ra khi M là giao điểm của BC với đường thẳng d, các điểm $P\equiv E$; $N'\equiv F$; N là điểm đối xứng của F qua đường thẳng d. Khi đó M là trung điểm của HK nên:

$MH=MK=30$ (m) $\Rightarrow CM=MB=\sqrt{CH^2+HM^2}$

$\Rightarrow CM=MB=\sqrt{CH^2+HM^2}=\sqrt{30^2+40^2}=50$ (m).



Tổng độ dài hai ống dẫn nước nhỏ nhất là:

$EF=(CM-r_1)+(BM-r_2)$

$=(50-10)+(50-20)=70$ (m).

Vậy tổng độ dài 2 ống nước nhỏ nhất bằng 70 m.

Câu 8. *Hình vuông ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo, K là trung điểm của OB. Đường tròn tâm D bán kính DA và đường tròn đường kính AB cắt nhau tại điểm E khác A. Tia EO cắt AD tại M, cắt tia CD tại F.*

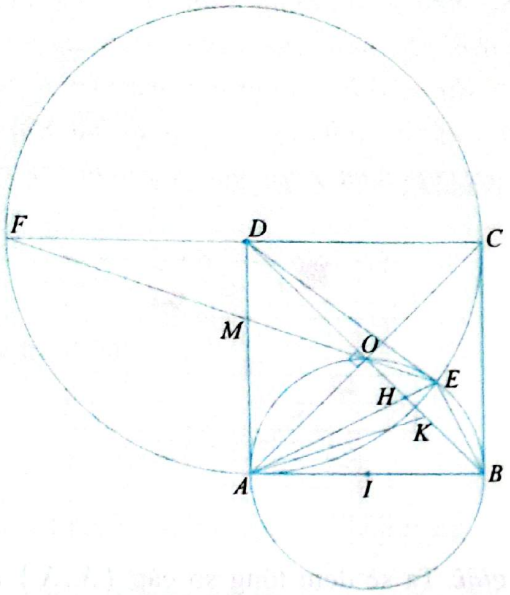
a) *Chứng minh: Hai tam giác DEO và DBE đồng dạng và điểm F thuộc đường tròn tâm D bán kính DA.*

b) *Chứng minh: $OA.AB=AK.AE$ và tính tỉ số $\dfrac{OE}{ME}$.*

Lời giải. a) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông DAB có AO là đường cao, ta có:

Được quét bằng CamScanner

$DO.DB = DA^2 = DE^2$ (vì $DA = DE$) $\Rightarrow \dfrac{DO}{DE} = \dfrac{DE}{DB}$.



Xét tam giác DEO và DBE có góc BDE chung và

$\dfrac{DO}{DE} = \dfrac{DE}{DB} \Rightarrow \Delta DEO \backsim \Delta DBE$ (c.g.c) (1).

Vì điểm E thuộc đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AEB} = 90°$. Gọi H là giao điểm của BO và AE, ta có: $\Delta BHE \backsim \Delta AHO$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{HE}{HO} = \dfrac{HB}{HA}$.

Lại có: $\widehat{OHE} = \widehat{AHB}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta AHB \backsim \Delta OHE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OEA} = \widehat{HBA}$.

Mà $\widehat{HBA} = 45°$ (do $ABCD$ là hình vuông) nên $\widehat{OEA} = 45°$. Suy ra:

$\widehat{OEB} = \widehat{OEA} + \widehat{AEB} = 45° + 90° = 135°$;

$\widehat{ODF} = \widehat{FDA} + \widehat{ADO} = 90° + 45° = 135°$

$\Rightarrow \widehat{OEB} = \widehat{ODF}$. Xét tam giác OEB và ODF, có:

$\widehat{EOB} = \widehat{DOF}$ (đối đỉnh) và $\widehat{OEB} = \widehat{ODF}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta OEB \backsim \Delta ODF$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{OBE} = \widehat{OFD}$ (2).

Từ (1) suy ra: $\widehat{DEF} = \widehat{OBE}$ (3).

Từ (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{OFD} = \widehat{DEF}$ nên ΔDEF cân tại D $\Rightarrow DF = DE = DA$.

Vậy F thuộc đường tròn tâm D bán kính DA.

b) Do F thuộc đường tròn tâm D bán kính DA và F thuộc CD nên CF là đường kính của đường tròn tâm D bán kính DA. Vì điểm A thuộc đường tròn đường kính CF nên $\widehat{FAC} = 90°$.

Xét ΔAOB và ΔFAC có $\widehat{FAC} = \widehat{AOB} = 90°$;

$\widehat{OAB} = \widehat{FCA} = 45° \Rightarrow \Delta AOB \backsim \Delta FAC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{OB}{AB} = \dfrac{AC}{FC} \Rightarrow \dfrac{2BK}{AB} = \dfrac{2OC}{FC} \Rightarrow \dfrac{BK}{AB} = \dfrac{OC}{FC}$.

Lại có: $\widehat{KBA} = \widehat{OCF} = 45°$ nên $\Delta ABK \backsim \Delta FCO$ (c.g.c) mà $\widehat{FOC} = \widehat{AOB}$ (đối đỉnh), nên suy ra $\widehat{AKB} = \widehat{AOE}$.

Kết hợp với $\widehat{ABK} = \widehat{AEO} = 45°$ suy ra:

$\Delta ABK \backsim \Delta AEO$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{OA}{OE} = \dfrac{KA}{AB}$ (4)

$\Rightarrow OA.AB = KA.AE$.

• Tính tỉ số $\dfrac{OE}{ME}$. Xét ΔMOA và ΔMAE có: $\widehat{M}$ chung, $\widehat{OEA} = \widehat{MAO} = 45°$

$\Rightarrow \Delta MOA \backsim \Delta MAE$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MO}{MA} = \dfrac{MA}{ME} = \dfrac{OA}{AE}$

$\Rightarrow \dfrac{MO}{MA}.\dfrac{MA}{ME} = \left(\dfrac{OA}{AE}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{MO}{ME} = \left(\dfrac{OA}{AE}\right)^2$ (5).

Đặt $OA = OB = x$ $(x > 0)$, ta có $AB = \sqrt{2}x$.

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác vuông AOK, ta có: $AK^2 = OA^2 + OK^2 = OA^2 + \left(\dfrac{OB}{2}\right)^2$

$= x^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}x^2$ (6).

Từ (4), (5) và (6), ta có:

$\dfrac{MO}{ME} = \left(\dfrac{AK}{AB}\right)^2 = \dfrac{AK^2}{AB^2} = \dfrac{\frac{5}{4}x^2}{2x^2} = \dfrac{5}{8} \Rightarrow \dfrac{OE}{ME} = \dfrac{3}{8}$.

Vậy $\dfrac{OE}{ME} = \dfrac{3}{8}$.

Câu 9. *Cho hình chữ nhật $ABCD$, có $AB = 60$ cm, $BC = 70$ cm. Trên cạnh AB lấy điểm E, trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $AE = 20$ cm, $BF = 30$ cm. Các điểm H, G lần lượt di động trên các cạnh AD, CD. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $EH + HG + GF$.*

Lời giải. Giả sử $AH = x$ (cm); $GC = y$ (cm) $(0 < x < 70;\ 0 < y < 60)$.

Ta có: $EB = 60 - 20 = 40$; $HD = 70 - x$;

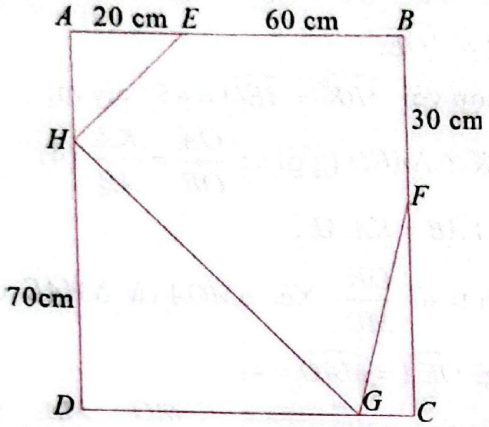
Được quét bằng CamScanner

$CF = 70 - 30 = 40;\ DG = 60 - y;$

$HE = \sqrt{AH^2 + AE^2} = \sqrt{x^2 + 20^2};$

$GF = \sqrt{CF^2 + CG^2} = \sqrt{y^2 + 40^2};$

$GH = \sqrt{HD^2 + DG^2} = \sqrt{(70-x)^2 + (60-y)^2}.$



Ta có: $FG + GH + HE = \sqrt{y^2 + 40^2}$

$+\sqrt{(70-x)^2 + (60-y)^2} + \sqrt{x^2 + 20^2}$ (1).

Ta chứng minh được:

$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{m^2 + n^2} \geq \sqrt{(a+m)^2 + (b+n)^2}$ (*).

Dấu "=" xảy ra khi: $an = bm$.

Áp dụng bất đẳng thức (*), ta có:

$\sqrt{y^2 + 40^2} + \sqrt{20^2 + x^2} \geq \sqrt{(y+20)^2 + (40+x)^2}$ (2).

Dấu "=" xảy ra khi: $xy = 800$. Ta lại có:

$\sqrt{(y+20)^2 + (40+x)^2} + \sqrt{(60-y)^2 + (70-x)^2}$

$\geq \sqrt{80^2 + 110^2} = 10\sqrt{185}$ (3).

Dấu "=" xảy ra khi:

$(y+20)(70-x) = (x+40)(60-y).$

Từ (1), (2), (3) suy ra: $FG + GH + HE \geq \sqrt{185}$.

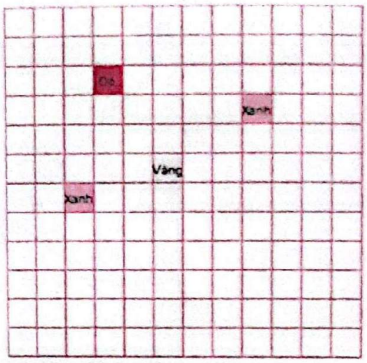
Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} xy = 800 \\ (y+20)(70-x) = (x+40)(60-y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{110}{4} = 27{,}5 \\ y = \dfrac{320}{11} \end{cases}$$ (thoả mãn).

Vậy tổng $EH + HG + GF$ nhỏ nhất bằng $10\sqrt{185}$ cm.

Câu 10. *Một lưới ô vuông kích thước 12×12, gồm 144 ô vuông nhỏ bằng nhau. Tô màu mỗi ô bởi một trong ba màu: đỏ, vàng, xanh tuỳ ý sao cho mỗi ô được tô bởi đúng một màu (hình vẽ minh họa). Chứng minh rằng tồn tại ít nhất bốn ô được tô cùng màu nằm ở bốn góc của hình chữ nhật.*



Lời giải. Ta sẽ đếm tổng số cặp $(X;X)$ ở mỗi cột. Gọi $a_1; a_2; ...; a_{12}$ tương ứng là số lượng ô X trên cột 1; 2; 3;...;12 của bảng.

Ta có: $m = a_1 + a_2 + ... + a_{12} \geq 48$ và ở cột thứ i có: $\dfrac{a_i(a_i - 1)}{2} = \dfrac{a_i^2 - a_i}{2}$ cặp $(X;X)$.

Tổng số cặp $(X;X)$ trên toàn bảng là:

$$s = \frac{1}{2}\left[a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{12}^2 - (a_1 + a_2 + ... + a_{12})\right].$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$s \geq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}(a_1 + a_2 + ... + a_{12})^2 - (a_1 + a_2 + ... + a_{12})\right]$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{m}{12} - 1\right) \geq 72.$$

Mỗi cặp $(X;X)$ trên cùng một cột thuộc vào hai hàng thứ i, k nào đó. Số cách chọn hai hàng $(j;k)$ là: $\dfrac{12.11}{2} = 66$ cách. Mà có ít nhất 72 cặp $(X;X)$ nên tồn tại ít nhất 2 cặp $(X;X)$ cùng ở hai hàng $(j;k)$ nào đó.

Điều này có nghĩa là tồn tại ít nhất 4 ô màu xanh nằm ở bốn góc của một hình chữ nhật.

Vậy tồn tại ít nhất bốn ô được tô cùng màu là bốn góc của một hình chữ nhật.

HÀ VĂN NHÂN

(GV THCS Hoằng Xuân, Hoằng Hoá, Thanh Hoá)

Được quét bằng CamScanner

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN

Thời gian làm bài: 150 phút

Năm học 2026 - 2027

Câu 1 (2,0 *điểm*)

a) Giả sử a, b, c, x, y, z là các số thực khác 0 thoả mãn $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ và $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

b) Tìm tất cả các số thực x, y, z thoả mãn:

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}=3.$$

Câu 2 (1,5 *điểm*) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n \geq 6$ thì số

$$a_n = 1+\frac{2.6.10...(4n-2)}{(n+5)(n+6)...(2n)}$$

là một số chính phương.

Câu 3 (1,5 *điểm*) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\leq\frac{3}{4}.$$

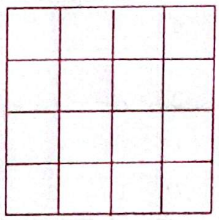
Câu 4 (3,5 *điểm*) Cho hình bình hành $ABCD$ có $CB=CA$. Gọi M là điểm bất kỳ trên tia đối của tia BA. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt MD tại N (N khác D), đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt MC tại K (K khác M).

a) Chứng minh tứ giác $ABKC$ nội tiếp.

b) Gọi I là giao điểm của đường thẳng AN và đường thẳng BK. Chứng minh I luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M thay đổi.

Câu 5 (1,5 *điểm*)

a) Cho bảng ô vuông có kích thước 4×4 như hình dưới.



Mỗi ô trong bảng này được viết một số nguyên dương sao cho 16 số trên bảng đôi một khác nhau. Trong mỗi hàng, mỗi cột luôn tồn tại một số bằng tổng ba số còn lại trong hàng, trong cột đó. Gọi M là số lớn nhất trong 16 số trên bảng. Tìm giá trị nhỏ nhất của M.

b) Có bao nhiêu tập hợp con A của tập hợp $\{1; 2; 3; 4; \ldots; 2014\}$ thoả mãn điều kiện A có ít nhất 2 phần tử và nếu $x\in A$, $y\in A$, $x>y$ thì

$$\frac{y^2}{x-y}\in A.$$

HÀ VĂN NHÂN

(*GV THCS Hoằng Xuân, Hoằng Hoá, Thanh Hoá*)

Giới thiệu

****

SAI LẦM . . . (*Tiếp theo trang 47*)

Số tứ giác có các đỉnh là đỉnh của đa giác (H) và có ít nhất một cạnh là cạnh của đa giác (H) là $21.C_{19}^2$.

Suy ra số tứ giác được lập thành mà không có cạnh nào là cạnh của đa giác (H) là:

$$C_{21}^4-21.C_{19}^2=2394.$$

Theo em lời giải của bạn Minh đã đúng chưa? Nếu là em thì em sẽ giải bài toán trên như thế nào?

THÂN VĂN DỰ

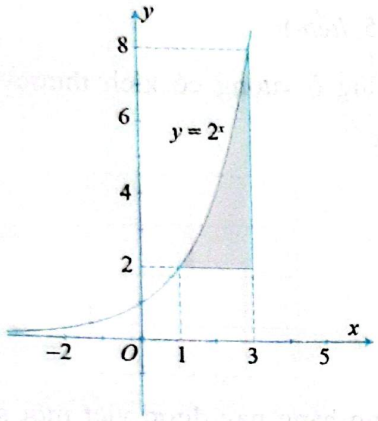
(*GV THPT Lạng Giang số 1, Bắc Ninh*)

Được quét bằng CamScanner

THỬ SỨC TRƯỚC KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2026

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Diện tích hình phẳng phần bôi đen trong hình bên dưới bằng



A. $\int_1^3 (2^x - 2)\,dx$. B. $\int_1^3 (2^x + 2)\,dx$.

C. $\int_1^3 (2 - 2^x)\,dx$. D. $\int_1^3 2^x\,dx$.

Câu 2. Tập nghiệm của phương trình $\log_3 x < 2$ là

A. $S = [0;9)$. B. $S = (0;+\infty)$.

C. $S = (0;9)$. D. $S = (-\infty;9)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{4} = \frac{-y}{2} = \frac{z+2}{-6}$ có một vectơ chỉ phương là

A. $\overrightarrow{u_1} = (4;2;-6)$. B. $\overrightarrow{u_2} = (2;-1;3)$.

C. $\overrightarrow{u_3} = (-2;1;3)$. D. $\overrightarrow{u_4} = (1;0;2)$.

Câu 4. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = -6$. Công bội q của cấp số nhân đã cho là

A. $q = -\frac{1}{3}$. B. $q = -3$. C. $q = 8$. D. $q = 3$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;4)$. B. $(0;+\infty)$.

C. $(-\infty;0)$. D. $(0;2)$.

Câu 6. Sau khi kiểm tra sức khỏe tổng quát, kết quả số cân nặng của 40 học sinh lớp 12A được thể hiện trong bảng số liệu sau:

Cân nặng (kg)	[40;50)	[50;60)	[60;70)	[70;80)	[80;90)
Số học sinh	7	12	12	7	2

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau?

A. 50. B. 50,5. C. 52,5. D. 55,5.

Câu 7. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2(2a^4)$ bằng

A. $4\log_2 a$. B. $1 + 4\log_2 a$.

C. $4 + 4\log_2 a$. D. $4 + \log_2 a$.

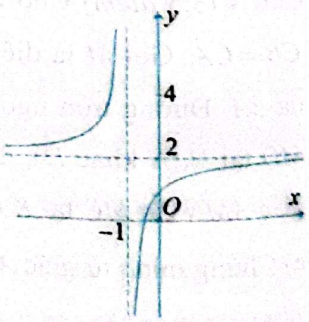
Câu 8. Cho hai biến cố A và B thỏa mãn

$$P(A) = \frac{2}{5};\ P(B) = \frac{1}{3};\ P(B \mid A) = \frac{1}{4}.$$

Giá trị của $P(A \mid B)$ là

A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{1}{12}$. C. $\frac{2}{15}$. D. $\frac{3}{10}$.

Câu 9. Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình bên dưới.



Đường tiệm cận đứng của đồ thị là đường thẳng có phương trình

A. $x = 1$. B. $x = 2$.

C. $x = -2$. D. $x = -1$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = e^x - \sin x$. Khẳng định nào dưới dây là đúng?

A. $\int f(x)\,dx = e^x + \cos x + C$.

B. $\int f(x)\,dx = e^x - \cos x + C$.

C. $\int f(x)\,dx = e^x - \sin x + C$.

D. $\int f(x)\,dx = e^x + \sin x + C$.

Được quét bằng CamScanner

Câu 11. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu:

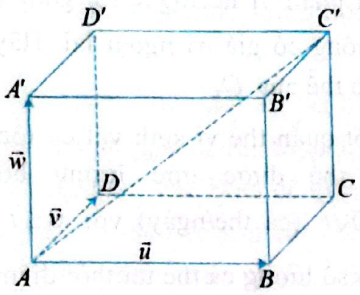
$$(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=4.$$

Tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu (S) là

A. $I(1;2;2);R=4.$ **B.** $I(1;-2;2);R=4.$

C. $I(-1;2;-2);R=2.$ **D.** $I(1;-2;2);R=2.$

Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ trong không gian với các đỉnh A,B,C,D,A',B',C',D' sao cho $AB=\vec{u}$, $AD=\vec{v}$ và $AA'=\vec{w}$. Biết rằng $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ đôi một vuông góc với nhau và có độ dài lần lượt là $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=3$ và $|\vec{w}|=2$.



Độ dài của đường chéo từ A đến C' (góc đối diện với A) là:

A. $\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{29}$. **C.** 9. **D.** $\sqrt{20}$.

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Chi phí nhiên liệu một chiếc tàu chạy trên sông được chia làm hai phần:

• Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng trên 1 giờ.

• Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v=10$ km/h thì phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng/giờ.

a) Khi vận tốc $v=10$ km/h thì chi phí nguyên liệu cho phần thứ nhất trên 1 km đường sông là 48000 đồng.

b) Hàm số xác định tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường sông với vận tốc x (km/h) là:

$$f(x)=\frac{480}{x}+0,03x^3.$$

c) Khi vận tốc $v=30$ km/h thì tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường sông là 43000 đồng.

d) Vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường sông nhỏ nhất là $v=20$ km/h.

Câu 2. Trên trục hệ trục tọa độ Oxy, hai chất điểm đồng thời xuất phát từ gốc tọa độ O tại thời điểm $t=0$ và chuyển động cùng chiều dương.

• Chất điểm thứ nhất chuyển động với vận tốc biến thiên theo quy luật: $v_1(t)=6t-3t^2$ (m/s).

• Chất điểm thứ hai chuyển động thẳng nhanh dần đều với gia tốc không đổi $a=2$ m/s^2.

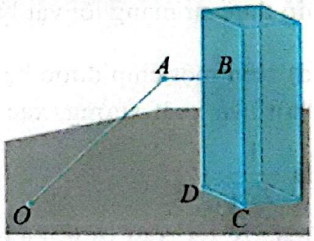
a) Phương trình vận tốc của chất điểm thứ hai $v_2(t)=2t$ (m/s).

b) Hai chất điểm gặp nhau tại thời điểm $t=2$ giây.

c) Khoảng cách lớn nhất giữa hai chất điểm trong khoảng thời gian từ lúc xuất phát đến khi gặp nhau là 1 m.

d) Tại thời điểm hai chất điểm gặp nhau, vận tốc của chất điểm thứ nhất bằng vận tốc của chất điểm thứ hai.

Câu 3. Một công ty xây dựng sử dụng thiết bị bay không người lái (drone) để vận chuyển vận tư lên các tầng của một tòa nhà cao tầng. Mô hình bay của drone được thiết lập như hình dưới với hệ trục tọa độ $Oxyz$ có đơn vị là mét, điểm xuất phát của drone trùng với gốc tọa độ. Mặt ngoài của tòa nhà cao tầng được xem là một phần của mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng Oxy đi qua hai điểm $C(10;50;0)$ và $D(30;10;0)$. Drone bắt đầu bay từ kho hàng tại gốc tọa độ $O(0;0;0)$ theo một đường thẳng đến vị trí $A(20;20;120)$. Từ vị trí A, drone thay đổi đường bay, di chuyển theo phương vuông góc với mặt phẳng (P) đến vị trí giao hàng B thuộc mặt phẳng.



a) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có giá vuông góc với đường thẳng CD và trục Oz.

b) Phương trình mặt phẳng

$$(P):2x+y-2z-70=0.$$

c) Vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\vec{v}=(2;1;0)$.

d) Quãng đường mà drone bay từ điểm xuất phát đến điểm giao hàng là 128 m (*không làm tròn kết*

Được quét bằng CamScanner

quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng đơn vị).

Câu 4. Trong dây chuyền sản xuất vi xử lý NPU (Neural Processing Unit) chuyên dụng cho trí tuệ nhân tạo, tỷ lệ sản phẩm gặp lỗi tinh vi trên bề mặt bán dẫn là 4%. Để kiểm soát chất lượng đầu ra mà vẫn tối ưu chi phí, nhà máy thiết lập một quy trình kiểm định hai bước:

Bước 1. Quét quang học tự động – AOI áp dụng cho 100% sản phẩm. Hệ thống này có độ nhạy (phát hiện đúng chip lỗi) là 90%. Nhưng do nhiễu ánh sáng, nó có tỷ lệ báo nhầm chip tốt thành chip lỗi là 5%.

