TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 587
Tháng 5 - 2026
ISSN: 2734-9284

TẠP CHÍ Toán học & Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 63 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com



Được quét bằng CamScanner

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BẢNG GIÁ

SÁCH GIÁO KHOA LỚP 10

Chuẩn mực
Khoa học
Hiện đại

NĂM HỌC 2026 - 2027

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)
1	Ngữ văn 10, tập một	20.200
2	Ngữ văn 10, tập hai	16.500
3	Toán 10, tập một	12.800
4	Toán 10, tập hai	12.400
5	Vật lí 10	17.100
6	Hóa học 10	14.900
7	Sinh học 10	19.600
8	Lịch sử 10	13.900
9	Địa lí 10	14.500
10	Âm nhạc 10	16.000
11	Tin học 10	20.500
12	Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 10	19.200
13	Giáo dục thể chất 10 - Bóng đá	11.100
14	Giáo dục thể chất 10 - Bóng rổ	10.000
15	Giáo dục thể chất 10 - Bóng chuyền	10.600
16	Giáo dục thể chất 10 - Cầu lông	12.100
17	Công nghệ 10: Thiết kế và Công nghệ	18.100
18	Công nghệ 10: Công nghệ trồng trọt	19.700
19	Mĩ thuật 10 - Thiết kế mĩ thuật đa phương tiện	7.000
20	Mĩ thuật 10 - Thiết kế đồ hoạ	6.000
21	Mĩ thuật 10 - Thiết kế thời trang	6.000
22	Mĩ thuật 10 - Thiết kế mĩ thuật Sân khấu, Điện ảnh	6.000
23	Mĩ thuật 10 - Lí luận và Lịch sử mĩ thuật	6.000
24	Mĩ thuật 10 - Điêu khắc	6.000
25	Mĩ thuật 10 - Kiến trúc	6.000
26	Mĩ thuật 10 - Hội hoạ