Bước 2. Kiểm tra đặc tính điện tử, chỉ thực hiện trên những chip đã bị bước 1 báo lỗi. Đây là bước kiểm tra sâu, có khả năng phát hiện lỗi tuyệt đối 100%. Tuy nhiên do sai số thiết bị đo, vẫn có xác suất 10% kết luận nhầm một chip tốt là lỗi.

a) Xác suất để một chip bất kỳ bị hệ thống bước 1 phân loại "lỗi" là 0,084.

b) Xác suất để một chip bị loại bỏ sau khi qua cả hai bước kiểm định là 4,08%.

c) Trong số các chip bị loại bỏ, xác suất để con chip đó thực sự mang lỗi vật lý là $\frac{15}{17}$.

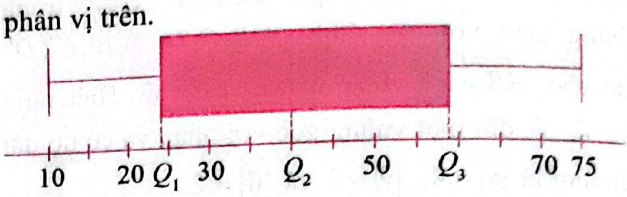
d) Nếu một chip được hệ thống bước 1 xác nhận là "tốt" và xuất xưởng, xác suất thực tế nó vẫn bị lỗi là $\frac{1}{229}$.

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Bác An đầu tư 1,2 tỉ đồng vào ba loại trái phiếu: trái phiếu chính phủ với lãi suất 7% một năm, trái phiếu ngân hàng với lãi suất 8% một năm và trái phiếu doanh nghiệp với lãi suất 12% một năm. Với tính toán phân bổ vốn tối ưu, bác An muốn số tiền đầu tư trái phiếu chính phủ gấp ít nhất 3 lần số tiền đầu tư trái phiếu ngân hàng. Hơn nữa, để giảm thiểu rủi ro, bác An đầu tư không quá 200 triệu đồng cho trái phiếu doanh nghiệp. Sau một năm, bác An có thể thu được lợi nhuận nhiều nhất là bao nhiêu triệu đồng?

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ cạnh bên $SA=2$ và đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng 4. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của đoạn OA. Tính khoảng cách giữa các đường thẳng SD và AB *(không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần trăm).*

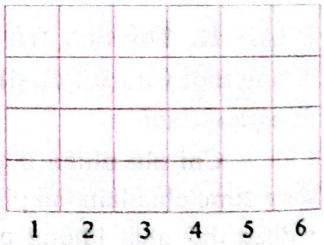
Câu 3. Một nghiên cứu sinh đã cân khối lượng trứng thằn lằn (tính bằng gam) và ghi lại kết quả. Biểu đồ hộp – râu dưới đây cho thấy bản tóm tắt các kết quả biết rằng: giá trị nhỏ nhất là 10, giá trị lớn nhất là 75 và trung vị của mẫu số liệu là $Q_2=40$, Q_1 và Q_3 lần lượt là tứ phân vị dưới và tứ phân vị trên.



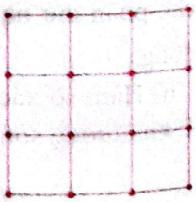
Khoảng tứ phân vị là $\Delta Q=20$ gam và trong các kết quả không có giá trị ngoại lai. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất có thể của Q_3.

Câu 4. Một quần thể vi sinh vật có tốc độ tăng số lượng cá thể được ước lượng bởi hàm số $P'(t)=120\sqrt{t}$ (cá thể/ngày) với $0\le t\le 15$, trong đó $P(t)$ là số lượng cá thể tại thời điểm t ngày kể từ lúc bắt đầu. Biết rằng ban đầu quần thể có 2000 cá thể. Hãy ước lượng số lượng cá thể sau 9 ngày.

Câu 5. Cho một bảng ô vuông kích thước 4×6 (gồm 4 hàng và 6 cột). Tại mỗi ô ở hàng i và cột j $(1\le i\le 4;1\le j\le 6)$, người ta ghi một số nguyên dương x có giá trị bằng tích của chỉ số hàng và chỉ số cột: $x=i.j$. Một hình chữ nhật được gọi là "hình chữ nhật may mắn" nếu nó có chứa ít nhất một ô mang số chính phương. Tính số lượng các "hình chữ nhật may mắn" có trong bảng ô vuông trên.



Câu 6. Cho bảng ô vuông 3×3 gồm 16 đỉnh (bảng có 3 hàng, 3 cột, 9 hình vuông đơn vị như hình vẽ). Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh từ 16 đỉnh trên. Tính xác suất để 3 đỉnh đó lập thành một tam giác vuông *(không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần trăm).*



NGHIÊM XUÂN LỰC
(GV THPT Thăng Long, Hà Nội)

Được quét bằng CamScanner

SỬ DỤNG SƠ ĐỒ HÌNH CÂY CÓ TRỌNG SỐ ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

HUỲNH VĂN MINH
(GV PTDTNT-THPT Sa Thầy, Quảng Ngãi)

Trong sách giáo khoa môn Toán của bộ *Kết nối tri thức với cuộc sống*, việc vận dụng kết quả Sơ đồ hình cây (*có trọng số*) vào giải một số bài toán xác suất có điều kiện là một phát hiện khá thú vị. Nội dung dạng toán này khá mới đối với một số giáo viên và hầu hết các em học sinh đang dạy và học môn Toán theo Chương trình Giáo dục phổ thông năm 2018.

Trong cách giải này, việc đặt ẩn (kí hiệu biến cố) là quan trọng trong quá trình thực hiện. Từ yêu cầu đề bài, đặt ẩn cho các biến cố có trong đề bài. Cách đặt thường là biến cố sau các cụm từ: "biết"; "khi"; "với điều kiện"; "sao cho",... là biến cố B, còn lại đặt là biến cố A.

Dưới đây là một số thí dụ minh hoạ cho nhận định mà tác giả đưa ra.

1. Dạng thức đánh giá II (Xác suất hợp/xác suất có điều kiện)

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi thí dụ, chọn đúng hoặc sai.

Thí dụ 1 (Trích đề tham khảo của Bộ GD&ĐT, Kì thi TN THPT năm 2025). *Trước khi đưa một sản phẩm ra thị trường, người ta đã phỏng vấn ngẫu nhiên 200 khách hàng về sản phẩm đó. Kết quả thống kê như sau: có 105 người trả lời "sẽ mua"; có 95 người trả lời "không mua". Kinh nghiệm cho thấy tỉ lệ khách hàng thực sự sẽ mua sản phẩm tương ứng với những cách trả lời "sẽ mua" và "không mua" lần lượt là 70% và 30%.*

Gọi A là biến cố "Người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm"; B là biến cố "Người được phỏng vấn trả lời sẽ mua sản phẩm".

a) *Xác suất* $P(B)=\dfrac{21}{40}$ *và* $P\left(\overline{B}\right)=\dfrac{19}{40}$.

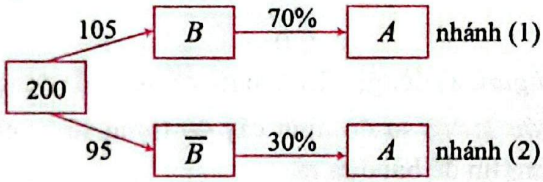
b) *Xác suất có điều kiện* $P(A\mid B)=0,3$.

c) *Xác suất* $P(A)=0,51$.

d) *Trong số những người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm có 70% người đã trả lời "sẽ mua" khi được phỏng vấn (kết quả tính theo phần trăm được làm tròn đến hàng đơn vị).*

Lời giải. a) đúng; b) sai; c) đúng; d) sai.

Bước 1: Vẽ sơ đồ hình cây có trọng số từ những thông tin đề bài đưa ra.



Bước 2: a) Xác suất:

$$P(B)=\frac{105}{200}=\frac{21}{40};\ P\left(\overline{B}\right)=1-P(B)=\frac{19}{40}.$$

b) Ta có:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{70\%.\dfrac{105}{200}}{\dfrac{105}{200}}=0,7.$$

c) Có hai nhánh cây đi tới biến cố A, nên xác suất biến cố A được xác định bằng tổng xác suất của biến cố A ở nhánh (1) và nhánh (2). Vậy:

$$P(A)=\frac{105}{200}.70\%+\frac{95}{200}.30\%=0,51.$$

d) Tổng số người thực sự sẽ mua sản phẩm là:

$$200.0,51=102 \text{ (người).}$$

Tỉ lệ người thực sự mua sản phẩm đã trả lời "sẽ mua" khi được phỏng vấn và người thực sự mua sản phẩm nói chung là:

$$\frac{105.P(A\mid B)}{102}=\frac{105.0,51}{102}\approx 72\%.$$

Thí dụ 2 (Trích đề kiểm tra cuối học kì 2 môn Toán 12 năm 2024-2025, Sở GD&ĐT Bắc Ninh). *Một hộp có chứa 5 quả cầu màu xanh và 6*

Được quét bằng CamScanner

quả cầu màu đỏ. Bạn Bắc lấy ngẫu nhiên một quả cầu bất kì trong hộp đó (không trả lại). Sau đó bạn Ninh lấy ngẫu nhiên một quả cầu bất kì trong số những quả cầu còn lại trong hộp.

a) *Tổng số quả cầu trong hộp ban đầu là 11 quả.*

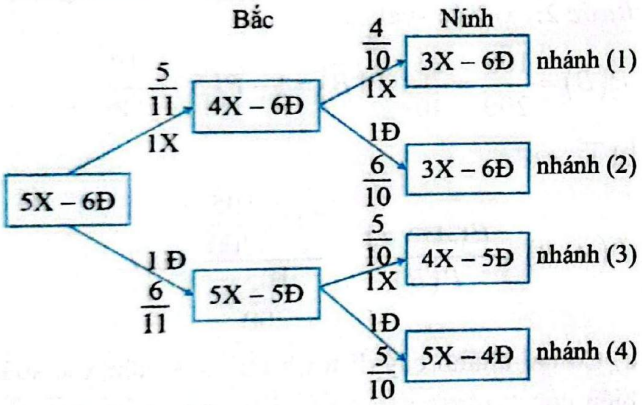
b) *Xác suất để bạn Bắc lấy được quả cầu màu xanh là* $\frac{5}{11}$.

c) *Nếu bạn Bắc lấy được quả cầu màu xanh thì xác suất để bạn Ninh lấy được quả cầu màu đỏ là* $\frac{6}{11}$.

d) *Xác suất để bạn Bắc lấy được quả cầu màu xanh và bạn Ninh lấy được quả cầu màu đỏ là* $\frac{3}{11}$.

Lời giải. a) đúng; b) đúng; c) sai; d) đúng.

Bước 1: Vẽ sơ đồ hình cây có trọng số từ những thông tin đề bài đưa ra.



Bước 2: Gọi B là biến cố: "Bắc lấy được quả cầu màu xanh" và A là biến cố: "Ninh lấy được quả cầu màu đỏ".

a) Tổng số quả cầu bằng: $5+6=11$ (quả).

b) Suy ra $P(B)=\frac{5}{11}$.

c) Xác suất cần tính là xác suất của biến cố A có điều kiện biến cố B đã xảy ra. Ta tính $P(A\,|\,B)$.

Ta có: $P(A\cap B)=\frac{5}{11}.\frac{6}{10}=\frac{3}{11}$.

Vậy: $P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{11}}{\frac{5}{11}}=\frac{3}{5}$.

d) Biến cố: "Bạn Bắc lấy được quả cầu màu xanh và bạn Ninh lấy được quả cầu màu đỏ" là AB, tương ứng với nhánh (2) của sơ đồ hình cây.

Theo công thức nhân xác suất ta có:

$$P(BA)=P(B).P(A\,|\,B)=\frac{5}{11}.\frac{3}{5}=\frac{3}{11}.$$

Thí dụ 3 (Trích đề thi thử TN THPT năm 2025 môn Toán đợt 2, Sở GD&ĐT Thái Nguyên). *Có 10 hộp bi trong đó có 4 hộp bi loại I và 6 hộp bi loại II, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Mỗi hộp bi loại I có 3 bi trắng và 5 bi đỏ, mỗi hộp bi loại II có 6 bi trắng và 2 bi đỏ. Bạn Việt lấy ngẫu nhiên một hộp bi rồi từ hộp đó lấy ra ngẫu nhiên một viên bi.*

a) *Xác suất để bạn Việt lấy được hộp bi loại I bằng* $\frac{2}{5}$.

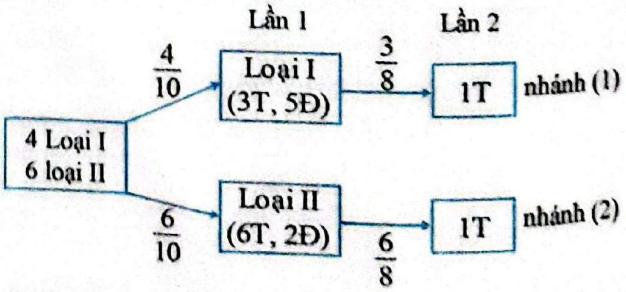
b) *Biết rằng bạn Việt lấy được hộp bi loại I, xác suất để viên bi lấy ra có màu trắng bằng* $\frac{3}{5}$.

c) *Xác suất để bạn Việt lấy được viên bi màu trắng bằng* $\frac{3}{5}$.

d) *Khi bạn Việt lấy được một viên bi màu trắng thì xác suất để viên bi đó được lấy ra từ hộp bi loại I bằng* $\frac{1}{3}$.

Lời giải. a) đúng; b) sai; c) đúng; d) sai.

Bước 1: Vẽ sơ đồ hình cây có trọng số từ những thông tin đề bài đưa ra.



Bước 2: Gọi B là biến cố: "Bạn Việt lấy được bi màu trắng" và A là biến cố: "Bạn Việt lấy được hộp bi loại I".

Được quét bằng CamScanner

a) $P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

b) Xác suất cần tính là xác suất của biến cố B với điều kiện A đã xảy ra.

Do đó ta có: $P(B\mid A)=\frac{3}{8}$.

c) Có hai nhánh cây (nhánh (1) và nhánh (2)) đi đến B nên theo công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(B)=\frac{4}{10}.\frac{3}{8}+\frac{6}{10}.\frac{6}{8}=\frac{3}{5}.$$

d) Xác suất cần tính là xác suất có điều kiện ngược, nghĩa là tính xác suất của biến cố A với điều kiện B đã xảy ra. Do đó ta cần tính:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Ta có: $P(B)=\frac{3}{5}; P(A\cap B)=\frac{4}{10}.\frac{3}{8}=\frac{3}{20}$.

Suy ra: $P(A\mid B)=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{4}$.

Thí dụ 4 (Trích dẫn đề cuối kì 2 môn Toán 12 năm 2024-2025, Trường THPT Chế Lan Viên, Quảng Trị). *Một lớp học có 40 học sinh, trong đó có 27 học sinh nam và 13 học sinh nữ. Thống kê điểm kiểm tra cuối học kì I, lớp có 18 em đạt điểm trung bình trở lên, trong đó có 8 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh trong lớp.*

a) *Xác suất học sinh được chọn là học sinh nam bằng 0,675.*

b) *Xác suất học sinh được chọn là học sinh nữ bằng 0,315.*

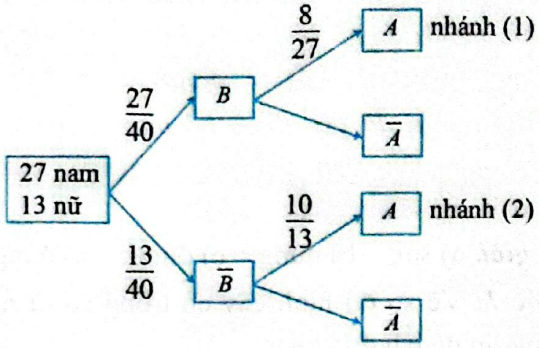
c) *Xác suất học sinh được chọn là học sinh nam và đạt điểm trung bình trở lên bằng 0,2.*

d) *Biết rằng học sinh được chọn là nữ, xác suất học sinh đó không đạt điểm trung bình bằng* $\frac{19}{27}$.

Lời giải. a) đúng; b) sai; c) đúng; d) sai.

***Bước 1*:** Gọi B là biến cố: "Chọn được học sinh nam"; A là biến cố: "Học sinh đạt điểm trung bình trở lên".

Từ đó ta có sơ đồ hình cây có trọng số từ những thông tin đề bài đưa ra như sau:



Bước 2:

a) $P(B)=\frac{27}{40}=0,675$.

b) $P(\overline{B})=1-P(B)=0,325$.

c) $P(B\cap A)=\frac{27}{40}.\frac{8}{27}=0,2$.

d) Xác suất cần tính là xác suất của biến cố $\overline{A}$ với điều kiện $\overline{B}$ đã xảy ra, ta cần tính $P(\overline{A}\mid\overline{B})$. Vậy:

$$P(\overline{B}\cap\overline{A})=\frac{13}{40}.\left(1-\frac{10}{13}\right)=\frac{3}{40},\ P(\overline{B})=\frac{13}{40}.$$

Vậy: $P(\overline{A}\mid\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{\frac{3}{40}}{\frac{13}{40}}=\frac{3}{13}$.

Thí dụ 5 (Trích đề thi thử TN THPT năm 2025, Trường THPT Chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội). *Khảo sát những người xem bộ phim hoạt hình vừa được phát hành cho thấy 70% người xem là trẻ em và 30% là người lớn. Trong số các trẻ em đến xem phim có 50% yêu thích bộ phim và khẳng định sẽ đi xem tiếp phần 2; 30% yêu thích bộ phim nhưng sẽ không xem tiếp phần 2; 20% còn lại không thích bộ phim và không xem tiếp phần 2. Trong số những người lớn đi xem phim có 20% yêu thích bộ phim và khẳng định sẽ đi xem tiếp phần 2; 10% yêu thích bộ phim nhưng sẽ không xem tiếp phần 2; 70% còn lại không thích bộ phim và không xem tiếp phần 2. Chọn ngẫu nhiên 1 người đã xem phim.*

a) *Biết người được chọn là trẻ em, xác suất để người đó yêu thích bộ phim là 0,56.*

Được quét bằng CamScanner

b) *Xác suất để người đó không xem tiếp phần 2 là 0,59.*

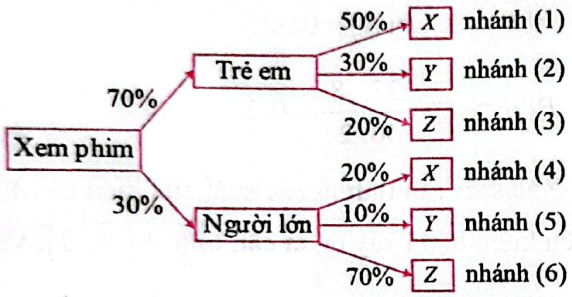
c) *Biết người đó sẽ xem tiếp phần 2 của bộ phim, xác suất để người đó là trẻ em lớn hơn 0,85.*

d) *Biết người đó yêu thích bộ phim, xác suất để người đó không xem tiếp phần 2 là 0,37 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).*

Lời giải. a) sai; b) đúng; c) đúng; d) đúng.

Bước 1: Vẽ sơ đồ hình cây có trọng số từ những thông tin đề bài đưa ra.

Kí hiệu X: "Thích và xem tiếp phần 2"; Y: "Thích và không xem tiếp phần 2"; Z: "Không thích và không xem tiếp phần 2".



Bước 2: Gọi B là biến cố: "Người được chọn là trẻ em"; A là biến cố: "Người được chọn yêu thích phim"; C là biến cố: "Người được chọn không xem tiếp phần 2".

a) Xác suất cần tìm là $P(A\,|\,B)$.

Có nhánh (1) và (2) đi tới biến cố A với điều kiện B xảy ra, do đó:

$$P(A\cap B)=0,5.0,7+0,3.0,7=0,56.$$

Ta có: $P(B)=70\%=0,7.$

Vậy $P(A\,|\,B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=0,8.$

b) Xác suất của biến cố C bằng tổng xác suất ở các nhánh (2), (3), (5) và (6).

$$P(C)=(0,3+0,2).0,7+(0,1+0,7).0,3=0,59.$$

c) Xác suất cần tìm là xác suất của biến cố B với điều kiện $\overline{C}$ đã xảy ra. Ta cần tính $P(B\,|\,\overline{C})$.

Ta có:

$$P(B\cap\overline{C})=P(B).P(\overline{C}\,|\,B)=0,7.(0,3+0,2)=0,35.$$

Xác suất biến cố $\overline{C}$ là tổng xác suất ở nhánh (1) và nhánh (4). Do đó ta có:

$$P(\overline{C})=0,7.0,5+0,3.0,2=0,41.$$

Theo công thức xác suất có điều kiện ta có:

$$P(B\,|\,\overline{C})=\frac{P(B\cap\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{0,35}{0,41}\approx 0,854.$$

d) Xác suất cần tìm là xác suất của biến cố C với điều kiện A đã xảy ra. Ta cần tính $P(C\,|\,A)$.

Nhánh (2) và (5) cùng đi đến biến cố $C\cap A$ (thích và không xem tiếp phần 2). Do đó ta có:

$$P(C\cap A)=0,7.0,3+0,3.0,1=0,24.$$

Xác suất biến cố A là tổng xác suất ở nhánh (1), (2), (4) và (5). Vậy:

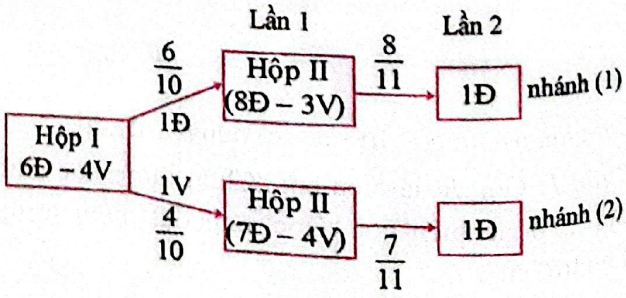
$$P(A)=(0,5+0,3)0,7+(0,2+0,1)0,3=0,65.$$

Vậy: $P(C\,|\,A)=\dfrac{P(C\cap A)}{P(A)}=\dfrac{0,24}{0,65}\approx 0,37.$

2. Dạng thức đánh giá III - xác suất ngược (Công thức Bayes/Xác suất toàn phần)

Thí dụ 6 (Trích đề tham khảo của Bộ GD&ĐT, Kì thi TN THPT năm 2025). *Có hai chiếc hộp, hộp I có 6 quả bóng màu đỏ và 4 quả bóng màu vàng, hộp II có 7 quả bóng màu đỏ và 3 quả bóng màu vàng, các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp I bỏ vào hộp II. Sau đó, lấy ra ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp II. Tính xác suất để quả bóng lấy ra từ hộp II là quả bóng được chuyển từ hộp I sang, biết quả bóng đó có màu đỏ (làm tròn đến hàng phần trăm).*

Lời giải. Bước 1: Vẽ sơ đồ hình cây có trọng số từ những thông tin đề bài đưa ra.



Được quét bằng CamScanner

Bước 2: Gọi B là biến cố: "Lấy được từ hộp II quả bóng màu đỏ"; A là biến cố: "Quả bóng lấy được từ II và quả bóng đó được chuyển từ hộp I sang".

Áp dụng công thức xác suất có điều kiện (biến cố điều kiện là B), ta có: $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Dựa vào sơ đồ cây, ta có:

$$P(A\cap B)=\frac{1}{11}.\frac{6}{10}=\frac{3}{55}.$$

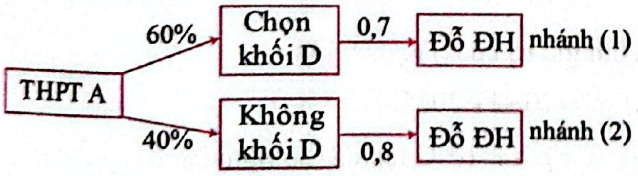
Xác suất biến cố B được xác định bằng tổng xác suất của biến cố B ở nhánh (1) và nhánh (2).

Suy ra: $P(B)=\dfrac{6}{10}.\dfrac{8}{11}+\dfrac{4}{10}.\dfrac{7}{11}=\dfrac{38}{55}$.

Vậy: $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{3}{55}}{\frac{38}{55}}=\dfrac{3}{38}\approx 0,08.$

Thí dụ 7 (Trích đề ôn tập cuối kì 2 môn Toán 12, năm 2024-2025, Trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên). *Trong kì thi TN THPT, trường THPT A có 60% học sinh lựa chọn khối D để xét tuyển đại học. Biết rằng, nếu một học sinh lựa chọn khối D thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,7 còn nếu học sinh không lựa chọn khối D thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,8. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của trường THPT A đã tốt nghiệp trong kì thi trên. Tính xác suất học sinh đó chọn khối D biết học sinh này đã đỗ đại học (kết quả làm tròn đến phần mười).*

Lời giải. Bước 1: Vẽ sơ đồ hình cây có trọng số từ những thông tin đề bài đưa ra.



Bước 2: Gọi B là biến cố: "Đỗ đại học" và A là biến cố: "Chọn khối D".

Áp dụng công thức xác suất có điều kiện (ở đây biến cố điều kiện là biến cố B), ta tính $P(A|B)$.

Căn cứ sơ hình đồ cây có trọng số, ta có:

$$P(A\cap B)=\frac{60}{100}.0,7=\frac{21}{50}.$$

Xác suất biến cố B được xác định bằng tổng xác suất của biến cố B ở nhánh (1) và nhánh (2).

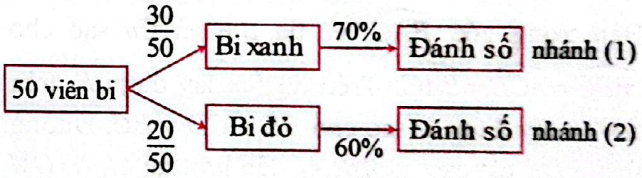
Suy ra: $P(B)=\dfrac{60}{100}.0,7+\dfrac{40}{100}.0,8=\dfrac{37}{50}$.

Vậy: $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{21}{50}}{\frac{37}{50}}=\dfrac{21}{37}\approx 0,6.$

Thí dụ 8 (Trích Đề thi thử TN THPT năm 2025, Trường THPT Chuyên Hùng Vương, Phú Thọ).

Một chiếc hộp có chứa 50 viên bi, trong đó có 30 viên bi màu xanh và 20 viên bi màu đỏ, các viên bi có kích thước và khối lượng giống nhau. Sau khi kiểm tra, người ta thấy có 70% số viên bi màu xanh được đánh số và 60% số viên bi màu đỏ được đánh số, những viên bi còn lại không đánh số. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp đó. Biết rằng, viên bi lấy ra được đánh số, xác suất để viên bi đó có màu xanh là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. Bước 1: Vẽ sơ đồ hình cây có trọng số từ những thông tin đề bài đưa ra.



Bước 2: Gọi B là biến cố: "Viên bi được đánh số" và A là biến cố: "Viên bi màu xanh".

Áp dụng công thức xác suất có điều kiện (biến cố điều kiện là B), ta có $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Căn cứ sơ đồ cây có trọng số, ta có:

$$P(A\cap B)=70\%.\frac{30}{50}=\frac{21}{50}.$$

Xác suất biến cố B được xác định bằng tổng xác suất của biến cố B ở nhánh (1) và nhánh (2).

Suy ra: $P(B)=\dfrac{30}{50}.70\%+\dfrac{20}{50}.60\%=\dfrac{33}{50}$.

Vậy $P(A|B)=\dfrac{\frac{21}{50}}{\frac{33}{50}}=\dfrac{7}{11}\approx 0,64.$

Được quét bằng CamScanner



CÁC LỚP THCS

Bài T1/586 (Lớp 6). Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $3^y = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T2/586 (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 15^0$, $\widehat{ABC} = 60^0$. Chứng minh:

$$AB + BC \geq \sqrt{2}AC.$$

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

Bài T3/586. Tìm ba chữ số cuối cùng của số 2026^{2027}.

NHƯ HOÀNG
(Hà Nội)

Bài T4/586. Cho tam giác ABC nhọn, $AB < AC$. Bên trong góc $\widehat{BAC}$ vẽ tia Bm và Cn sao cho $\widehat{mBC} = \widehat{nCB} = \widehat{BAC}$. Trên tia Bm lấy điểm E, trên tia Cn lấy điểm D sao cho $BE = CD = BC$. Đường thẳng DE cắt các tia AB, AC lần lượt tại M, N. CM cắt tia Bm tại P, BN cắt tia Cn tại Q. Đường thẳng qua P song song với AB cắt cạnh BC tại I. Chứng minh tam giác IPQ cân.

BÙI VĂN CHI
(21/2 Lê Hồng Phong, Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T5/586. Cho số vô tỷ $\sqrt{m}$ $(m \in \mathbb{N})$ là một nghiệm của phương trình

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \text{ với } a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

Tìm các nghiệm còn lại của phương trình.

NGUYỄN TRỌNG MẬU
(GV THPT Yên Thành II, Nghệ An)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/586. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{11 - 6x - 2y} + 2\sqrt{4 - 2x - y}.$$

HOÀNG NGỌC MINH
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T7/586. Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1 và $f(x) = (\sin x)(\ln x)^{\frac{1}{n}}$. Chứng minh rằng $f''(x) < 0$ với mọi $x \in (1; \pi)$.

TRẦN NAM HẢI
(GV Đại học Bách khoa TP. Hồ Chí Minh)

Bài T8/586. Cho tam giác đều ABC cạnh a có tâm O. Q là một điểm thuộc đường tròn (I) có đường kính BC (Q khác phía với A so với BC). Đường thẳng đi qua Q và vuông góc với OQ cắt đường thẳng AB, AC lần lượt tại X, Y. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = BX + CY$ theo a.

NGUYỄN ANH VŨ
(GV THPT chuyên Chu Văn An, Bình Định)

Bài T9/586. Ta ký hiệu $[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá a. Cho x, y, z là các số thực nhỏ hơn -1 thỏa mãn $[x] + [y] + [z] = -36$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \left[\sqrt{x[x]}\right]\left[\sqrt{y[y]}\right]\left[\sqrt{z[z]}\right].$$

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT Tiên Du số 1, Bắc Ninh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/586. Xét hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn ba tính chất sau:

i) $f(1) = 1$.

ii) $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

iii) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Tính giá trị của $f(\sqrt{x_0})$ khi

a) $x_0 = 20 + 11.2025$.

b) $x_0 = p \in \mathbb{P}$ ($\mathbb{P}$ là tập các số nguyên tố).

NGUYỄN ĐỨC TƯỞNG *(Pleiku)*

Bài T11/586. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 1}$, $n = 1, 2, \ldots$

a) Chứng minh dãy đã cho có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Được quét bằng CamScanner

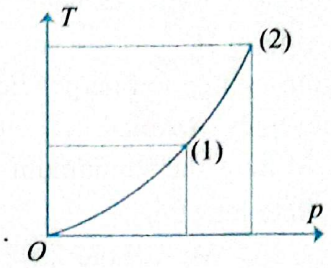
b) Chứng minh rằng $n-1<\dfrac{u_1+u_2+...+u_n}{1+\sqrt{5}}<n$ với mọi $n=1,2,...$

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T12/586. Cho $ABCD$ là tứ giác lồi có các cạnh AB và CD không song song với nhau. Gọi (P) là đường tròn đi qua A, B đồng thời tiếp xúc với AC, và gọi (Q) là đường tròn đi qua C, D đồng thời tiếp xúc với BD. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn khi và chỉ khi trục đẳng phương của (P) và (Q) đi qua trung điểm của AD.

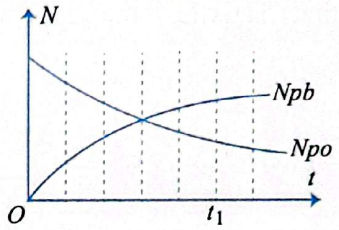
LÊ VIẾT ÂN
(Ocean Education, 40 đs 9, P.9, KDC City Land, Gò Vấp, TP. Hồ Chí Minh)

Bài L1/586. Một lượng khí lí tưởng lưỡng nguyên tử thực hiện một quá trình biến đổi trạng thái trên hệ toạ độ (T, p), quá trình này được biểu diễn bằng đoạn 1 – 2 của một parabol mà đỉnh của nó trùng với gốc toạ độ như hình dưới. Biết nội năng của n mol khí lưỡng nguyên tử được tính theo công thức $U=\dfrac{5}{2}nRT$. Gọi ΔU là độ biến thiên nội năng của khí và A là độ lớn công do khí thực hiện. Tỉ số $\dfrac{\Delta U}{A}$ bằng bao nhiêu?



VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/586. Đồng vị poloni $^{210}_{84}Pb$ phóng xạ α và biến thành hạt nhân chì $^{206}_{82}Pb$ bền. hình dưới là đồ thị biểu diễn sự thay đổi số hạt nhân poloni (N_{Po}) và số hạt nhân chì (N_{Pb}) theo thời gian t. Tỉ số khối lượng của hạt nhân chì so với hạt nhân poloni vào thời điểm $t_2 = 2t_1$ bằng bao nhiêu? *(Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)*



THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/586 (Grade 6). Find all pairs of integers $(x; y)$ satisfying

$$3^y=x^3+3x^2+2x+1.$$

Problem T2/586 (Grade 7). Given a triangle ABC with $\widehat{BAC}=15^0, \widehat{ABC}=60^0$. Prove that

$$AB+BC\geq\sqrt{2}AC.$$

Problem T3/586. Find the last three digits of the number 2026^{2027}.

Problem T4/586. Given an acute triangle ABC with $AB < AC$. Inside the angle $\widehat{BAC}$ draw the rays Bm and Cn such that $\widehat{mBC}=\widehat{nCB}=\widehat{BAC}$. On the ray Bm take the point E, on the ray Cn take the point D such that $BE=CD=BC$. The line DE cuts the rays AB and AC at M and N respectively, the line CM cuts the ray Bm at P, the line BN cuts the ray Cn at Q. The line through P and parallel to AB intersects the side BC at I. Prove that the triangle IPQ is isosceles.

Problem T5/586. Suppose that the irrational number $\sqrt{m}$ $(m\in\mathbb{N})$ is a solution of the equation

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \text{ where } a,b,c\in\mathbb{Q}.$$

Find the other solutions of the equation.

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/586. Given real numbers x and y satisfying $x^2+y^2=3$. Find the minimum value of the expression $P=\sqrt{11-6x-2y}+2\sqrt{4-2x-y}$.

Problem T7/586. For an integer n which is greater than 1, let $f(x)=(\sin x)(\ln x)^{\frac{1}{n}}$. Prove that

$$f''(x)<0 \text{ for every } x\in(1;\pi).$$

Được quét bằng CamScanner

Problem T8/586. Given an equilateral triangle ABC with side a and the centroid O. Let Q be a point on the circle (I) with diameter BC (Q is on the opposite side of A with respect to BC). The line passing through Q and perpendicular to OQ intersects the lines AB and AC at X and Y respectively. Find the minimum value of $T=BX+CY$ in terms of a.

Problem T9/586. We denote $[a]$ the largest integer not exceeding a. Let x, y, z be real numbers less than -1 satisfying $[x]+[y]+[z]=-36$. Find the maximum and minimum values of the expression

$$P=\left[\sqrt{x[x]}\right]\left[\sqrt{y[y]}\right]\left[\sqrt{z[z]}\right].$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/586. Consider the function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ that satisfies the following three properties

i) $f(1)=1$;

ii) $f(x+y)=f(x)+f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$;

iii) $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}f(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

Calculate the value of $f\left(\sqrt{x_0}\right)$ when

a) $x_0=20+11.2025$.

b) $x_0=p$ for any prime number p.

Problem T11/586. Given the sequence (u_n) defined by $u_1=1$ and $u_{n+1}=\frac{3u_n+4}{u_n+1}, n=1,2,...$

a) Prove that the given sequence has a finite limit and find that limit.

b) Prove that $n-1<\frac{u_1+u_2+...+u_n}{1+\sqrt{5}}<n$ for all $n=1,2,...$

Problem T12/586. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral with the sides AB and CD not parallel to each other. Let (P) be the circle passing through A and B and tangent to AC, and let (Q) be the circle passing through C and D and tangent to BD. Prove that the quadrilateral $ABCD$ is cyclic if and only if the radical axes of (P) and (Q) pass through the midpoint of AD.

****

ỨNG DỤNG QUAN HỆ ... (Tiếp theo trang 8)

Bài 5. Cho ΔABC đều và điểm M nằm trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng của M qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng ΔABC và ΔDEF có cùng trọng tâm.

Bài 6. Cho ΔABC đều, các đường cao AH, BK cắt nhau tại điểm G. Tia phân giác của $\widehat{BKH}$ cắt các đoạn thẳng CG, AH, BC lần lượt tại M, N, P. Chứng minh rằng $KM = NP$.

Bài 7. Cho ΔABC nhọn có đường cao AD (D nằm giữa B và C) thoả mãn $AD = CD = 3BD$. Gọi O và H theo thứ tự là giao điểm của ba đường trung trực và trực tâm của ΔABC. Tính tỉ số $\frac{BC}{OH}$.

Bài 8. Cho ΔABC với đường trung tuyến BD, đường phân giác BE. Đường thẳng đi qua C vuông góc với BE tại F và cắt đường thẳng BD ở G. Chứng minh rằng DF đi qua trung điểm của đoạn thẳng GE.

Bài 9. Cho ΔABC không cân, có G là trọng tâm và I là giao điểm ba đường phân giác trong tam giác. Chứng minh rằng nếu $AB^2 - AC^2 = 2\left(IB^2 - IC^2\right)$ thì $GI \parallel BC$.

Bài 10. Cho ΔABC nhọn, các đường cao BK và CL cắt nhau tại H; gọi M là trung điểm BC. Một đường thẳng đi qua H lần lượt cắt AB, AC tại P, Q. Gọi I là trực tâm của ΔBHP. Chứng minh rằng $HP = HQ$ khi và chỉ khi $MP = MQ$.

Bài 11. Cho ΔABC đều cạnh a có AD, BE, CF là các đường cao. Điểm M bất kì nằm trong ΔABC. Gọi I, K, L lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh AD, BE, CF. Tính tổng $AI + BK + CL$ theo a.

Được quét bằng CamScanner



ài T1/582. *Tìm tất các các số tự nhiên* $\overline{ab}$ *(có ai chữ số) sao cho thỏa mãn:*

$$\overline{ab} + 5ab = (a+3b)^2.$$

ời giải. Giả sử các chữ số a, b thỏa mãn $\overline{b} + 5ab = (a+3b)^2$ (*). Chữ số $a > 0$ vì nếu $= 0$ thì số $\overline{ab}$ chỉ có một chữ số, trái giả thiết. ếu $b = 0$ thì đẳng thức trên trở thành $10a = a^2$ với > 0, suy ra $a = 10$ (loại). Vậy $b > 0$. Ta biến đổi *) như sau:

$$10a + b + 5ab = a^2 + 6ab + 9b^2,$$

ay là $$9a - 9b^2 = a^2 + ab - a - b,$$

ay là $$9(a-b^2) = a(a+b) - (a+b),$$

ay là $$9(a-b^2) = (a+b)(a-1)\ (**).$$

- Nếu $a = 1$ thì (**) trở thành $9(a-b^2) = 0$ nên $= b^2 = 1$, suy ra $b = 1$.

- Nếu $a > 1$ thì vế phải của (**) lớn hơn 0, do đó $- b^2 > 0$ nên $b^2 < a \le 9$, suy ra b chỉ có thể là 1 ıoặc 2.

- Với $b = 1$ thì từ (**) có $9(a-1) = (a+1)(a-1)$, lo $a > 1$ nên $9 = a + 1$, suy ra $a = 8$.

- Với $b = 2$ thì từ (**) có $9(a-4) = (a+2)(a-1)$, lo $a > 1$ nên $a > 4$, mà 3 là ước số của $a + 2$ hoặc $a - 1$, từ đó $a = 7$, nhưng số này không thỏa mãn $9(a-4) = (a+2)(a-1)$.

Thử lại với cặp số $(a; b)$ bằng (1; 1) và (8; 1) ta thấy đều thỏa mãn. Vậy bài toán có hai nghiệm là $\overline{ab}$ bằng 11 và 81.

Nhận xét. Việc biến đổi đẳng thức ở giả thiết về dạng (**) giúp giảm bớt phép thử các giá trị của các chữ số thập phân a, b. Các bạn sau có lời giải đúng. **Hà Nội:** *Phạm Quốc Vinh*, 6C2B Lý, THCS Archimedes Academy, Yên Hòa; **Nghệ An:** *Nguyễn Tất Thạch*, 6E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Đà Nẵng:** *Lê Văn Minh*, 6/12, THCS Lương Thế Vinh, Hòa Khánh; **Quảng Ngãi:** *Bùi Quỳnh Nhã Trúc*, 6A, THCS Nghĩa Mỹ, Vệ Giang.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/582. *Số Palindrome là số nguyên dương đọc xuôi hay đọc ngược đều giống nhau. Ví dụ: 323 là số Palindrome có 3 chữ số; 2552 là số Palindrome có 4 chữ số; 47974 là số Palindrome có 5 chữ số. Hỏi số Palindrome có 5 chữ số nhỏ nhất là bội số của 99 là bao nhiêu?*

Lời giải. Theo định nghĩa số Palindrome, ta viết số cần tìm dưới dạng: $X = \overline{abcba}$.

Và theo định nghĩa về cấu tạo số, ta có:

$$X = 10000a + 1000b + 100c + 10b + a$$
$$= 99(101a + 10b + c) + 20b + 2a + c.$$

Theo giả thiết của bài toán $X \vdots 99$, do $99(101a+10b+c) \vdots 99$ nên $20b+2a+c$ phải là một bội số của 99 sao cho $a \in \{1;2;3;...;9\}$ và càng bé càng tốt.

Ta có: $20b+2a+c \le 20.9+2.9+9 = 207$ và $20b+2a+c > 0$ nên để $20b+2a+c$ là một bội số của 99 thì $20b+2a+c = 99$ hoặc $20b+2a+c = 198$.

+ Khi $20b+2a+c = 99$, suy ra $b = 4$. Khi đó $2a+c = 19$, tìm được $a \ne 0$ nhỏ nhất là $a = 5$, suy ra $c = 9$. Vậy tìm được số Palindrome là $X = \overline{abcba} = 54945$.

+ Khi $20b+2a+c = 198$, suy ra $b = 9$. Khi đó $2a+c = 18$. Vì $a \ne 0$ nhỏ nhất có thể nên có $a = 5$, suy ra $c = 8$. Vậy tìm được số Palindrome là $X = \overline{abcba} = 59895$.

So sánh hai số Palindrome trên ta được số cần tìm là 54945.

Nhận xét. Mấu chốt của bài toán này là chuyển đổi các đặc điểm ngôn ngữ (số Palindrome, bội số) thành mối quan hệ giữa các chữ số (cấu tạo số) sau đó dùng phương pháp thử chọn có hệ thống để tìm kết quả tối ưu. Hầu hết các bạn gửi bài đều cho lời giải tốt, trong đó có một bạn lớp 8 gửi bài nhưng sẽ không được nêu tên. Tuyên dương các bạn có tên sau:

Quảng Ngãi: *Bùi Quỳnh Nhã Trúc*, 6A, THCS Nghĩa Mỹ, Vệ Giang; **Nghệ An:** *Đặng Văn Hoàng*, 7A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc; **Hà Nội:** *Dương Đức Anh*, 7M, THCS Ngô Sĩ Liên, Cửa Nam.

TRẦN THỊ KIM THANH

Được quét bằng CamScanner

Bài T3/582. *Cho đa thức $f(x)$ bậc ba có hệ số cao nhất là một số nguyên dương thỏa mãn $f(2024)=3$ và $f(2025)=5$. Chứng minh $f(2026)-f(2023)$ là hợp số.*

Lời giải. (Của *Hồ Đại Việt* và nhiều bạn) Đặt $g(x)=f(x)+ax+b$ với $g(2024)=g(2025)=0$.

Khi ấy: $\begin{cases}g(2024)=f(2024)+2024a+b=0\\ g(2025)=f(2025)+2025a+b=0\end{cases}$.

Vì $f(2024)=3; f(2025)=5$ nên $\begin{cases}3+2024a+b=0\\ 5+2025a+b=0\end{cases}$.

Suy ra $a=-2$ và $b=4045$.

Vậy $g(x)=f(x)-2x+4045$.

Vì $f(x)$ là đa thức bậc ba nên $g(x)$ cũng là đa thức bậc ba. Vì $g(2004)=g(2005)=0$ nên $g(x)=k(x-2024)(x-2025)(x-x_0)$, trong đó $k\in\mathbb{Z}^+$ là hệ số cao nhất của $f(x)$ và x_0 là nghiệm còn lại của $g(x)$. Ta có:

$$f(x)=g(x)+2x-4045$$
$$=k(x-2024)(x-2025)(x-x_0)+2x-4045.$$

Vậy $\begin{cases}f(2026)=k\cdot 2\cdot 1\cdot(2026-x_0)+2\cdot 2026-4045\\ f(2023)=k\cdot(-1)(-2)(2023-x_0)+2\cdot 2023-4045\end{cases}$.

Do đó:

$$f(2026)-f(2023)=2k(2026-2023)+6=6(k+1).$$

Do $k\in\mathbb{Z}^+$ nên $(k+1)\in\mathbb{Z}^+$ và $f(2026)-f(2023)=6(k+1)$ là hợp số.

Nhận xét. 1) Bài này tương đối dễ nên đa số bạn THCS tham gia giải và giải đúng. Một số bạn còn lí luận và tính toán hơi dài dòng.

Cộng hòa Áo: *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp II, III GIBS, TP. Graz; **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, 9A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc; **Nghệ An:** *Ngô Trần Ngọc Bảo*, 8D, *Phạm Nguyễn Nguyệt Linh*, *Trần Ngọc Quân*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Hoàng Đức Nhâm*, *Hoàng Đức Thiện*, 9C, THCS Hòa Hiếu II, phường Thái Hòa, *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, xã Hùng Châu; **Phú Thọ:** *Nguyễn Bảo Châu*, 8A6, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Thanh Mai*, *Vũ Tuấn Minh*, 9A THCS Lý Nam Đế, xã Vạn Xuân; **Quảng Ngãi:** *Trần Văn Phụng*, 6C, THCS Nguyễn Kim Vang, xã Đình Cương; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Bá Đức Anh*, 8A, THCS Lương Chí, Tĩnh Gia, *Mai Thiện Ân*, 9B, THCS Chu Văn An, Tĩnh Gia, *Hoàng Ngọc Tùng*, 9B, THCS Chu Văn An, Nga Sơn; **TP. Hồ Chí Minh:** *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, *Dương Tiến Phát*, 11E1, THPT Lê Thánh Tông.

2) Bạn *Trần Ngọc Quân* làm bài T5/582 và T9/582; Bạn Lê Vũ Quỳnh Như làm bài T6/582 trong cùng một tờ giấy với bài T3/582 gây khó khăn cho Ban biên tập chấm.

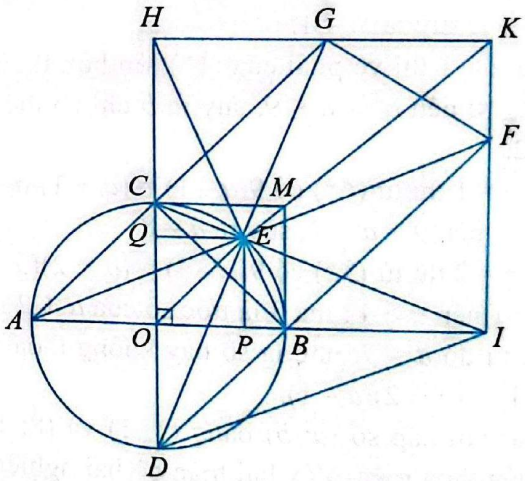
TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T4/582. *Cho đường tròn $(O; R)$ có hai đường kính $AB\perp CD$. Gọi E là điểm di động trên cung nhỏ BC. AE cắt DB tại F, DE cắt AC tại G, BE cắt OC tại H, CE cắt OB tại I, HG cắt IF tại K. Chứng minh:*

a) *Tích $FI.GH$ luôn không đổi.*

b) *EK luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải.



Lời giải. Ta có $ABCD$ là hình vuông, và $BC=R\sqrt{2}$. Theo tính chất góc nội tiếp, ta có $\widehat{AEC}=\widehat{ABD}=45°$. Do đó $\Delta AEI\backsim\Delta ABF$ (g.g), suy ra: $\frac{AE}{AB}=\frac{AI}{AF}$, dẫn tới: $\frac{AE}{AI}=\frac{AB}{AF}$.

Từ đó suy ra $\Delta AEB\backsim\Delta AIF$ (c.g.c), nên

$$\widehat{AIF}=\widehat{AEB}=90°.$$

Hoàn toàn tương tự: $\widehat{DHG}=90°$.

Do đó các tam giác HCG, IBF vuông cân, suy ra:

$$IF=IB \text{ và } GH=CH.$$

Được quét bằng CamScanner

Tứ giác $OEID$ nội tiếp đường tròn đường kính ID nên $\widehat{EIO}=\widehat{EDO}$, kết hợp với $\widehat{CBI}=\widehat{DOE}=135°$ ta có: $\Delta CBI \backsim \Delta EOD$, dẫn tới: $BI=BC=R\sqrt{2}$.

Tương tự: $CH=CB=R\sqrt{2}$.

Vậy $IF.GH=BI.CH=2R^2$ (không đổi).

b) Hạ $EP \perp AB$ tại P, $EQ \perp CD$ tại Q. Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt EK tại M.

Ta có: $MB // EP // IK$, do đó: $\dfrac{PB}{PI}=\dfrac{EM}{EK}$.

Lại có: $\dfrac{PB}{PI}=\dfrac{\cot\widehat{EBP}}{\cot\widehat{EIP}}=\dfrac{\cot\widehat{HEQ}}{\cot\widehat{CEQ}}=\dfrac{CQ}{QH}$.

Từ đó: $\dfrac{EM}{EK}=\dfrac{QC}{QH}$.

Suy ra $MC // QE$, nên $MC \perp CD$. Vậy điểm M là giao hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O), nên M cố định. Do đó EK luôn đi qua điểm M cố định.

Nhận xét. Lời giải trên dựa theo bạn *Mai Phú Khang*, 9A12 THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, **TP. Hồ Chí Minh**. Ngoài ra, còn có bạn *Trịnh Tuấn Kiệt*, 9D1, THCS Móng Cái 2, **Quảng Ninh** cũng cho lời giải tốt.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/582. *Cho x, y, z là ba số thực thỏa mãn:*

$$|x| \le 3, |y| \le 3, |z| \le 3.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\left|\frac{x}{x^2+16}+\frac{y}{y^2+16}+\frac{z}{z^2+16}\right|.$$

Lời giải. Ta có: $\left|\dfrac{x}{x^2+16}+\dfrac{y}{y^2+16}+\dfrac{z}{z^2+16}\right|$

$$\le \left|\frac{x}{x^2+16}\right|+\left|\frac{y}{y^2+16}\right|+\left|\frac{z}{z^2+16}\right|$$

hay $$P \le \frac{|x|}{x^2+16}+\frac{|y|}{y^2+16}+\frac{|z|}{z^2+16} \quad (*)$$

Dấu bằng xảy ra khi x, y, z cùng dấu.

Ta có : $|x| \le 3 \Rightarrow |x|-3 \le 0$ và $3|x|-16<0$

$\Rightarrow (|x|-3)(3|x|-16) \ge 0 \Rightarrow 3(x^2+16) \ge 25|x|$

hay $\dfrac{|x|}{x^2+16} \le \dfrac{3}{25}$ (1). Dấu bằng xảy ra khi $|x|=3$.

Tương tự ta có: $\dfrac{|y|}{y^2+16} \le \dfrac{3}{25}$ (2). Dấu bằng xảy ra khi $|y|=3$.

$\dfrac{|z|}{z^2+16} \le \dfrac{3}{25}$ (3). Dấu bằng xảy ra khi $|z|=3$.

Từ (*), (1), (2), (3), ta có: $P \le \dfrac{9}{25}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=3$ hoặc $x=y=z=-3$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{9}{25}$, đạt được khi $x=y=z=3$ hoặc $x=y=z=-3$.

Nhận xét. Không có nhiều bạn đọc gửi bài giải đến tòa soạn, tất cả các bạn tham gia gửi bài đều làm đúng và làm theo cách giải trên. Mấu chốt của bài toán là chứng minh $\dfrac{|x|}{x^2+16} \le \dfrac{3}{25}$ với $|x| \le 3$. Để dự đoán hoặc tìm ra số $\dfrac{3}{25}$ các em có thể sử dụng nhiều phương pháp khác nhau, trong đó có thể dùng máy tính cầm tay với chức năng table, sau đó chứng minh bằng cách xét hiệu hoặc diễn đạt như trên. Tuyên dương các bạn có tên sau:

Cộng hòa Áo: *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp II, III GIBS, TP. Graz; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc; **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, Hùng Châu; *Ngô Trần Ngọc Bảo*, 8D, *Phạm Nguyễn Nguyệt Linh*, *Nguyễn Thái Dũng*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Nghi Lộc; **Thanh Hóa:** *Mai Thiên Ân, Hoàng Ngọc Tùng*, 9B, THCS Chu Văn An, Nga Sơn; *Nguyễn Bá Đức Anh*, 8A, THCS Lương Chí, Tĩnh Gia.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG

Bài T6/582. *Chứng minh rằng trong biểu diễn thập phân của số $(9+4\sqrt{5})^{2025}$ thì đằng sau dấu phẩy có ít nhất 2025 chữ số 9.*

Lời giải. Đặt $a=9+4\sqrt{5}; b=9-4\sqrt{5}$. Ta có:

$0<b<1$ và $ab=(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})=81-80=1$.

Theo công thức khai triển nhị thức Newton, ta có:

Được quét bằng CamScanner

$$a^{2025}=(9+4\sqrt{5})^{2025}=\sum_{k=0}^{2025}C_{2025}^{k}.9^{2025-k}.(4\sqrt{5})^{k}$$

$$b^{2025}=(9-4\sqrt{5})^{2025}=\sum_{k=0}^{2025}C_{2025}^{k}.9^{2025-k}.(-4\sqrt{5})^{k}$$

Xét $S=a^{2025}+b^{2025}$

$$=\sum_{k=0}^{2025}C_{2025}^{k}.9^{2025-k}.\left((4\sqrt{5})^{k}+(-4\sqrt{5})^{k}\right).$$

Nhận thấy $(4\sqrt{5})^{k}+(-4\sqrt{5})^{k}=\begin{cases}0 & \text{khi } k=2n+1\\ 2.80^{n} & \text{khi } k=2n\end{cases}$

với n là số tự nhiên. Do đó S là số nguyên dương.

Từ $S=a^{2025}+b^{2025}$ suy ra $a^{2025}=S-b^{2025}$.

Mà $0<b=9-4\sqrt{5}=\dfrac{1}{9+4\sqrt{5}}<\dfrac{1}{10}$ nên

$$0<b^{2025}<\frac{1}{10^{2025}}.$$

Do đó trong biểu diễn thập phân của b^{2025} có ít nhất 2025 chữ số 0 đằng sau dấu phẩy.

Lại có $S-\dfrac{1}{10^{2025}}<S-b^{2025}=(9+4\sqrt{5})^{2025}<S$ (với S là số nguyên dương). Vậy trong biểu diễn thập phân của $(9+4\sqrt{5})^{2025}$ có ít nhất 2025 chữ số 9 sau dấu phẩy.

Nhận xét. Mấu chốt của bài toán là chứng minh $S=(9+4\sqrt{5})^{2025}+(9-4\sqrt{5})^{2025}$ là số nguyên dương. Ngoài cách chứng minh như trên, ta có thể lập luận bằng cách sử dụng phương pháp quy nạp như sau:

Đặt $S_n=a^n+b^n$, ta có $S_0=2;S_1=18$ là hai số nguyên dương. Giả sử S_n,S_{n+1} là hai số nguyên dương (với $n\in\mathbb{N}$), ta có: $S_{n+2}=a^{n+2}+b^{n+2}$

$$=(a+b)(a^{n+1}+b^{n+1})-ab(a^n+b^n)=18S_{n+1}-S_n,$$

suy ra S_{n+2} là số nguyên dương. Vậy theo nguyên lí quy nạp toán học $S_n=a^n+b^n$ là số nguyên dương.

Có thể tổng quát bài toán: *Với mọi số n nguyên dương thì trong biểu diễn thập phân của* $(9+4\sqrt{5})^n$ *có ít nhất n chữ số 9 ở ngay sau dấu phẩy.*

Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Hưng Yên: *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, *Phạm Văn Phong*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, 9A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt; **Hà Tĩnh:** *Đặng Sỹ Phước Đức*, 10 Toán 1, *Bùi Tùng Lâm*, *Nguyễn Viết Thế Tài*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Bá Đức Anh*, 8A, TH & THCS Lương Chí, Tĩnh Gia; **An Giang:** *Huỳnh Đức Chí*, 10T1, THPT chuyên Thủ Khoa Nghĩa; **Quảng Trị:** *Hoàng Hà Uyên Nhi*, 10 Toán 1, *Thái Minh Đăng*, 11 Toán 1, *Lê Phước Quý*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc, *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 10T, THPT chuyên Thăng Long; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp II, III GIBS, TP. Graz.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T7/582. *Giải phương trình*

$$2026^{\sqrt{x}}=2024+\log_{2025}\left(2024+\sqrt{x}\log_{2025}2026\right)\ (1).$$

Lời giải. ĐK: $x\ge 0$. Ta thấy $x=0$ không là nghiệm PT nên ta xét bài toán với điều kiện $x>0$.

Đặt $u=2026^{\sqrt{x}}\ge 1$, PT(1) trở thành:

$$u=2024+\log_{2025}(2024+\log_{2025}u)\ (2).$$

Đặt $v=2024+\log_{2025}u\ge 2024$ thì ta có hệ phương trình: $\begin{cases}u=2024+\log_{2025}v\\ v=2024+\log_{2025}u\end{cases}$.

Suy ra: $u-v=\log_{2025}v-\log_{2025}u$

$\Leftrightarrow u+\log_{2025}u=v+\log_{2025}v\Leftrightarrow u=v$ (do hàm $f(t)=t+\log_{2025}t$ đồng biến trên tập xác định).

Do đó (2) tương đương với:

$$u=2024+\log_{2025}u\Leftrightarrow u-\log_{2025}u-2024=0\ (3).$$

Xét hàm số $g(t)=t-\log_{2025}t-2024$ có:

$$g'(t)=1-\frac{1}{t\ln 2025}=\frac{t\ln 2025-1}{t\ln 2025}>0,\forall t\ge 1.$$

Do đó hàm số $g(t)$ đồng biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$. Vậy PT(3) có nghiệm duy nhất $u\ge 1$. Hơn nữa ta thấy $g(2025)=0$ nên PT(3) có nghiệm duy nhất $u=2025$. Do đó:

$$(1)\Leftrightarrow 2026^{\sqrt{x}}=2025\Leftrightarrow\sqrt{x}=\log_{2026}2025$$

$$\Leftrightarrow x=(\log_{2026}2025)^2.$$

Nhận xét. Bài toán không khó nên có nhiều bạn tham gia giải bài này. Có một bạn làm sai, một số bạn lập luận còn dài. Các bạn sau có lời giải đúng:: **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, *Đỗ Quang Anh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 11A3, THPT Hoàng Mai; **Hà Tĩnh:** *Ngô Bùi Anh Khoa*, *Lê Minh Mạnh*, *Nguyễn Viết Thế Tài*, 11 Toán 1, *Phan Viết Lê Huy*, 11 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Lê*

Được quét bằng CamScanner

Phước Quý, 11 Toán 2, *Thái Minh Đăng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Minh Nhật*, 11A1, *Trần Nhất Nguyên*, 11E2, *Nguyễn Đức Quang Minh*, 11E1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 10T, THPT chuyên Thăng Long, *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc; **Vĩnh Long:** *Lê Hoàng Khang*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **An Giang:** *Thái Đức Huy*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt.

TRẦN HỮU NAM

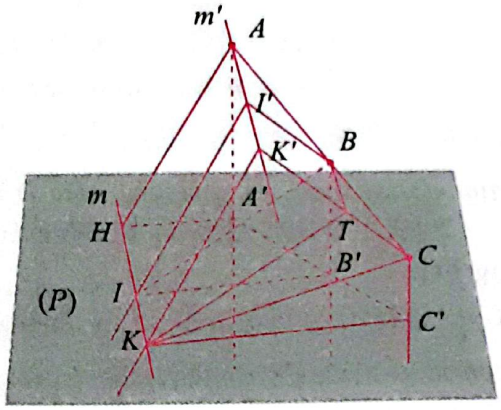
Bài T8/582. *Cho điểm B nằm trong đoạn thẳng AC. Chứng minh rằng*

$$d(B,m)\le \max\{d(A,m),d(C,m)\}$$

với m là đường thẳng bất kỳ trong không gian.

Lời giải.

Cách 1. *(Theo tác giả bài toán)*



Gọi (P) là mặt phẳng bất kì chứa đường thẳng m. Các điểm A',B',C' theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A,B,C trên (P) và H,I,K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A',B',C' trên m.

Rõ ràng $d(A;m)=AH, d(B;m)=BI, d(C;m)=CK$.

Qua A dựng đường thẳng m' song song với m và gọi các điểm I',K' thuộc m' sao cho II',KK' đều song song với HA.

Ta có $\dfrac{BA}{BC}=\dfrac{B'A'}{B'C'}=\dfrac{IH}{IK}=\dfrac{I'A}{I'K'}$ nên $BI'\parallel CK'$.

Do B nằm trên đoạn thẳng AC nên có thể dựng T trên đoạn thẳng $K'C$ sao cho $BT\parallel AK'$. Khi đó $I'BTK'$ là hình bình hành. Mà $I'K'KI$ cũng là hình bình hành nên $\overline{BT}=\overline{I'K'}=\overline{IK}$. Vậy $BI=KT$.

Xét tam giác $KK'C$ có T nằm trên đoạn thẳng $K'C$ nên $KT\le\max\{KK',KC\}$.

Mà $KT=d(B;m), KK'=AH=d(A;m), KC=d(C;m)$ nên ta có điều phải chứng minh.

Cách 2. *(Theo một số bạn)*. Ta sử dụng công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng trong không gian như sau: *Với P là một điểm bất kì nằm trên đường thẳng m và $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của m. Khi đó* $d(A;m)=\dfrac{\left[\left[\overrightarrow{PA},\vec{u}\right]\right]}{|\vec{u}|}$.

Do B nằm giữa A và C nên tồn tại số thực $k\in[0;1]$ sao cho $\overrightarrow{PB}=k\overrightarrow{PC}+(1-k)\overrightarrow{PA}$.

Ta có: $d(B;m)=\dfrac{\left[\left[\overrightarrow{PB},\vec{u}\right]\right]}{|\vec{u}|}=\dfrac{\left[\left[k\overrightarrow{PC}+(1-k)\overrightarrow{PA},\vec{u}\right]\right]}{|\vec{u}|}$

$$=\frac{\left[\left[k\overrightarrow{PC},\vec{u}\right]\right]+\left[\left[(1-k)\overrightarrow{PA},\vec{u}\right]\right]}{|\vec{u}|}.$$

Suy ra: $d(B;m)\le\dfrac{k\left[\left[\overrightarrow{PC},\vec{u}\right]\right]}{|\vec{u}|}+\dfrac{(1-k)\left[\left[\overrightarrow{PA},\vec{u}\right]\right]}{|\vec{u}|}$

$$=kd(C;m)+(1-k)d(A;m)$$
$$\le k.\max\{d(C;m),d(A;m)\}$$
$$+(1-k).\max\{d(C;m),d(A;m)\}$$
$$=\max\{d(C;m)+d(A;m)\}.$$

Nhận xét. Đây là một bài toán không khó nhưng có ít bạn tham gia giải. Ngoại trừ một số lời giải sai, hầu hết các lời giải còn lại đều theo cách thứ hai. Xin nêu tên một số bạn: **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Viết Thế Tài*, *Nguyễn Anh Dũng*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh.

NGUYỄN VĂN LINH

Bài T9/582. *Cho biểu thức* $P=\dfrac{36a}{b+c}+\dfrac{7b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$ *trong đó a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện: $a+b>0$, $b+c>0$, $c+a>0$. Tìm giá trị của a khi biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất và $a+b+c=1$.*

Lời giải. Cách 1. Đặt $b+c=x, c+a=y, a+b=z$.

Khi đó: $a=\dfrac{y+z-x}{2}, b=\dfrac{z+x-y}{2}, c=\dfrac{x+y-z}{2}$ và biểu thức P trở thành:

Được quét bằng CamScanner

$$P=\frac{18(y+z-x)}{x}+\frac{7(z+x-y)}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}$$
$$=\left(\frac{18y}{x}+\frac{7x}{2y}\right)+\left(\frac{7z}{2y}+\frac{y}{2z}\right)+\left(\frac{x}{2z}+\frac{18z}{x}\right)-18-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{18.7}{2}}+2\sqrt{\frac{7}{2.2}}+2\sqrt{\frac{18}{2}}-22=7\sqrt{7}-16.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2=36y^2 \\ y^2=7z^2 \\ x^2=36z^2 \end{cases}$

hay $\frac{x}{6}=\frac{y}{\sqrt{7}}=\frac{z}{1}=\frac{x+y+z}{7+\sqrt{7}}=\frac{2}{7+\sqrt{7}}$.

Nghĩa là $x=\frac{12}{7+\sqrt{7}}, y=\frac{2\sqrt{7}}{7+\sqrt{7}}, z=\frac{2}{7+\sqrt{7}}$.

Do đó: $a=\frac{\sqrt{7}-5}{7+\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}-1$, $b=\frac{7-\sqrt{7}}{7+\sqrt{7}}=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$,

$c=\frac{5+\sqrt{7}}{7+\sqrt{7}}=\frac{14+\sqrt{7}}{21}$.

Cách 2. Áp dụng BĐT Schwarz ta được:

$$P+44=\frac{36a}{b+c}+36+\frac{7b}{c+a}+7+\frac{c}{a+b}+1$$
$$=\frac{36(a+b+c)}{b+c}+\frac{7(a+b+c)}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}$$
$$=(a+b+c)\left(\frac{36}{b+c}+\frac{7}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)$$
$$\geq (a+b+c).\frac{\left(6+\sqrt{7}+1\right)^2}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}$$
$$=\frac{\left(7+\sqrt{7}\right)^2}{2}=28+7\sqrt{7}.$$

Từ đây suy ra $P\geq 7\sqrt{7}-16$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{6}{b+c}=\frac{\sqrt{7}}{c+a}=\frac{1}{a+b}=\frac{7+\sqrt{7}}{2(a+b+c)}=\frac{7+\sqrt{7}}{2}.$$

Từ đây cũng tìm được bộ (a,b,c) như ở cách 1.

Nhận xét. Bài toán này dễ và quen thuộc nên có nhiều bạn tham gia giải và tất cả đều đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp II, III GIBS, TP. Graz; **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, 9A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt; **TP. Hồ Chí Minh:** *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, *Vũ Khắc Duy*, 11E3, *Nguyễn Phạm Minh Phú*, 11E2, THPT Lê Thánh Tông; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Bá Đức Anh*, 8A, THCS Lương Chí, Tĩnh Gia; **An Giang:** *Trần Minh Tiến*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, *Huỳnh Đức Chí*, 10T1, THPT chuyên Thủ Khoa Nghĩa; **Hưng Yên:** *Phạm Văn Phong*, 11 Toán 1, *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Anh Dũng*, *Nguyễn Tùng Duy*, *Ngô Bùi Anh Khoa*, *Bùi Tùng Lâm*, *Nguyễn Viết Thế Tài*, 11 Toán 1, *Đặng Sỹ Phước Đức*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Nguyễn Trần Bảo Ngọc*, 10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thanh Mai*, 9A, THCS Lý Nam Đế, Vạn Xuân; **Tây Ninh:** *Phạm Gia Huy*, 11T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 10T, THPT chuyên Thăng Long, *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc.

NGUYỄN VIỆT HÙNG

Bài T10/582. *Cho dãy các đa thức* $(P_n(x))_{n=0}^{+\infty}$ *thỏa mãn:* $P_0(x)=0$, $P_1(x)=x+2$ *và* $P_n(x)=2P_{n-1}(x)(P_{n-1}(x)+1)(2P_{n-2}(x)+1)+P_{n-2}(x)$, $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương* k, m, *nếu* $k\mid m$ *thì* $P_k(x)\mid P_m(x)$.

Lời giải. (Dựa theo lời giải của bạn *Trần Đức Phát* 12 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Trị**)

Đặt $U_n(x)=2P_n(x)+1$ với mỗi số tự nhiên n và để cho gọn ta kí hiệu U_n, P_n thay cho $U_n(x), P_n(x)$.

Từ cách xác định của P_n ta có:

$U_0=1, U_1=2(x+2)+1=2x+5$ và

$$U_n=2P_n+1=4P_{n-1}(P_{n-1}+1)(2P_{n-2}+1)+2P_{n-2}+1$$
$$=[4P_{n-1}(P_{n-1}+1)+1](2P_{n-2}+1)$$
$$=(2P_{n-1}+1)^2(2P_{n-2}+1)=U_{n-1}^2U_{n-2}.$$

Ta chứng minh bằng quy nạp rằng $U_n=(2x+5)^{a_n}$ (1) với mọi số tự nhiên n trong đó dãy số nguyên (a_n) xác định bởi:

$$a_0=0, a_1=1, a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}, \forall n\geq 2.$$

Thật vậy, ta thấy khẳng định (1) đúng với $n=0$ và $n=1$. Giả sử (1) đúng đến $n-1$. Khi đó:

$$U_n=U_{n-1}^2U_{n-2}=(2x+5)^{2a_{n-1}}(2x+5)^{a_{n-2}}$$
$$=(2x+5)^{2a_{n-1}+a_{n-2}}=(2x+5)^{a_n}.$$

Như vậy (1) cũng đúng với n nên theo nguyên lý quy nạp (1) đúng với mọi số tự nhiên n.

Được quét bằng CamScanner

Suy ra $P_n(x)=\dfrac{(2x+5)^{a_n}-1}{2}$ với mọi số tự nhiên n.

Đặt $m=qk$ với q là số nguyên dương. Ta chỉ cần chứng minh $a_k|a_{qk}$ (3), khi đó:

$$(2x+5)^{a_k}-1|(2x+5)^{a_{qk}}-1=(2x+5)^{a_m}-1$$

nên $P_k(x)|P_m(x)$.

Nhận xét rằng: $a_{m+n}=a_m a_{n+1}+a_{m-1}a_n$ (2) với mọi số tự nhiên m,n và $m\geq 1$. Thật vậy, ta chứng minh (2) bằng quy nạp theo n.

Khẳng định (2) đúng với $n=0$ và $n=1$ vì

$$a_{m+0}=a_m\cdot 1+a_{m-1}\cdot 0=a_m a_1+a_{m-1}a_0$$

$$a_{m+1}=2a_m+a_{m-1}=a_m a_2+a_{m-1}a_1.$$

Giả sử (2) đúng đến n. Khi đó:

$$\begin{aligned}a_{m+(n+1)}&=2a_{m+n}+a_{m+n-1}\\&=2(a_m a_{n+1}+a_{m-1}a_n)+(a_m a_n+a_{m-1}a_{n-1})\\&=a_m(2a_{n+1}+a_n)+a_{m-1}(2a_n+a_{n-1})\\&=a_m a_{n+2}+a_{m-1}a_{n+1}.\end{aligned}$$

Như vậy (2) được chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh (3) bằng quy nạp theo q. Thật vậy (3) hiển nhiên đúng với $q=1$. Giả sử (3) đúng với q, tức là $a_k|a_{qk}$. Mà theo (2) ta có $a_{(q+1)k}=a_{qk+k}=a_{qk}a_{k+1}+a_{qk-1}a_k$ nên $a_k|a_{(q+1)k}$.

Như vậy (3) cũng đúng với $q+1$ và do đó (3) đúng với mọi q nguyên dương. Chứng minh hoàn tất.

Nhận xét. Tất cả các bạn gửi lời giải về tòa soạn đều tìm được công thức tổng quát của $P_n(x)$. Tuy nhiên vài bạn gặp khó khăn trong bước chứng minh $a_k|a_{qk}$ hoặc công nhận nó như một điều hiển nhiên, và hầu hết các bạn đều sử dụng công thức tổng quát của dãy số (a_n) để chứng minh điều đó. Ngoài bạn *Phát* có lời giải tốt, các bạn sau đây có lời giải đúng:

Hà Tĩnh: *Ngô Bùi Anh Khoa, Bùi Tùng Lâm, Lê Minh Mạnh, Nguyễn Viết Thế Tài*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **An Giang:** *Nguyễn Hoài Nhanh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 10T, THPT chuyên Thăng Long; **Gia Lai:** *Lương Xuân Nghĩa*, 11A7, THPT Chi Lăng.

HOÀNG NGỌC MINH

Bài T11/582. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ tăng ngặt thỏa mãn:*

$$nf(f(n))=(f(n))^2,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Lời giải (Của đa số các bạn). Từ điều kiện bài toán suy ra: $\dfrac{f(f(n))}{f(n)}=\dfrac{f(n)}{n},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Xét $g(n):=\dfrac{f(n)}{n}$ ta thu được:

$g(n)=g(f(n))=g(f^2(n))=g(f^m(n)),\forall m,n\in\mathbb{N}^*$ (1).

Ta chứng minh $g(n)\in\mathbb{N}^*,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Giả sử với $n\in\mathbb{N}^*$ ta có $g(n)=\dfrac{p}{q}$ với $p,q\in\mathbb{N}^*,q>1,(p,q)=1$ thì theo (1) suy ra:

$$f^m(n)=\left(\frac{p}{q}\right)^m n,\forall m\in\mathbb{N}^*.$$

Vì $f^m(n)\in\mathbb{N}^*$ nên n chia hết cho q^m với mọi $m\in\mathbb{N}^*$, điều này là không thể xảy ra. Vậy nên $q=1$ và $g(n)\in\mathbb{N}^*,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Nếu $g(n)=1$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ thì $f(n)=n$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, thỏa mãn điều kiện bài ra.

Giả sử xảy ra $g(n)=a$ với $a>1$ ứng với n nguyên dương nào đó. Gọi N là số nguyên dương nhỏ nhất để $g(N)=aN$. Khi đó, do tính tăng ngặt của $f(n)$ thì $f(n)=n$ ứng với mọi $1\leq n<N$.

Mặt khác, từ đẳng thức $g(n)=g(f(n))$ suy ra $g(n)=a$ với mọi $n\geq N$. Thật vậy, nếu tồn tại $n_1,n_2\in\mathbb{N}^*,n_1\neq n_2$ và $g(n_1)=b_1$ và $g(n_2)=b_2$ với $b_1<b_2$ thì ta chọn số nguyên k sao cho $a^k n_1>n_2$ thì $f(a^k n_1)>f(n_2)$ nên $b_1^{k+1}n_1>b_2 n_2$. Suy ra $b_1^{k+m}n_1>b_2^m n_2$ với mọi $m\in\mathbb{N}^*$, mâu thuẫn.

Vậy nên $f(n)=an$ với mọi $n>N$.

Kết luận: $f(n)=\begin{cases}n & \text{khi } n<N\\ an & \text{khi } n\geq N\end{cases}$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Gia Lai: *Nguyễn Hoài Nhanh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; *Lương Xuân Nghĩa*, 11A7, THPT Chi Lăng; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Tùng Duy, Nguyễn Viết Thế Tài, Ngô Bùi Anh Khoa*, 11T1, *Phan Viết Lê Huy*, 11T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A, THCS Quang Trung, Bảo Lộc; **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, Hùng Châu.

NGUYỄN VĂN MẬU

Được quét bằng CamScanner

Bài T12/582. *Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Các đường thẳng AI, BI, CI cắt lại (O) tương ứng tại D, E, F. Gọi D', E', F' lần lượt đối xứng với D, E, F tương ứng qua BC, CA, AB.*

a) *Chứng minh các tam giác ABC và D'E'F' có chung tâm đường tròn Euler.*

b) *Giả sử các đường thẳng ID', IE', IF' lần lượt cắt BC, CA, AB tương ứng tại X, Y, Z. Chứng minh X, Y, Z cùng nằm trên đường thẳng vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác D'E'F'.*

Lời giải. Trong lời giải này đường tròn đi qua ba điểm U, V, W được kí hiệu là (UVW); tiếp tuyến với đường tròn (O) tại U được kí hiệu là UU.

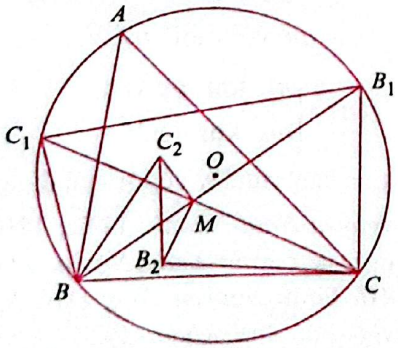
a) Ta cần năm bổ đề, trong đó ta chỉ chứng minh bổ đề 2, các bổ đề còn lại là quen thuộc, không trình bày cách chứng minh ở đây.

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, I là tâm đường tròn nội tiếp. D, E, F theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AI, BI, CI và (O). Khi đó I là trực tâm của tam giác DEF.*

Bổ đề 2. *Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp. Điểm M không thuộc (O). B_1, C_1 theo thứ tự là giao điểm thứ hai của BM, CM và (O). B_2, C_2 theo thứ tự là điểm đối xứng của B_1, C_1 qua AC, AB. Khi đó các tam giác MB_1C_1, MB_2C_2 đồng dạng ngược hướng.*

Lời giải. (h.1) Dễ thấy các tam giác MB_1C_1, MCB đồng dạng ngược hướng (1).

Từ (1), chú ý rằng B_2, C_2 theo thứ tự là điểm đối xứng của B_1, C_1 qua AC, AB, suy ra:



- $\dfrac{CM}{BM}=\dfrac{CB_1}{BC_1}=\dfrac{CB_2}{BC_2}$.
- $(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CB_2})-(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC_2})\equiv(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CB_1})+(\overrightarrow{CB_1},\overrightarrow{CB_2})$
$-(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC_1})-(\overrightarrow{BC_1},\overrightarrow{BC_2})(\mathrm{mod}2\pi)$
$\equiv(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CB_1})+2(CB_1,CA)$
$-(\overrightarrow{CB_1},\overrightarrow{CM})-2(BC_1,BA)(\mathrm{mod}2\pi)$
$\equiv2(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CB_1})+2(CB_1,CA)-2(CC_1,CA)(\mathrm{mod}2\pi)$
$\equiv2(CM,CB_1)+2(CB_1,CC_1)$
$\equiv2(CM,CC_1)\equiv0(\mathrm{mod}2\pi)$.

Do đó các tam giác MCB_2, MBC_2 đồng dạng cùng hướng. Điều đó có nghĩa là các tam giác MCB, MB_2C_2 đồng dạng cùng hướng (2).

Từ (1) và (2) suy ra các tam giác MB_1C_1, MB_2C_2 đồng dạng ngược hướng.

Bổ đề 3. *Cho tam giác ABC, H là trực tâm, (O) là đường tròn ngoại tiếp. D là trung điểm của $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của (O). D' là điểm đối xứng của D qua BC. Khi đó $AD\perp HD'$.*

Bổ đề 4. *Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, I là tâm đường tròn nội tiếp. D là giao điểm thứ hai của AI và (O). D' là điểm đối xứng của D qua BC. Khi đó các tam giác DIO, DD'I đồng dạng ngược hướng.*

Bổ đề 5. *Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, I là tâm đường trong nội tiếp. D, E, F theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AI, BI, CI và (O). D', E', F' theo thứ tự là điểm đối xứng của D, E, F qua BC, CA, AB. K là giao điểm thứ hai của D'I và đường tròn (D'E'F'). Khi đó $AK\perp BC$.*

Trở lại giải phần a).

Gọi J là tâm đường tròn (DEF) (hình vẽ dưới).

Theo bổ đề 1, I là trực tâm của tam giác DEF (1).

Theo bổ đề 2, các tam giác IEF, IFD, IDE theo thứ tự đồng dạng ngược hướng với các tam giác $IE'F'$, $IF'D'$, $ID'E'$. Do đó tam giác $D'E'F'$ là ảnh của tam giác DEF qua phép vị tự đối xứng có tâm là I (2).

Từ (1) và (2) suy ra I là trực tâm của tam giác $D'E'F'$ (3). Từ các bổ đề 1, 3 suy ra HD', HE', HF' theo thứ tự song song với EF, FD, DE (4).

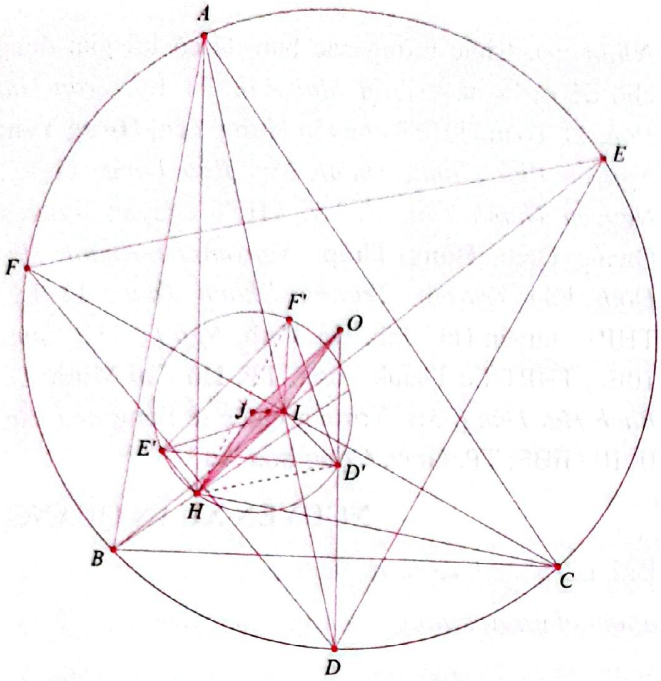
Từ (2) và (4) suy ra:

$$(HE',HF')\equiv(DF,DE)\equiv-(D'F',D'E')$$
$$\equiv(D'E',D'F')(\mathrm{mod}\pi).$$

Do đó H thuộc đường tròn $(D'E'F')$ (5).

Từ (5), theo các bổ đề 3, 4, chú ý rằng $DD'\perp BC, DD'//BC$, kết hợp với (2) và (3), suy ra:

Được quét bằng CamScanner



$(HJ,OI)\equiv(HJ,HD')+(HD',AI)+(DI,OI)(\mathrm{mod}\,\pi)$

$\equiv\frac{1}{2}(\overrightarrow{HJ},\overrightarrow{JD'})+\frac{\pi}{2}-(DD',ID')$

$\equiv\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{JH},\overrightarrow{JD'})+\frac{\pi}{2}-(DD',ID')(\mathrm{mod}\,\pi)$

$\equiv(F'H,F'D')-(BC,E'F')$

$\equiv(DE,F'D')+(E'F',BC)(\mathrm{mod}\,\pi)$

$\equiv(DE,BC)+(E'F',F'D')$

$\equiv(DE,BC)-(EF,FD)(\mathrm{mod}\,\pi)$

$\equiv(DE,BC)+(FD,EF)\equiv(DE,BC)+(DD,ED)$

$\equiv(DD,BC)\equiv 0(\mathrm{mod}\,\pi)$.

Nói cách khác $HJ//OI$. Từ (2), (5), theo bổ đề 4, suy ra: $\frac{JH}{OD}=\frac{ID'}{ID}=\frac{OI}{OD}$. Do đó $JH=OI$.

Vậy $OIHJ$ là hình bình hành. Điều đó có nghĩa là OH và IJ có cùng chung điểm. Từ đó, chú ý rằng OH, IJ theo thứ tự là đường thẳng Euler của các tam giác ABC, $D'E'F'$, suy ra đpcm.

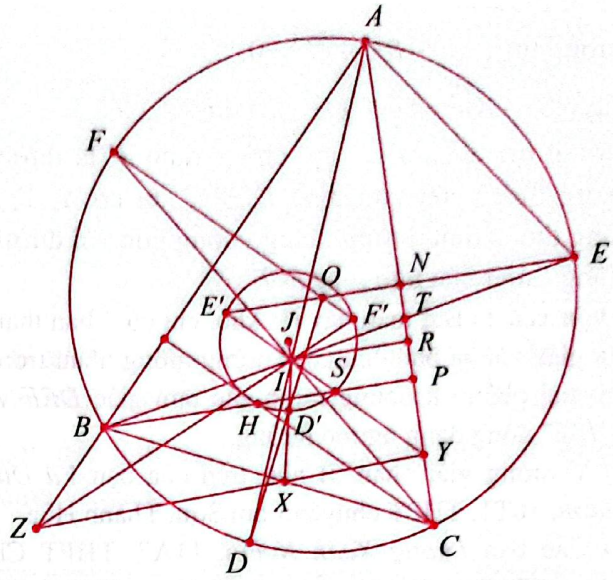
b) Gọi S là giao điểm thứ hai của YE' và đường tròn $(D'E'F')$; P, N, T theo thứ tự là giao điểm của BS, EE', EI và BC; R là hình chiếu của I trên AC; R_J là bán kính của đường tròn $(D'E'F')$.

Theo bổ đề 5, BP đi qua H. Do đó $BP//EE'//IR$.

Từ đó, theo định lí Thalès, suy ra:

$$\frac{\overline{YS}}{\overline{YI}}=\frac{\overline{PS}}{\overline{RI}},\frac{\overline{IE'}}{\overline{IS}}=\frac{\overline{IE}}{\overline{IB}},\frac{\overline{BS}}{\overline{EE'}}=\frac{\overline{BI}}{\overline{EI}},\frac{\overline{BP}}{\overline{IR}}=\frac{\overline{BT}}{\overline{IT}},\frac{\overline{EN}}{\overline{IR}}=\frac{\overline{ET}}{\overline{IT}}\quad(6).$$

Dễ thấy các tam giác EAT, EBA đồng dạng và $EI=EA$. Do đó: $\frac{IE}{EB}=\frac{AE}{BE}=\frac{AT}{AB}$ (7).



Vì AI là phân giác trong của tam giác ABT nên

$$\frac{\overline{TI}}{\overline{BI}}=-\frac{AT}{AB}\quad(8).$$

Từ (6), (7) và (8) suy ra:

$$\left(YJ^2-R_J^2\right)-YI^2=\overline{YS}.\overline{YE'}-YI^2=\overline{YS}.(\overline{YI}+\overline{IE'})-YI^2$$

$$=(\overline{YS}-\overline{YI})\overline{YI}+\overline{YS}.\overline{IE'}=\overline{IS}.\overline{YI}+\overline{YS}.\overline{IE'}$$

$$=\overline{IS}.\overline{YI}\left(1+\frac{\overline{YS}}{\overline{YI}}.\frac{\overline{IE'}}{\overline{IS}}\right)=\overline{IS}.\overline{YI}\left(1+\frac{\overline{PS}}{\overline{RI}}.\frac{\overline{IE}}{\overline{IB}}\right)$$

$$=\overline{IS}.\overline{YI}\left(1+\frac{\overline{BS}-\overline{BP}}{\overline{RI}}.\frac{\overline{IE}}{\overline{IB}}\right)=\overline{IS}.\overline{YI}\left(1+\frac{\frac{\overline{BI}.\overline{EE'}}{\overline{EI}}-\overline{BP}}{\overline{RI}}.\frac{\overline{IE}}{\overline{IB}}\right)$$

$$=\overline{IS}.\overline{YI}\left(1-\frac{2\overline{BI}.\overline{EN}-\overline{BP}.\overline{EI}}{\overline{RI}.\overline{IB}}\right)=\frac{\overline{IS}.\overline{YI}}{\overline{RI}.\overline{IB}}\left(1-\frac{2\overline{EN}}{\overline{IR}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{IR}}.\frac{\overline{EI}}{\overline{BI}}\right)$$

$$=\frac{\overline{IS}.\overline{YI}}{\overline{RI}.\overline{IB}}\left(1-\frac{2\overline{ET}}{\overline{IT}}+\frac{\overline{BT}}{\overline{IT}}.\frac{\overline{EI}}{\overline{BI}}\right)=\frac{\overline{IS}.\overline{YI}}{\overline{RI}.\overline{IB}}.\frac{\overline{BT}}{\overline{IT}}\left(\frac{\overline{IT}}{\overline{BT}}-\frac{2\overline{ET}}{\overline{BT}}+\frac{\overline{EI}}{\overline{BI}}\right)$$

$$=\frac{\overline{IS}.\overline{YI}}{\overline{RI}.\overline{IB}}.\frac{\overline{BT}}{\overline{IT}}\left(\frac{\overline{IT}-2\overline{ET}}{\overline{BT}}+\frac{\overline{EI}}{\overline{BI}}\right)=\frac{\overline{IS}.\overline{YI}}{\overline{RI}.\overline{IB}}.\frac{\overline{BT}}{\overline{IT}}\left(\frac{\overline{IE}-\overline{ET}}{\overline{BT}}-\frac{\overline{EI}}{\overline{BI}}\right)$$

$$=\frac{\overline{IS}.\overline{YI}}{\overline{RI}.\overline{IB}}.\frac{\overline{BT}}{\overline{IT}}\left(\frac{\overline{IE}-\overline{ET}+\overline{BT}}{\overline{BT}}+\frac{\overline{EI}-\overline{BI}}{\overline{BI}}\right)=\frac{\overline{IS}.\overline{YI}}{\overline{RI}.\overline{IB}}.\frac{\overline{BT}}{\overline{IT}}\left(\frac{\overline{IE}-\overline{EB}}{\overline{BT}}+\frac{\overline{EB}}{\overline{BI}}\right)$$

$$=\frac{\overline{IS}.\overline{YI}}{\overline{RI}.\overline{IB}}.\frac{\overline{BT}}{\overline{IT}}.\frac{\overline{IE}.\overline{BI}-\overline{EB}.\overline{BI}+\overline{EB}.\overline{BT}}{\overline{BT}.\overline{BI}}$$

$$=\frac{\overline{IS}.\overline{YI}}{\overline{RI}.\overline{IB}}.\frac{\overline{BT}}{\overline{IT}}.\frac{\overline{IE}.\overline{BI}-\overline{EB}\left(\overline{BI}+\overline{TB}\right)}{\overline{BT}.\overline{BI}}=\frac{\overline{IS}.\overline{YI}}{\overline{RI}.\overline{IB}}.\frac{\overline{BT}}{\overline{IT}}.\frac{\overline{IE}.\overline{BI}-\overline{EB}.\overline{TI}}{\overline{BT}.\overline{BI}}$$

$$=\frac{\overline{IS}.\overline{YI}}{\overline{RI}.\overline{IB}}.\frac{\overline{BT}}{\overline{IT}}.\frac{\overline{BI}.\overline{EB}}{\overline{BT}.\overline{BI}}\left(\frac{\overline{IE}}{\overline{EB}}-\frac{\overline{TI}}{\overline{BI}}\right)=\frac{\overline{IS}.\overline{YI}}{\overline{RI}.\overline{IB}}.\frac{\overline{BT}}{\overline{IT}}.\frac{\overline{BI}.\overline{EB}}{\overline{BT}.\overline{BI}}\left(\frac{\overline{IE}}{\overline{EB}}+\frac{\overline{AT}}{\overline{AB}}\right)$$

$$=\frac{\overline{IS}.\overline{YI}}{\overline{RI}.\overline{IB}}.\frac{\overline{BT}}{\overline{IT}}.\frac{\overline{BI}.\overline{EB}}{\overline{BT}.\overline{BI}}\left(-\frac{\overline{AT}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{AT}}{\overline{AB}}\right)=0.$$

Được quét bằng CamScanner

Tương tự: $\left(ZJ^2-R_J^2\right)-ZI^2=0$.

Vậy $YJ^2-ZJ^2=YI^2-ZI^2$. Do đó $YZ\perp JI$.

Tương tự: $ZX\perp JI$. Vậy, chú ý rằng JI là đường thẳng Euler của tam giác $D'E'F'$, ta có X, Y, Z cùng thuộc một đường thẳng vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác $D'E'F'$.

Nhận xét. 1) Bài toán này rất khó, chỉ có 3 ban tham gia giải. Cả ba bạn đều có ý tưởng giống nhau trong lời giải phần a): chứng minh các tam giác DEF và $D'E'F'$ đồng dạng ngược hướng.

2) Ý tưởng giải phần b) như trên của bạn *Vũ Duy Mạnh*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa.

3) Các bạn *Lương Xuân Nghĩa*, 11A7, THPT Chi Lăng, **Gia Lai** và *Nguyễn Sơn Khánh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, **An Giang** có lời giải phần b) đúng nhưng phải sử dụng định lí về điểm Feurbach của tam giác.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/582. *Một đứa trẻ bị sốt ở nhiệt độ 101 °F được cho dùng thuốc hạ sốt. Giả sử cơ chế bay hơi của mồ hôi là cách duy nhất để làm giảm nhiệt độ cơ thể. Khối lượng của đứa trẻ là 30 kg. Nhiệt dung riêng của cơ thể con người bằng nhiệt dung riêng của nước là 1000 cal/kg.K và nhiệt hoá hơi của nước khoảng 580 cal/g. Nếu cơn sốt hạ xuống 98 °F trong 20 phút thì tốc độ bay hơi trung bình do thuốc gây ra ước tính khoảng bao nhiêu g/phút? Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.*

Lời giải. Nhiệt độ ban đầu: $T_1=(101-32).\dfrac{5}{9}$

$\approx 38{,}33\ ^\circ\text{C}$.

Nhiệt độ cuối cùng: $T_2=(98-32).\dfrac{5}{9}\approx 36{,}67^0\text{C}$.

Độ giảm nhiệt độ: $\Delta T=T_1-T_2=1{,}66\ ^\circ\text{C}$.

Nhiệt lượng cơ thể toả ra: $Q=\text{mc}\Delta\text{T}$

$$=30\text{ kg}.1000\frac{\text{cal}}{\text{kg.K}}.1{,}66K=49800\text{ cal}.$$

Nhiệt lượng cần thiết để bay hơi nước: $Q_{\text{hh}}=mL$.

Theo đề bài toàn bộ nhiệt lượng hóa hơi từ cơ thể được dùng để bay hơi nước:

$$Q_{\text{hh}}=Q\Rightarrow m_{hh}=\frac{Q}{L}=\frac{49800\text{ cal}}{580\text{ cal/g}}\approx 85{,}86\text{ g}.$$

Tốc độ bay hơi trung bình bằng:

$$\frac{85{,}86\text{ g}}{20\text{ phút}}\approx 4{,}3\text{ g/phút}.$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Trần Mai Anh*, 11 Lý, *Trần Gia Phú*, 11 Toán, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**; *Nguyễn Phú Thịnh*, *Thành Ngô Bảo Long*, 11 Lý, *Nguyễn Thanh Tân*, 12 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**; *Nguyễn Lê Khánh Hà*, *Đinh Văn Trường*, *Trương Khánh Toàn*, 11 Lý, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**; *Ngô Lê Viết Nam*, 10E2, THPT Lê Thánh Tông, **TP. Hồ Chí Minh**; *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp II, III GIBS, TP. Graz, **Cộng hòa Áo**.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/582. *Vào thời điểm hiện tại, uranium tự nhiên chứa hai đồng vị phóng xạ $^{235}_{92}U$ và $^{238}_{92}U$, với tỉ lệ số hạt $^{235}_{92}U$ và số hạt $^{238}_{92}U$ là $\dfrac{7}{1000}$. Biết chu kì bán rã của hai đồng vị này lần lượt là 0,7 tỉ năm và 4,5 tỉ năm. Hỏi cách đây bao nhiêu tỉ năm, uranium tự nhiên có tỉ lệ số hạt $^{235}_{92}U$ và số hạt $^{238}_{92}U$ là $\dfrac{1}{100}$? Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.*

Lời giải. Gọi N_{01}, N_{02} lần lượt là số hạt $^{235}_{92}U$ và $^{238}_{92}U$ ban đầu. Gọi N_1, N_2 lần lượt là số hạt $^{235}_{92}U$ và $^{238}_{92}U$ hiện nay. Theo đề bài ta có:

$$\frac{N_{01}}{N_{02}}=\frac{1}{100}\ (1);\ \frac{N_1}{N_2}=\frac{N_{01}.2^{-\frac{t}{T_1}}}{N_{02}.2^{-\frac{t}{T_2}}}=\frac{7}{1000}$$

$$\Leftrightarrow\frac{N_{01}}{N_{02}}.2^{t\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)}=\frac{7}{1000}\ (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra: $2^{t\left(\frac{1}{4{,}5.10^9}-\frac{1}{0{,}7.10^9}\right)}=\dfrac{7}{10}$

$\Rightarrow t\approx 0{,}4.10^9$ năm = 0,4 tỉ năm.

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Trần Mai Anh*, 11 Lý, *Trần Gia Phú*, 11 Toán, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**; *Thành Ngô Bảo Long*, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**; *Trương Khánh Toàn*, *Nguyễn Phan Phú Lợi*, 11 Lý, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Được quét bằng CamScanner



ĐỒNG BẬC HÓA TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

VŨ NGUYỄN DUY
(GV THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, An Giang)
CAO MINH QUANG
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

1. GIỚI THIỆU. Đồng bậc hóa trong chứng minh bất đẳng thức là một kỹ thuật biến đổi một bất đẳng thức sao cho các vế của bất đẳng thức đều trở thành các biểu thức đồng bậc, tức là các biểu thức có cùng bậc trong các biến, thường bằng cách nhân thêm các biểu thức thích hợp hoặc thay đổi biến. Việc đồng bậc hóa trong bất đẳng thức sẽ giúp ta dễ so sánh hai vế của bất đẳng thức bằng cách so sánh trực tiếp các hệ số hoặc dùng các kỹ thuật như so sánh từng bậc, lấy hiệu hai vế, hoặc đưa về việc chứng minh các biểu thức không âm.

Mục đích của đồng bậc hóa là tạo nên bất đẳng thức trở nên "đẹp hơn", có tính đối xứng, dễ áp dụng các kỹ thuật như: Bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Schwarz, đặc biệt là bất đẳng thức Schur. Hơn nữa, nó còn cho phép chuẩn hóa bài toán để đưa về bất đẳng thức mới.

Bài viết được chia thành hai phần:

- Phần 1 trình bày các bất đẳng thức dạng phân thức.
- Phần 2 trình bày các bất đẳng thức dạng đa thức.

2. CÁC BÀI TOÁN

2.1. Dạng phân thức

Bài toán 1. *Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\le\frac{3}{2}.$$

Phân tích. Chú ý rằng $x^2+1=x^2+xy+yz+zx$

$$=x(x+y)+z(x+y)=(x+y)(x+z).$$

Khi đó, mỗi số hạng ở vế trái của bất đẳng thức là một biểu thức đồng bậc.

Lời giải. Ta thay số 1 trong biểu thức dưới dấu căn bằng $xy+yz+zx$ và nhóm các số hạng trong mỗi biểu thức đó, ta đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng

$$\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}}\le\frac{3}{2}.$$

Mỗi phân thức bên vế trái có dạng đối xứng, đồng bậc, có dạng tích. Điều này gợi ý cho chúng ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy, cụ thể:

$$\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z}+\frac{x}{x+y}\right).$$

Suy ra: $$\frac{x}{\sqrt{(x+y)(y+z)}}+\frac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}}$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{x+z}{x+z}+\frac{x+y}{x+y}+\frac{y+z}{y+z}\right)=\frac{3}{2}.$$

Bài toán 2. *Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{xy}{\sqrt{z+xy}}+\frac{yz}{\sqrt{x+yz}}+\frac{zx}{\sqrt{y+zx}}\le\frac{1}{2}.$$

Phân tích. Ta nhận thấy biểu thức trong căn bậc hai không đồng bậc 2. Từ giả thiết của bài toán, ta thử đưa về đồng bậc. Mục đích là xem xét đưa biểu thức trong căn về dạng tích được hay không? Ta có: $z+xy=z.(x+y+z)+xy=(z+x)(z+y)$.

Lời giải. Gọi L là vế trái của bất đẳng thức. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{xy}{\sqrt{z+xy}}=\frac{xy}{\sqrt{(z+x)(z+y)}}\le\frac{xy}{2}\left(\frac{1}{z+x}+\frac{1}{z+y}\right).$$

Tương tự, ta thu được hai bất đẳng thức:

$$\frac{yz}{\sqrt{x+yz}}\le\frac{yz}{2}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right),\ \frac{xz}{\sqrt{y+xz}}\le\frac{xz}{2}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\right).$$

Được quét bằng CamScanner

Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều vừa thu được và chú ý rằng

$$\frac{xy}{2}\left(\frac{1}{z+x}+\frac{1}{z+y}\right)+\frac{yz}{2}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)+\frac{xz}{2}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\right)=\frac{1}{2}.$$

Từ đó suy ra $L\le\frac{1}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$. Phép chứng minh hoàn tất.

Bài toán 3. *Cho a,b,c là các số thực dương, thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$.. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}+9\sqrt{abc}.$$

Phân tích. Viết lại các biểu thức trong căn bậc hai dưới dạng đồng bậc 3, cụ thể

$$a^2+abc=a^2(a+b+c)+abc=a(a+b)(a+c).$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Chauchy, ta có:

$$\sqrt{a^2+abc}=\sqrt{a(a+b)(a+c)}\le\frac{\sqrt{a}(a+b+a+c)}{2}=\frac{\sqrt{a}(a+1)}{2}.$$

Chứng minh tương tự, ta nhận được:

$$\sqrt{b^2+abc}\le\frac{\sqrt{b}(b+1)}{2}\text{ và }\sqrt{c^2+abc}\le\frac{\sqrt{c}(c+1)}{2}.$$

Do đó: $\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}$

$$\le\frac{\sqrt{a}(a+1)}{2}+\frac{\sqrt{b}(b+1)}{2}+\frac{\sqrt{c}(c+1)}{2}.$$

Mặt khác, tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{\sqrt{a}(a+1)}{2}+\sqrt{abc}=\sqrt{a}\left(\frac{a+1}{2}+\sqrt{bc}\right)$$

$$\le\sqrt{a}\left(\frac{a+1}{2}+\frac{b+c}{2}\right)=\sqrt{a}\left(\frac{a+b+c+1}{2}\right)=\sqrt{a}.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có được:

$$\frac{\sqrt{b}(b+1)}{2}+\sqrt{abc}\le\sqrt{b}\text{ và }\frac{\sqrt{c}(c+1)}{2}+\sqrt{abc}\le\sqrt{c}.$$

Suy ra: $\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}+9\sqrt{abc}$

$$\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+6\sqrt{abc}.$$

Mặt khác $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le\sqrt{3(a+b+c)}=\sqrt{3}$

và $6\sqrt{abc}\le6\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}=\frac{2}{\sqrt{3}}$,

dẫn đến:

$$\sqrt{a^2+abc}+\sqrt{b^2+abc}+\sqrt{c^2+abc}+9\sqrt{abc}\le\sqrt{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$. Do đó, giá trị lớn nhất của P là $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Bài toán 4. (JBMO TST 2024) *Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}-y}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}-z}\le\frac{1}{xyz}.$$

Lời giải. Chú ý rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=\sqrt{1+x^2}+x=\sqrt{xy+yz+zx+x^2}+x=\sqrt{(x+y)(x+z)}+x.$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$\sqrt{(x+y)(x+z)}+x\le\frac{x+y+x+z}{2}+x=2x+\frac{y+z}{2}.$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}-y}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}-z}\le3(x+y+z).$$

Từ bất đẳng thức quen thuộc dạng $(ab+bc+ca)^2\ge3abc(a+b+c)$ với mọi số thực a,b,c, ta có:

$$3xyz(x+y+z)\le(xy+yz+zx)^2=1$$

hay $3(x+y+z)\le\frac{1}{xyz}$.

Bất đẳng thức ban đầu đã được giải quyết.

Được quét bằng CamScanner

BÀI TẬP

Bài 1. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=2016$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{a}{a+\sqrt{2016a+bc}}+\frac{b}{b+\sqrt{2016b+ca}}+\frac{c}{c+\sqrt{2016c+ab}}.$$

Bài 2. Cho a,b,c là các số thực dương, thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ca}{\sqrt{b^2+3}}+\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\frac{3}{2}.$$

Bài 3. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+3}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+3}}\ge\frac{90}{11(x+y+z)+27}.$$

2.2. Dạng đa thức

Bất đẳng thức dạng đa thức ba biến xuất hiện nhiều các kì thi vì chúng thường có độ phức tạp vừa đủ để rèn luyện tư duy toán học, phân loại học sinh và dễ áp dụng nhiều kỹ thuật chứng minh quen thuộc, đặc biệt là sử dụng bất đẳng thức Schur.

Bài toán 5 (Crux Problem 4975). *Cho a,b,c là các là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng*

$$a^2+b^2+c^2+3abc(a+b+c)\ge2.$$

Phân tích. Bậc cao nhất của số hạng ở vế trái trong bất đẳng thức là 4. Do đó, chúng ta cần sử dụng giả thiết để đưa bất đẳng thức về dạng đồng bậc 4 ở tất cả các số hạng của hai vế.

Lời giải. Ta viết bất đẳng thức cần chứng minh về dạng: $(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)+3abc(a+b+c)\ge2(ab+bc+ca)^2$.

Biến đổi bất đẳng thức trên về dạng tương đương, ta nhận được:

$$ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)\ge2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2.$$

Bất đẳng thức cuối là hiển nhiên vì $xy(x^2+y^2)\ge xy.2xy=2x^2y^2$, với mọi số thực dương x,y. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài toán 6 (J693, Mathematica Reflection). *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3abc$. Chứng minh rằng*

$$a^2+b^2+c^2+3\ge2(ab+bc+ca).$$

Phân tích. Bậc cao nhất của các số hạng trong bất đẳng thức là 2. Điều này gợi ý chúng ta đưa về dạng đồng bậc là 2 (hoặc cao hơn sau khi biến đổi đại số.

Lời giải. Ta viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$$a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{a+b+c}\ge2(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+9abc\ge2(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

Sau khi khai triển và thu gọn, ta đưa bất đẳng thức về dạng:

$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a(a-b)(a-c)\ge0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng là bất đẳng thức Schur bậc 3. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài toán 7 (J694, Mathematica Reflection). *Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=12$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{(4x+y+z)(x+y)(y+z)(z+x)}\ge2\sqrt{3}(2x+y+z).$$

Phân tích. Đây là một bài toán khá thú vị khi hệ số của các biến không đồng đều, điều này khiến chúng ta có chút lúng túng trong định hướng tiếp cận bài toán.

Lời giải. Bình phương hai vế của bất đẳng thức, ta đưa bất đẳng thức về dạng

$$(4x+y+z)(x+y)(y+z)(z+x)\ge12(2x+y+z)^2.$$

Bất đẳng thức trên rõ ràng chưa đồng bậc, vế trái có bậc 4, trong khi vế phải chỉ bậc 2. Ta cần đưa về dạng đồng bậc để tiếp tục biến đổi đại số và thu gọn. Chú ý $xy+yz+zx=12$ nên ta tiếp tục chuyển bất đẳng thức trên về dạng đồng bậc 4

$$(4x+y+z)(x+y)(y+z)(z+x)\ge(xy+yz+zx)(2x+y+z)^2.$$

Được quét bằng CamScanner

Sau khi khai triển và rút gọn, ta đưa về dạng:

$$x^2z^2+x^2y^2-2x^2yz\ge 0\Leftrightarrow x^2(y-z)^2\ge 0.$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y=z$ và $xy+yz+zx=12$. Ta có thể tìm bộ $(x,y,z)=(a,t,t)$, trong đó a là một số thực dương và t là nghiệm dương của phương trình:

$$t^2+2at-12=0.$$

Bài toán 8 (Crux Problem 3324) *Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng*

$$3-5(ab+bc+ca)+6abc(a+b+c)\ge 0.$$

Lời giải. Sử dụng điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$, ta viết lại bất đẳng thức dưới dạng đồng bậc 4:

$$3(a^2+b^2+c^2)^2-5(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)+6abc(a+b+c)\ge 0.$$

Biến đổi, thu gọn ta đưa về dạng:

$$3\sum_{cyc}a^4+6\sum_{cyc}a^2b^2+abc\sum_{cyc}a\ge 5\sum_{cyc}ab(a^2+b^2).$$

Từ bất đẳng thức Schur bậc 4, có dạng:

$$\sum_{cyc}a^2(a-b)(a-c)\ge 0$$

hay $$\sum_{cyc}a^4+abc\sum_{cyc}a\ge\sum_{cyc}ab(a^2+b^2),$$

do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$2\sum_{cyc}a^4+6\sum_{cyc}a^2b^2\ge 4a\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)\Leftrightarrow\sum_{cyc}(a-b)^4\ge 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài toán sau là một kết quả rất chặt, đòi hỏi nhiều bước xử lý khó và cồng kềnh trong các khâu đánh giá trung gian. Nhưng sau tất cả, chúng ta nhận được một lời giải khá hay.

Bài toán 9 (S694, Mathematical Reflection). *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$a^3b+b^3c+c^3a+9abc\le 12.$$

Lời giải. Sử dụng điều kiện $a+b+c=3$, ta viết bất đẳng thức về dạng đồng bậc:

$$27(a^3b+b^3c+c^3a)+81abc(a+b+c)\le 4(a+b+c)^4.$$

Khai triển và rút gọn, ta cần chứng minh

$$4\sum_{cyc}a^4+16\sum_{cyc}a^3c+24\sum_{cyc}a^2b^2\ge 33abc\sum_{cyc}a+11\sum_{cyc}a^3b.$$

Để chứng minh kết quả trên, ta chú ý kết quả quan trọng và rất chặt sau: Với mọi số thực dương a,b,c, ta có:

$$\sum_{cyc}a^4+11\sum_{cyc}a^2b^2\ge 6abc\sum_{cyc}a+6\sum_{cyc}a^3b.$$

Bất đẳng thức trên được suy ra từ khai triển của

$$\frac{1}{2}\sum(a^2-b^2-2ab+4bc-2ca)^2\ge 0.$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta chứng minh được các đánh giá:

$$\sum_{cyc}a^4\ge\sum_{cyc}a^3b\ge\sum_{cyc}a^2bc,\quad\sum_{cyc}a^2b^2\ge\sum_{cyc}a^2bc.$$

Từ các kết quả trên, ta có:

$$4\sum_{cyc}a^4+16\sum_{cyc}a^3c+24\sum_{cyc}a^2b^2$$

$$=2\left(\sum_{cyc}a^4+11\sum_{cyc}a^2b^2\right)+2\sum_{cyc}a^4+16\sum_{cyc}a^3c+2\sum_{cyc}a^2b^2$$

$$\ge 2\left(6abc\sum_{cyc}a+6\sum_{cyc}a^3b\right)+2\sum_{cyc}a^4+16\sum_{cyc}a^3c+2\sum_{cyc}a^2b^2$$

$$=11\sum_{cyc}a^3b+\left(\sum_{cyc}a^3b+12abc\sum_{cyc}a+2\sum_{cyc}a^4+16\sum_{cyc}a^3c+2\sum_{cyc}a^2b^2\right)$$

$$\ge 11\sum_{cyc}a^3b+33abc\sum_{cyc}a.$$

Bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn.

BÀI TẬP

Bài 1 (Crux Problem 4975). Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+3abc(a+b+c)\ge 2.$$

Bài 2 (Crux Problem 3323). Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng $\sum(1-2a^2)(b-c)^2\ge 0$.

Bài 3 (Crux Problem 3371). Cho a,b,c là các là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng, với mọi số tự nhiên n, ta có:

$$a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}\ge(a^2+b^2+c^2)^n.$$

Được quét bằng CamScanner

BẠN CÓ BIẾT ?

LỜI GIẢI CHO BÀI TOÁN CHƯA CÓ LỜI GIẢI

HOÀNG ĐỨC TÂN
(Hà Nội)

Wladyslaw Hugo Dionizy Steinhaus (1887-1972) là nhà toán học Ba Lan nổi tiếng trong thế kỷ 20, ông có rất nhiều công trình toán học, nhưng đặc biệt với các bạn học sinh phổ thông ông đã để lại bộ sách toán dành cho lứa tuổi học sinh phổ thông gồm 3 cuốn: Kính vạn hoa toán học, Trăm bài toán, Thêm Trăm bài toán nữa với các lời giải hay, đẹp và gắn liền với cuộc sống thực tế. Các cuốn sách nổi tiếng này đã được dịch ra ở nhiều nước trên thế giới và được rất nhiều người yêu thích.

Trong cuốn *Trăm bài toán*, ở phần cuối ông nêu ra các bài toán mà theo ông ***vẫn chưa có lời giải***. Trong đó có bài toán sau đây.

Ba nửa đường thẳng trong không gian

Ba nửa đường thẳng trong không gian có cùng một gốc và tạo thành các góc phẳng a, b và c (các mặt của một góc tam diện). Bất đẳng thức nào từ (1) đến (5) dưới đây là đúng và bất đẳng thức nào là sai nói chung?

(1) $a+b>c$.

(2) $\sin a+\sin b>\sin c$.

(3) $\sin\frac{a}{2}+\sin\frac{b}{2}>\sin\frac{c}{2}.$,

(4) $\sin^2 a+\sin^2 b>\sin^2 c.$,

(5) $\sin^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{b}{2}>\sin^2\frac{c}{2}.$.

Trong bài báo này sẽ trình bày lời giải của bài toán này.

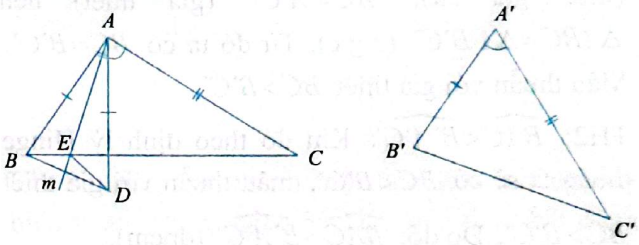
I. Ta chứng minh bất đẳng thức (1) là đúng cho mọi góc tam diện có các góc phẳng là *a*, *b*, *c*.

Để chứng minh (1), ta cần sử dụng định lý Hinge (hay còn được gọi là định lý bản lề) sau.

Định lý Hinge thuận. *Nếu hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau, nhưng góc xen giữa ở tam giác thứ nhất lớn hơn góc xen giữa ở tam giác thứ hai thì cạnh đối diện với góc đó ở tam giác thứ nhất sẽ lớn hơn cạnh đối diện ở tam giác thứ hai.*

Cụ thể: *Nếu* ΔABC *và* $\Delta A'B'C'$ *có* $AB=A'B'$, $AC=A'C'$ *và* $\widehat{BAC}>\widehat{B'A'C'}$ *thì* $BC>B'C'$.

Chứng minh.



Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AC có chứa điểm B ta dựng tia Ax sao cho $\widehat{CAx}=\widehat{B'A'C'}$. Trên tia Ax ta lấy điểm D sao cho $AD=A'B'$. Vì $AB=A'B'$ nên $AD=AB$. Vì $\widehat{BAC}>\widehat{B'A'C'}$ nên tia AD sẽ nằm giữa hai tia AB và AC.

Hai tam giác ADC và $A'B'C'$ có $AD=A'B'$ (cách dựng), $\widehat{DAC}=\widehat{BAC}$ (cách dựng) và $AC=A'C'$ (giả thiết) nên $\Delta ADC=\Delta A'B'C'$ (c.g.c). Từ đó suy ra: $DC=B'C'$ $(1a)$.

Vẽ tia phân giác Am của góc $\widehat{DAB}$ (Am nằm giữa AB và AD). Gọi E là giao điểm của Am với BC. Hai tam giác ABE và ADE có: $AB=AD$ (cách dựng), $\widehat{BAE}=\widehat{DAE}$ (do Am là phân giác của $\widehat{DAB}$) và AE là cạnh chung, cho nên $\Delta ABE=\Delta ADE$ (c.g.c). Suy ra: $BE=DE$ $(1b)$.

Trong ΔEDC, theo bất đẳng thức tam giác có:

$$DE+EC>DC \quad (1c).$$

Được quét bằng CamScanner

Từ (1a), (1b), (1c) ta có: $BE+EC>B'C'$. Nhưng $BE+EC=BC$. Do đó: $BC>B'C'$ (đpcm).

Định lý Hinge thuận đã được chứng minh.

Định lý Hinge đảo. *Nếu hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau, nhưng cạnh thứ ba của tam giác thứ nhất lớn hơn cạnh thứ ba của tam giác thứ hai, thì góc đối diện với cạnh đó ở tam giác thứ nhất sẽ lớn hơn góc đối diện ở tam giác thứ hai.*

Cụ thể: *Nếu* ΔABC *và* $\Delta A'B'C'$ *có* $AB=A'B'$, $AC=A'C'$ *và* $BC>B'C'$ *thì* $\widehat{BAC}>\widehat{B'A'C'}$.

Chứng minh. Giả sử ngược lại rằng $\widehat{BAC}\le\widehat{B'A'C'}$. Ta xét hai trường hợp:

TH1: $\widehat{BAC}=\widehat{B'A'C'}$. Khi đó hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có $AB=A'B'$ (giả thiết), $\widehat{BAC}=\widehat{B'A'C'}$ (theo giả sử), $AC=A'C'$ (giả thiết) nên $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$ (c.g.c). Từ đó ta có $BC=B'C'$. Mâu thuẫn với giả thiết $BC>B'C'$.

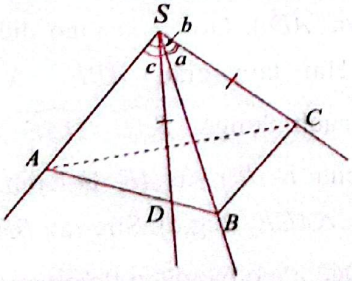
TH2: $\widehat{BAC}<\widehat{B'A'C'}$. Khi đó theo định lý Hinge thuận ta sẽ có $BC<B'C'$, mâu thuẫn với giả thiết $BC>B'C'$. Do đó: $\widehat{BAC}>\widehat{B'A'C'}$ (đpcm).

Định lý Hinge đảo đã được chứng minh.

• Bây giờ ta sẽ chứng minh (1) $a+b>c$.

Nếu c không phải là góc lớn nhất trong ba góc a,b,c thì đương nhiên là $a+b>c$. Vậy ta sẽ phải chứng minh (1) đúng trong trường hợp c là góc lớn nhất trong ba góc a,b,c.

Gọi $SABC$ là góc tam diện đỉnh S với $\widehat{ASB}=c$, $\widehat{BSC}=a$, $\widehat{CSA}=b$ (hình vẽ). Trong mặt phẳng (ASB) ta vẽ tia SD sao cho $\widehat{ASD}=\widehat{ASC}=b$. Vì $c>b$ nên tia SD sẽ nằm giữa hai tia SA và SB.



Lấy điểm B trên SB và điểm A trên SA tùy ý. Lấy điểm C trên SC sao cho $SC=SD$ (với D là giao điểm của AB và SD).

Hai tam giác ASC và ASD có SA chung, $SC=SD$ (cách dựng) và $\widehat{ASC}=\widehat{ASD}=b$ (cách dựng), cho nên $\Delta ASC=\Delta ASD$ (c.g.c). Từ đó suy ra $AC=AD$.

Trong tam giác ABC ta có $AC+CB>AB$ (BĐT tam giác). Nhưng $AB=AD+DC$ và $AC=AD$ nên $AD+CB>AD+DB$ suy ra $CB>DB$ $(1d)$.

Xét hai tam giác BSC và BSD có SB chung, $SC=SD$ (cách dựng) và cạnh đối diện $CB>DB$ (do (1d)) nên theo định lý Hinge nghịch ta có $\widehat{BSC}>\widehat{BSD}$ hay $a>\widehat{BSD}$ (1e).

Ta có: $c=\widehat{ASB}=\widehat{ASD}+\widehat{DSB}=b+\widehat{DSB}$.

Kết hợp với (1e) ta nhận được: $a+b>b+\widehat{DSB}=c$.

Vậy $a+b>c$ (đpcm).

II. Chứng minh bất đẳng thức (2) $\sin a+\sin b>\sin c$ là đúng với mọi góc phẳng của tam diện

Để chứng minh (2), ta cần tới hai bổ đề sau.

Bổ đề 1. *Mọi góc phẳng của một góc tam diện không suy biến luôn nhỏ hơn* π.

Chứng minh. Giả sử $Sxyz$ là góc tam diện đỉnh S không suy biến (tức là $Sxyz$ không đồng phẳng). Khi đó nếu ta cắt tam diện $Sxyz$ bằng một mặt phẳng (α) nào đó không đi qua đỉnh S thì mặt phẳng (α) sẽ cắt các tia Sx,Sy,Sz của tam diện tương ứng tại ba điểm phân biệt A,B,C. Khi đó mỗi góc phẳng a,b,c của tam diện $Sxyz$ sẽ là một trong các góc phẳng của một trong ba tam giác SBC,SCA,SAB. Nhưng tổng các góc phẳng của một tam giác (không suy biến) luôn bằng π. Do đó: $0<a,b,c<\pi$ (đpcm).

Bổ đề 2. *Nếu* a,b,c *là các góc phẳng của một tam diện không suy biến thì* $a+b+c<2\pi$.

Chứng minh. Giả sử $Sxyz$ là góc tam diện đỉnh S không suy biến. Giả sử ta cắt tam diện bởi một mặt phẳng nào đó tạo thành tam giác ABC. Giả sử $\widehat{ASB}=c,\widehat{BSC}=c,\widehat{CSA}=b$. Gọi O là hình chiếu của

Được quét bằng CamScanner

đỉnh S lên mặt phẳng (ABC). Trong các tam giác SAB, SBC, SCA ta có: $\widehat{SAB}+\widehat{SBA}=\pi-c$;

$\widehat{SBC}+\widehat{SCB}=\pi-a$; $\widehat{SCA}+\widehat{SAC}=\pi-b$.

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên thu được:

$$\left(\widehat{SAB}+\widehat{SBA}\right)+\left(\widehat{SBC}+\widehat{SCB}\right)+\left(\widehat{SCA}+\widehat{SAC}\right)=3\pi-(a+b+c) \quad (*).$$

Tại mỗi đỉnh A, B, C của tam giác đáy ta có một góc tam diện (chẳng hạn tại đỉnh A có các góc phẳng là $\widehat{BAC}, \widehat{SAB}, \widehat{SAC}$). Áp dụng bất đẳng thức $a+b>c$ (kết quả chứng minh bất đẳng thức (1)) cho tam diện đỉnh A, ta có: $\widehat{SAB}+\widehat{SAC}>\widehat{BAC}$.

Tương tự với các tam diện đỉnh B và C ta cũng có: $\widehat{SBA}+\widehat{SBC}>\widehat{ABC}$; $\widehat{SCB}+\widehat{SCA}>\widehat{BCA}$.

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức này với nhau và sử dụng (*) ta nhận được:

$$3\pi-(a+b+c)>\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{BCA}=\pi.$$

Do đó: $a+b+c<2\pi$ (đpcm).

• Bây giờ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức (2).

Ta có: $\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$

và $\sin c=2\sin\dfrac{c}{2}\cos\dfrac{c}{2}$.

Do bất đẳng thức (1): $a+b>c$ nên $\dfrac{a+b}{2}>\dfrac{c}{2}$.

Trong khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ hàm sin là hàm đồng biến,

cho nên: $\sin\dfrac{a+b}{2}>\sin\dfrac{c}{2}$ $(2a)$.

Từ bổ đề 2, $a+b+c<2\pi$ nên ta có: $\dfrac{a+b+c}{2}<\pi$.

Do bất đẳng thức (1) nên $|a-b|<c$ hay $\dfrac{|a-b|}{2}<\dfrac{c}{2}$.

Vì hàm cos nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên

$\cos\dfrac{a-b}{2}>\cos\dfrac{c}{2}$ $(2b)$.

Từ (2a) và (2b) suy ra:

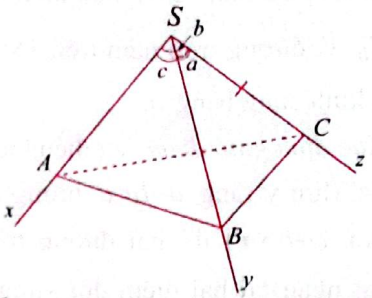
$$2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}>2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}.$$

Do đó: $\sin a+\sin b>\sin c$ (đpcm).

III. Chứng minh bất đẳng thức (3) $\sin\dfrac{a}{2}+\sin\dfrac{b}{2}>\sin\dfrac{c}{2}$ là đúng cho mọi góc phẳng của mọi góc tam diện

Gọi $Sxyz$ là tam diện đỉnh S với $\widehat{xSy}=c$, $\widehat{ySz}=a$, $\widehat{zSx}=b$. Lấy điểm A trên Sx, điểm B trên Sy và điểm C trên Sz sao cho $SA=SB=SC=1$. Ta tính được độ dài các cạnh của tam giác ABC là:

$$BC=2\sin\frac{a}{2};\ AC=2\sin\frac{b}{2};\ AB=2\sin\frac{c}{2}.$$



Vì ba điểm tạo thành một tam giác không suy biến trong không gian 3 chiều nên theo bất đẳng thức tam giác ta luôn có: $BC+CA>AB$

hay: $2\sin\dfrac{a}{2}+2\sin\dfrac{b}{2}>2\sin\dfrac{c}{2}$.

Do đó: $\sin\dfrac{a}{2}+\sin\dfrac{b}{2}>\sin\dfrac{c}{2}$ (đpcm).

• Sau nhiều nỗ lực chứng minh các bất đẳng thức (4) và (5) không thành công, một câu hỏi được đặt ra là: *Có thể tồn tại các góc tam diện không suy biến mà ở đó các bất đẳng thức* (4), (5) *không đúng*? Vậy là ta phải tìm phản ví dụ cho các khẳng định (4) và (5).

Để tìm các phản ví dụ đó, trước tiên ta lưu ý tới định lý sau.

Định lý (Tồn tại góc tam diện). *Một tam diện không suy biến tồn tại khi và chỉ khi các góc phẳng a, b, c của nó thỏa mãn các điều kiện sau:*

a) $a+b>c$; b) $b+c>a$; c) $c+a>b$;

d) $0<a+b+c<2\pi$.

Chứng minh điều kiện cần: Việc chứng minh các khẳng định a), b), c) hoàn toàn giống như chứng

Được quét bằng CamScanner

minh bất đẳng thức (1), còn khẳng định d) chính là bổ đề 1 và bổ đề 2 ở trên.

Chứng minh điều kiện đủ: Giả có ba góc a,b,c thỏa mãn các điều kiện a), b), c), d). Ta dựng góc tam diện không suy biến đỉnh S từ ba góc a,b,c cho trước. Ký hiệu mặt cầu tâm S và có bán kính $R=1$ là $(S;1)$. Ta cần dựng ba điểm $A,B,C\in(S;1)$. Phép dựng gồm 4 bước sau:

Bước 1: *Cố định cạnh* SA,SB. Lấy hai điểm $A,B\in(S;1)$ sao cho độ dài cung $AB=c$.

Bước 2: *Dựng điểm* C. Gọi C_A là đường tròn nằm trên $(S;1)$ có tâm A và bán kính cung bằng b. Gọi C_B là đường tròn nằm trên $(S;1)$ có tâm B và bán kính cung bằng a.

Bước 3: *Xác định giao điểm*. Từ điều kiện $a+b>c$ và $a-b<c$ (lưu ý rằng $a-b<c$ tương đương với $c+a>b$ và $c+b>a$) thì hai đường tròn C_A và C_B sẽ cắt nhau tại hai điểm đối xứng nhau qua mặt phẳng chứa cung AB. Ta gọi một giao điểm là C.

Bước 4: *Kiểm tra tính không suy biến*. Nếu $a+b+c<2\pi$ thì điểm C không nằm trên cung lớn AB. Do đó 3 tia SA,SB,SC không đồng phẳng hay góc tam diện $SABC$ là không suy biến.

Điều kiện đủ được chứng minh và do vậy định lý đã được chứng minh.

Nhận xét rằng hàm số $y=\sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Kết hợp với định lý tồn tại góc tam diện ta đặt ra chiến lược tìm các góc a,b,c thỏa mãn các điều kiện của định lý để các bất đẳng thức (4) và (5) không đúng như sau:

"*Ta sẽ lựa chọn* a,b *nhỏ, trong khi* c *gần bằng tổng* $a+b$ *để tối đa hóa giá trị của* $\sin c$ *và* $\sin^2\frac{c}{2}$ ".

Có thể lập trình cho máy tính thực hiện chiến lược lựa chọn a, b, c này. Sau đây là các kết quả nhận được.

IV. Bất đẳng thức $(4)\sin^2 a+\sin^2 b>\sin^2 c$ **là không đúng trong trường hợp tổng quát.**

Sau đây là một phản ví dụ để bác bỏ bất đẳng thức (4). Ta lựa chọn được: $a=20^o,b=20^o,c=38^o$.

Dễ dàng kiểm tra các góc a,b,c chọn được thỏa mãn các điều kiện của định lý. Nên chúng tạo thành một góc tam diện không suy biến.

Tính toán cụ thể:

$$\sin^2 20^o\approx(0{,}342)^2\approx 0{,}117;$$

$$\sin^2 20^o+\sin^2 20^o\approx 0{,}234;$$

$$\sin^2 38^o\approx(0{,}616)^2\approx 0{,}379.$$

Rõ ràng khi đó: $\sin^2 20^o+\sin^2 20^o\approx 0{,}234$

$$<\sin^2 38^o\approx(0{,}615)^2\approx 0{,}378.$$

Vậy BĐT(4) không đúng với cách chọn a,b,c này (đpcm).

V. Bất đẳng thức $(5)\ \sin^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{b}{2}>\sin^2\frac{c}{2}$ **là không đúng trong trường hợp tổng quát.**

Cụ thể ta chọn được $a=40^o,b=40^o,c=70^o$. Các góc a,b,c chọn được thỏa mãn các điều kiện của định lý nên chúng tạo thành một góc tam diện không suy biến. Tính toán cụ thể:

$$\sin^2\frac{40^o}{2}=\sin^2 20^o\approx 0{,}342^2\approx 0{,}117;$$

$$\sin^2\frac{70^o}{2}=\sin^2 35^o\approx 0{,}5736^2\approx 0{,}329;$$

Do đó: $\sin^2\frac{40^o}{2}+\sin^2\frac{40^o}{2}\approx 0{,}117+0{,}117=0{,}234$

$$<\sin^2 35^o\approx 0{,}329.$$

Vì thế bất đẳng thức (5) là không đúng với các góc phẳng của tam diện là $a=40^o,b=40^o$ và $c=70^o$ hay BĐT(5) là không đúng với mọi tam diện không suy biến (đpcm).

Các bạn thân mến! Như vậy bài toán chưa có lời giải của *H. Steinhaus* đã được giải quyết trọn vẹn. Lời giải khá dài nhưng dễ hiểu với trình độ toán phổ thông. Trong quá trình giải bài toán ta thu được định lý thú vị về sự tồn tại của góc tam diện rất hữu ích trong hình học không gian 3 chiều. Hy vọng rằng có thể có những lời giải ngắn gọn hoặc dễ hiểu hơn. Các bạn hãy thử sức xem.

Chúc các bạn thành công! Hẹn gặp lại các bạn.

Được quét bằng CamScanner

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 127

PROBLEM. Given an $m\times n$ grid $(m\le n)$. Find the number of squares determined by two horizontal lines and two vertical lines of the grid.

***Solution*:** We count the squares by their sides.

The number of 1×1 squares is $m\times n$.

The number of 2×2 squares is $(m-1)\times(n-1)$.

(Can you explain why?)

.....

The number of $m\times m$ squares is $1\times(n-m+1)$.

The number of all the squares is

$S=m\times n+(m-1)\times(n-1)+...+1\times(n-m+1)$.

We have

$$S=m\times\left[m+(n-m)\right]+(m-1)\times\left[(m-1)+(n-m)\right]+...+1\times\left[1+(n-m)\right].$$

Therefore

$$S=\left[m^2+(m-1)^2+...+1^2\right]+\left[m+(m-1)+...+1\right]\times(n-m).$$

But $m^2+(m-1)^2+...+1^2=\dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}$

and $m+(m-1)+...+1=\dfrac{m(m+1)}{2}$.

(These sums are calculated in previous issues).

From this, we can easily get

$$S=\frac{m(m+1)(3n-m+1)}{6}.$$

TỪ VỰNG/KÍ HIỆU

grid : *lưới ô vuông*

horizontal line : *đường nằm ngang*

vertical line : *đường thẳng đứng*

NGUYEN PHU HOANG LAN

(*University of Education, VNU, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 125

BÀI TOÁN. *Tìm số cách sắp xếp 9 chữ số từ 1 đến 9 sao cho các chữ số 1, 2 và 3 luôn xuất hiện theo thứ tự tăng dần từ trái sang phải (không nhất thiết phải đứng liền nhau).*

Lời giải. Xét hai cách sắp xếp sau:

2 1 5 6 9 8 7 4 3 và 3 1 5 6 9 8 7 4 2.

Để thỏa mãn yêu cầu, ta cần hoán vị lại các chữ số 1, 2 và 3 để được cách sắp xếp:

1 2 5 6 9 8 7 4 3.

Do đó, hai cách sắp xếp ban đầu được tính là một.

Vì vậy, số cách sắp xếp cần tìm là $\dfrac{9!}{3!}$.

Nhận xét. Các bạn *Lê Bạch Hải Đăng*, lớp 3B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz, **Cộng hòa Áo** và bạn *Nguyễn Hùng Cường*, phường An Nhơn, **Gia Lai** đã có bài dịch tốt. Xin hoan nghênh hai bạn.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

****

THÔNG BÁO

Bạn đọc có thể đặt mua các ấn phẩm của Tạp chí Toán học và Văn học trong nhà trường tại các bưu cục của VNPT trên cả nước với mã đặt như sau: *Toán học và Tuổi trẻ* (C168); *Toán Tuổi thơ 1* (C169); *Toán Tuổi thơ 2* (C169.1); *Văn học và Tuổi trẻ* (C668); *Văn Tuổi thơ* (C668.1).

****

Được quét bằng CamScanner



BÀI TOÁN 106. *Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có:* $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$.

Lời giải. *Cách 1. Sử dụng công thức lượng giác*

Biến đổi trực tiếp ta có: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\le\frac{1}{4}\text{ (luôn đúng).}$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases}\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}\\ \sin\dfrac{A-B}{2}=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{2}\\ A=B\end{cases}\Leftrightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\Delta ABC\text{ đều.}$$

Cách 2. Đánh giá từng nhân tử trong biểu thức ở vế trái của bất đẳng thức. Ta có:

$$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Mặt khác: $b^2+c^2\ge2bc\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2\ge2bc-a^2$

nên ta có: $1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\le1-\dfrac{2bc-a^2}{2bc}=\dfrac{a^2}{2bc}$.

Suy ra: $2\sin^2\dfrac{A}{2}\le\dfrac{a^2}{2bc}$ hay $\sin\dfrac{A}{2}\le\dfrac{a}{2\sqrt{bc}}$.

Tương tự: $\sin\dfrac{B}{2}\le\dfrac{b}{2\sqrt{ca}}$; $\sin\dfrac{C}{2}\le\dfrac{c}{2\sqrt{ab}}$.

Nhân các bất đẳng thức vế theo vế ta được:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}\text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều.

Cách 3. Áp dụng định lí côsin kết hợp với biến đổi lượng giác đưa về bất đẳng thức đại số, ta có:

$$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{bc}}.$$

Tương tự: $\sin\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(b+a-c)(b+c-a)}{ca}}$;

$$\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(c+b-a)(c+a-b)}{ab}}.$$

Khi đó BĐT đã cho tương đương với:

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc.\ (*)$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$(a+b-c)(b+c-a)\le\left(\frac{a+b-c+b+c-a}{2}\right)^2=b^2.$$

Tương tự: $(b+c-a)(c+a-b)\le c^2$

và $(a+b-c)(c+a-b)\le a^2$.

Nhân các BĐT theo vế, ta được:

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc\text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều.

Cách 4. Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số kết hợp với biến đổi lượng giác và tách số. Ta có:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\left(\frac{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{3}\right)^3.$$

Ta sẽ chứng minh $P=\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2}\le\dfrac{3}{2}$.

Thật vậy, ta có: $P=\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{A+B}{2}$

$$=\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\right).1+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.$$

Suy ra: $P\le\dfrac{1}{2}\left[\left(\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}\right)^2+1^2\right]+$

$$+\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}\right)-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{B}{2}\right)+\frac{1}{2}.$$

Suy ra $P\le\dfrac{1}{2}\cdot1+\dfrac{1}{2}\cdot1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

Do đó $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\le\dfrac{1}{8}$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases}\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}=1\\ \cos\dfrac{A}{2}=\cos\dfrac{B}{2}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}\\ A=B\end{cases}\Leftrightarrow A=B=C=60^\circ\Leftrightarrow\Delta ABC\text{ đều.}$$

Cách 5. Nhân với biểu thức trung gian để đưa về bất đẳng thức mới. Ta có: $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\le\dfrac{1}{8}$

Được quét bằng CamScanner

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\,2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{c}\,2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} \le \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Ta có: $\sin A\sin B=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$

$=\frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos C]$.

Do $\cos(A-B)\le 1$ nên: $\sin A\sin B\le\frac{1}{2}(1+\cos C)$

$=\frac{1}{2}.2\cos^2\frac{C}{2}=\cos^2\frac{C}{2}$

hay $\sin A\sin B\le\cos^2\frac{C}{2}$. Tương tự ta có:

$\sin B\sin C\le\cos^2\frac{A}{2}$ và $\sin C\sin A\le\cos^2\frac{B}{2}$.

Nhân các bất đẳng thức vế theo vế ta được:

$\sin A\sin B\sin C\le\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A=B=C\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều.

Cách 6. Biến đổi đưa về bất đẳng thức đại số, sử dụng kết quả $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$. Thật vậy, có:

$$r=\frac{S}{p}=\frac{abc}{4R\frac{a+b+c}{2}}=\frac{2R\sin A.2R\sin B.2R\sin C}{2R.2R(\sin A+\sin B+\sin C)}$$

$$=\frac{2R.8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

Suy ra $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (đpcm). (**)

Do đó để chứng minh $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$ ta chứng minh $\frac{r}{R}\le\frac{1}{2}$. Thật vậy, ta có:

$$\frac{r}{R}=\frac{S}{p}\cdot\frac{4S}{abc}=\frac{4S^2}{pabc}=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc}$$

$$=\frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{2abc}.$$

Từ (*) (theo cách 2), ta có: $\frac{r}{R}\le\frac{abc}{2abc}=\frac{1}{2}$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều.

Cách 7. Biến đổi lượng giác kết hợp với đặt ẩn phụ đưa về bất đẳng thức đại số

Ta có: $\sin\frac{A}{2}=\frac{\tan\frac{A}{2}}{\sqrt{1+\tan^2\frac{A}{2}}}$

và $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$.

Đặt $a=\tan\frac{A}{2}$; $b=\tan\frac{B}{2}$; $c=\tan\frac{C}{2}$ khi đó bài toán trở thành: *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn* $ab+bc+ca=1$. *Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{1+a^2}.\sqrt{1+b^2}\sqrt{1+c^2}\ge 8abc\quad (***).$$

Ta có: $(***)\Leftrightarrow(1+a^2)(1+b^2)(1+c)^2\ge 64a^2b^2c^2$.

Do: $1+a^2=ab+bc+ca+a^2$

$=(a+b)(a+c)\ge 2\sqrt{ab}.2\sqrt{ac}=4a\sqrt{bc}$

hay $1+a^2\ge 4a\sqrt{bc}$. Tương tự ta có:

$1+b^2\ge 4b\sqrt{ca}$ và $1+c^2\ge 4c\sqrt{ab}$.

Suy ra: $(1+a^2)(1+b^2)(1+c)^2\ge 64a^2b^2c^2$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều.

Cách 8. Áp dụng hệ thức Euler $IO^2=R^2-2Rr$

Do $IO^2\ge 0$ nên $R^2-2Rr\ge 0\Leftrightarrow R\ge 2r$

$\Leftrightarrow R\ge 2.4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (theo (**))

$\Leftrightarrow\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều.

PHÙ DU (*Ninh Bình*)

Nhận xét. Kỳ này bạn *Nguyễn Hùng Cường*, An Nhơn, **Gia Lai** đóng góp 4 cách giải với 2 cách mới có sử dụng BĐT Jensen; bạn *Đặng Sỹ Phước Đức*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh** đóng góp 2 cách giải với 1 cách mới sử dụng BĐT Schur; Các bạn: *Nguyễn Ngọc Gia Hân*, *Bùi Ngọc Khánh Thi*, 10E1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, **TP. Hồ Chí Minh** đóng góp 2 cách giải; bạn *Vũ Đức Duy*, Bình Lợi Trung, **TP. Hồ Chí Minh** và bạn *Trần Gia Phú*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên** đóng góp 2 cách. Xin tuyên dương tất cả các bạn.

KHÁNH BÌNH (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 108 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30/4/2026.

BÀI TOÁN 108. *Giải phương trình nghiệm nguyên*

$x^2+xy-2y+1=0$.

NGUYỄN TRI PHƯƠNG

(*GV THCS Nhơn Mỹ, An Nhơn, Bình Định*)

Được quét bằng CamScanner



BÀI TOÁN 114 (AIME 1997). *Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, trong đó a, b, c, d là các số thực khác 0 có các tính chất: $f(19)=19$, $f(97)=97$ và $f(f(x))=x$ với mọi giá trị của $x\neq -\dfrac{d}{c}$. Tìm miền giá trị của f.*

Lời giải. Cách 1 (Của bạn *Nguyễn Hùng Cường*, phường An Nhơn, **Gia Lai**). Ta có:

$$f(f(x))=x,\forall x\neq -\frac{d}{c}\Leftrightarrow \frac{a.\dfrac{ax+b}{cx+d}+b}{c.\dfrac{ax+b}{cx+d}+d}=x,\forall x\neq -\frac{d}{c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a^2+bc)x+b(a+d)}{c(a+d)x+bc+d^2}=x,\forall x\neq -\frac{d}{c}$$

$$\Leftrightarrow c(a+d)x^2+(d^2-a^2)x-b(a+d)=0,\forall x\neq -\frac{d}{c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c(a+d)=0\\ d^2-a^2=0\\ b(a+d)=0\end{cases}\Leftrightarrow a=-d \text{ (do } a, b, c, d \text{ khác 0).}$$

Vậy $f(x)=\dfrac{-dx+b}{cx+d}$.

Mà $f(19)=19$, $f(97)=97$ nên ta có:

$$\frac{-19d+b}{19c+d}=19 \text{ và } \frac{-97d+b}{97c+d}=97$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 19^2c+19.2d-b=0\\ 97^2c+97.2d-b=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 19^2c+19.2d-b=0\\ (97^2-19^2)c+(97-19).2d=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 19^2c+19.2d-b=0\\ 116c+2d=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-1843c\\ d=-58c\end{cases}.$$

Mà $a=-d$ và $c\neq 0$ nên ta có:

$$f(x)=\frac{-dx+b}{cx+d}=\frac{58cx-1843c}{cx-58c}$$

$$=\frac{58x-1843}{x-58}$$

$$=58+\frac{1521}{x-58},\forall x\neq 58.$$

Mặt khác biểu thức $\dfrac{1521}{x-58}$ nhận mọi giá trị thực khác 0 nên miền giá trị của f là $\mathbb{R}\setminus\{58\}$.

Cách 2. Từ giả thiết kéo theo f là hàm nghịch đảo của chính nó. Hàm nghịch đảo có thể được tìm bằng cách giải phương trình: $x=\dfrac{ay+b}{cy+d}$ theo y. Điều này kéo theo $f^{-1}(x)=\dfrac{dx-b}{-cx+a}$. Vì vậy các số khác không a, b, c, d tương ứng phải tỷ lệ với d, $-b$, $-c$, a. Điều này kéo theo $a=-d$. Phần còn lại tương tự như cách giải trên.

Nhận xét. Sau khi tìm được $f(x)=\dfrac{58x-1843}{x-58}$ thì có thể trực tiếp khảo sát hàm này để thấy miền giá trị của nó là $\mathbb{R}\setminus\{58\}$. Ngoài bạn *Cường*, bạn *Vũ Đức Duy*, phường Bình Lợi Trung, **TP. Hồ Chí Minh** cũng có lời giải đúng cho bài toán này. Xin hoan nghênh hai bạn.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30/4/2026.

BÀI TOÁN 116. *Cho n điểm trong mặt phẳng, với $n>4$, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hang. Chứng minh rằng có ít nhất $\dfrac{(n-3)(n-4)}{2}$ tứ giác lồi tạo thành có các đỉnh nằm trong số n điểm đó.*

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

Được quét bằng CamScanner

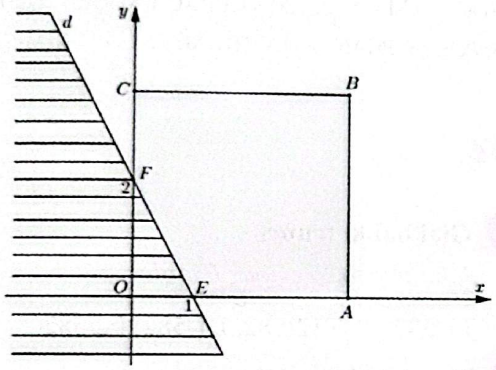


GIẢI ĐÁP: LỜI GIẢI CÓ ĐÚNG KHÔNG ?

(Đề đăng trên TH&TT số 582, tháng 12 năm 2025)

Phân tích sai lầm. Xác định diện tích phần chung giữa miền nghiệm (H) và miền hình vuông $ABCO$ chưa đúng (chưa xét đầy đủ các trường hợp). Hình vẽ trên chỉ là một trường hợp (cạnh hình vuông $ABCO$ là $a\geq 2$), dẫn đến kết quả $a=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (loại).

Lời giải đúng như sau.



Miền nghiệm của BPT $2x+y\geq 2$ là nửa mặt phẳng không bị gạch kể cả đường thẳng d. Gọi S là diện tích phần chung giữa miền nghiệm (H) và miền hình vuông $ABCO$. Ta có: $B(a;a)$, $C(0;a)$.

PT $CB: y=a$. Khi đó $CB\cap d=G\left(1-\dfrac{a}{2};a\right)$.

PT $AB: x=a$. Khi đó $AB\cap d=H(a;2-2a)$.

TH1: $0<a\leq 1$. Khi đó $B(a;a)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $2x+y\geq 2$ khi và chỉ khi $2a+a\geq 2\Leftrightarrow a\geq\dfrac{2}{3}$. Đối chiếu ĐK ta được $\dfrac{2}{3}\leq a\leq 1$.

Ta có:

$$S=S_{\Delta BGH}=\frac{1}{2}BG.BH=\frac{1}{2}\left|1-\frac{3a}{2}\right|.|2-3a|=\frac{1}{4}(2-3a)^2.$$

Vậy $\dfrac{1}{4}(2-3a)^2=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow(2-3a)^2=1$

$\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{3}$ (loại), $a=1$ (thỏa mãn).

TH2: $1<a<2$. Ta có:

$$S=S_{ABCO}-S_{COEG}=OA^2-\frac{1}{2}CO.(CG+OE)$$

$$=a^2-\frac{1}{2}.a.\left[\left(1-\frac{a}{2}\right)+1\right]=\frac{5}{4}a^2-a.$$ Vậy

$\dfrac{5}{4}a^2-a=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow 5a^2-4a-1=0\Leftrightarrow a=1$ (loại), $a=-\dfrac{1}{4}$ (loại).

TH3: $a\geq 2$. Ta có: $S=S_{ABCO}-S_{\Delta OEF}$

$$=OA^2-\frac{1}{2}OE.OF=a^2-\frac{1}{2}.1.2=a^2-1.$$

Vậy $a^2-1=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow a^2=\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow a=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (loại).

Đáp số: $a=1$.

Nhận xét. Các bạn: *Nguyễn Hùng Cường*, phường An Nhơn, **Gia Lai** và bạn *Vũ Đức Duy*, phường Bình Lợi Trung, **TP. Hồ Chí Minh** đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng. Xin hoan nghênh các bạn.

KIHIVI

ĐẾM SỐ TỨ GIÁC !



Trong giờ bài tập Toán, thầy giáo đưa ra bài toán. Sau một lúc suy nghĩ bạn Minh đã xung phong lên bảng trình bày.

Đề bài: *Cho một đa giác đều (H) có 21 đỉnh. Người ta lập một tứ giác có 4 đỉnh là 4 đỉnh của (H). Tìm số tứ giác được lập thành mà không có cạnh nào là cạnh của đa giác (H).*

***Lời giải của bạn Minh*:**

Số tứ giác có 4 đỉnh là các đỉnh của đa giác (H) bằng C_{21}^4. Để lập một tứ giác có ít nhất một cạnh là cạnh của đa giác (H):

Bước 1: Chọn 1 cạnh của đa giác (H) làm cạnh của tứ giác, có 21 cách.

Bước 2: Chọn 2 đỉnh từ 19 đỉnh còn lại của đa giác (H) làm 2 đỉnh còn lại cho tứ giác, có C_{19}^2 cách.

(Xem tiếp trang 13)

Được quét bằng CamScanner

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 586 (4.2026)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
NGUYỄN TIẾN THANH
Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam
PHẠM VĨNH THÁI
Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD
LÊ HỒNG SƠN

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

***Tổng biên tập*: NGUYỄN HỮU BẮC** ***Thư kí Tòa soạn*: VÕ THỊ HỒNG THU**

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* TRẦN HỮU NAM, *TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Vũ Hữu Chín – Ứng dụng các đường thẳng đồng quy trong tam giác.

9 Hướng dẫn giải đề thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Thanh Hóa, năm học 2025 – 2025.

13 Đề thi thử vào lớp 10 THPT chuyên, năm học 2025 – 2026.

14 **Thử sức trước kỳ thi THPTQG 2026** – Đề số 1

17 **Diễn đàn dạy học Toán**
Huỳnh Văn Minh – Sử dụng sơ đồ hình cây có trọng số để giải các bài toán xác suất có điều kiện.

22 **Đề ra kỳ này** *Problems in This Issue*
T1/586, ..., T12/586, L1/586, L2/586.

25 **Giải bài kì trước**
Solutions to Previous Problems
T1/582, ..., T12/582, L1/582, L2/582

35 **Phương pháp giải toán**
Vũ Nguyên Duy, Cao Minh Quang – Đồng bậc hóa trong chứng minh bất đẳng thức.

39 **Bạn có biết**
Hoàng Đức Tân – Lời giải cho bài toán chưa có lời giải.

43 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 127 – Bài dịch số 125.

44 **Nhiều cách giải cho một bài toán** – Giải bài toán 106 – Đề bài toán 108.

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay** – Giải bài toán 114. Đề bài toán 116.

47 **Sai lầm ở đâu?**

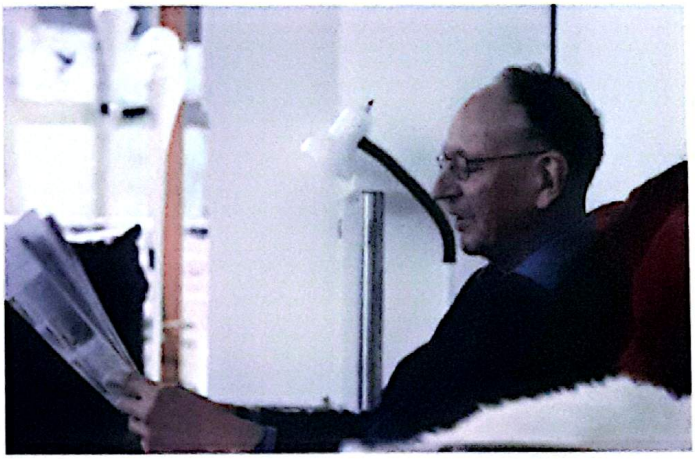
***Biên tập*:** KIM THANH, NHƯ HOÀNG
***Trị sự, phát hành*:** TRẦN THỊ MINH HIỀN
***Mĩ thuật*:** QUỐC HIỆP, THANH LONG
***Thiết kế, chế bản*:** MINH HÒA

Được quét bằng CamScanner

GIẢI ABEL 2026

Ngày 19-3-2026, Viện hàn lâm Khoa học Na Uy công bố trao Giải thưởng Toán học Abel 2026 cho nhà toán học người Đức *Gerd Faltings*, Giám đốc danh dự tại Viện Toán học Max Planck ở Bonn và Giáo sư danh dự tại Đại học Bonn *"vì đã giới thiệu các công cụ mạnh mẽ trong hình học số học và giải quyết được giả thuyết Diophantine lâu đời của Mordell và Lang"*. Trong tuyên bố của mình, Ủy ban giải thưởng đã ca ngợi *Gerd Faltings* là *"một nhân vật xuất sắc trong hình học số học. Những ý tưởng và kết quả của ông đã định hình lĩnh vực này và dẫn đến việc giải quyết các giả thuyết lâu đời. Đồng thời, ông đã giới thiệu các phương pháp mới có ảnh hưởng đến các công trình nghiên cứu sau này trong nhiều thập kỷ. Những thành tựu xuất sắc của ông đã kết hợp các quan điểm hình học và số học và chứng minh sức mạnh của những hiểu biết cấu trúc sâu sắc."*

Năm 1983, *Gerd Faltings* trở nên nổi tiếng chỉ sau một đêm trong giới toán học khi ông bất ngờ chứng minh được giả thuyết Mordell bằng những phương pháp hoàn toàn mới. Ý tưởng đằng sau giả thuyết Mordell đã có từ hàng nghìn năm trước. Nhà toán học Hy Lạp cổ đại *Diophantus* thành Alexandria muốn tìm hiểu xem một phương trình có bao nhiêu nghiệm nguyên, chẳng hạn như $a^2 + b^2 = c^2$. Theo định lý Pythagore, điều này tương ứng với câu hỏi thực tế là có bao nhiêu tam giác vuông có độ dài cạnh là các số nguyên. Rõ ràng câu trả lời bây giờ là có vô số tam giác như vậy. Năm 1637, *Pierre de Fermat* đã đưa ra giả thuyết rằng phương trình này là một ngoại lệ đối với bình phương và cho rằng *phương trình $a^n + b^n = c^n$ không có nghiệm nguyên nào khi $n > 2$* (giả thuyết này đã được *Andrew Wiles* hoàn thành chứng minh năm 1995 và được gọi là định lý Fermat lớn). Vào đầu thế kỷ 20, người ta dần nhận ra rằng: câu hỏi liệu các phương trình đa thức như vậy có nghiệm nguyên hay không và có bao nhiêu nghiệm nguyên phụ thuộc vào một tính chất hình học: nếu chúng được giải không phải với số nguyên mà với số phức, tập nghiệm thường tương ứng với một bề mặt trơn, khép kín, chẳng hạn như bề mặt của một hình cầu, một hình xuyến hoặc một hình xoắn ốc, ... Những bề mặt như vậy có thể được phân loại theo số lượng lỗ của chúng, trong toán học được gọi là giống g (genus) của bề mặt. Ví dụ, bề mặt của một hình cầu có giống $g = 0$, hình xuyến có giống $g = 1$, ... Năm 1922, *Louis Mordell* đưa ra giả thuyết rằng: *Các đường cong đại số có giống g lớn hơn 1 trên trường số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ có hữu hạn số điểm hữu tỷ*. Giả thuyết này đã thách thức giới toán học suốt hơn 60 năm cho tới năm 1983, *Gerd Faltings*, ở tuổi 28, đã làm kinh ngạc cộng đồng khoa học với chứng minh của mình cho giả thuyết của *Mordell*. Sau đó giả thuyết của *Mordell* được gọi định lý Faltings. Với cống hiến này, năm 1986, *Faltings* là người Đức đầu tiên nhận được Huy chương Fields, huy chương được coi là vinh dự cao nhất trong toán học.



Gerd Faltings - nhà toán học người Đức

Gerd Faltings sinh năm 1954 tại Gelsenkirchen, là con trai của một nhà vật lý và một nhà hóa học. Thời còn đi học, ông hai lần tham gia Cuộc thi Toán học Liên bang và được nhận vào Quỹ Học thuật Quốc gia Đức với tư cách là học sinh xuất sắc nhất. Sau khi tốt nghiệp Trung học, ông theo học Toán học và Vật lý tại Đại học Münster. Ông hoàn thành chương trình học năm 1978 với bằng tiến sĩ dưới sự hướng dẫn của *Hans-Joachim Nastold*. Năm 1978-1979, ông là nhà nghiên cứu thỉnh giảng tại Đại học Harvard ở Cambridge, Massachusetts. Sau khi trở về Münster, ông trở thành trợ lý của Giáo sư *Nastold* năm 1979 và nhận bằng habilitation năm 1981. Năm 1982, ông được bổ nhiệm vào Đại học Wuppertal, trở thành Giáo sư Toán học chính thức trẻ nhất ở Đức khi mới 27 tuổi. Năm 1985, ông nhận chức giáo sư tại Đại học Princeton ở Mỹ. Ông trở về Đức vào năm 1994, tiến hành nghiên cứu tại Viện Toán học Max Planck và giảng dạy tại Đại học Bonn từ năm 1994. Ông giữ chức Giám đốc danh dự tại Viện Toán học Max Planck ở Bonn từ năm 2023. *Gerd Faltings* có hai con gái, ông là người am hiểu opera và nhạc cổ điển, thích rượu ngon, thích làm vườn và là fan hâm mộ của Câu lạc bộ bóng đá FC Schalke 04.

Giải thưởng Abel, được đặt theo tên nhà toán học người Na Uy *Niels Henrik Abel*, sẽ được trao bởi Thái tử *Haakon* tại một buổi lễ ở Oslo vào ngày 26 tháng 5 năm 2026. Giải thưởng trị giá 7,5 triệu kroner Na Uy, tương đương 670.000 euro, do chính phủ Na Uy tài trợ. *Gerd Faltings* là Nhà Toán học người Đức đầu tiên nhận được giải thưởng danh giá này trong lĩnh vực Toán học.

TH&TT

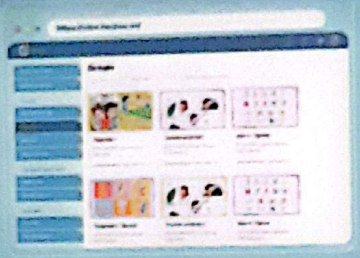
Được quét bằng CamScanner

NHÀ XUẤT BẢN
CTCP ĐẦU TƯ VÀ PHÁT TRIỂN GIÁO DỤC HÀ NỘI

BỨT TỐC ÔN THI HỌC KỲ 2

CÙNG ÔN LUYỆN THÔNG MINH



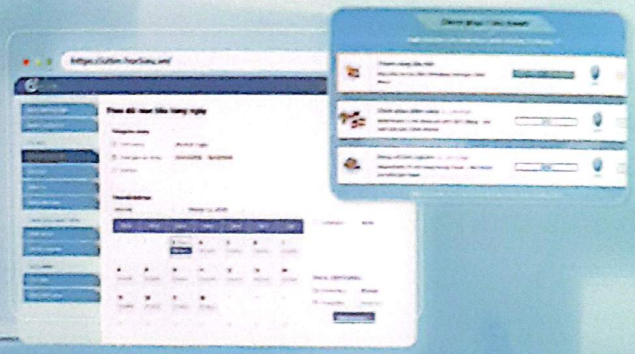


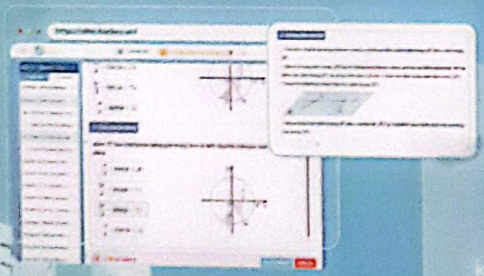
Tự ôn luyện toàn diện

- Tự ôn tập theo tiến trình học trên lớp
- Xem đáp án chuẩn – giải thích chi tiết
- Học thông qua gợi ý và liên kết "kiến thức trọng tâm"

Đặt mục tiêu & lộ trình học tập rõ ràng

- Tự đặt mục tiêu điểm số, kiến thức muốn nâng cao
- Hệ thống theo dõi tiến độ và nhắc nhở mỗi ngày



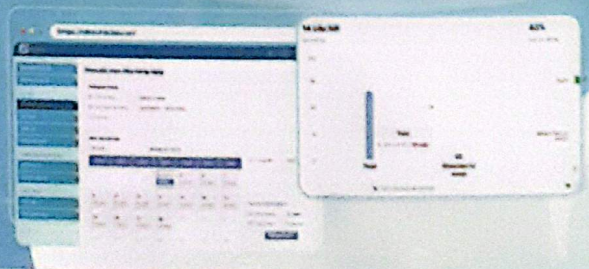


AI đề xuất lộ trình học cá nhân hóa

- AI phân tích bài làm -> nhận diện điểm yếu
- Gợi ý bài ôn phù hợp: luyện tập – kiểm tra – tổng ôn theo đúng năng lực

Xem báo cáo & thống kê kết quả chi tiết

Điều chỉnh kế hoạch ôn luyện để đạt mục tiêu cho kì thi Học kì 2



QUÉT MÃ ĐỂ ĐƯỢC HỖ TRỢ NHANH NHẤT

HỖ TRỢ - GIẢI ĐÁP - TƯ VẤN

hoclieu.vn
Học Liệu
1900 636 011
hotro@hoclieu.vn

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT4M26
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2026

Giá: 22.000 đồng
Hai mươi hai nghìn đồng

Được quét bằng CamScanner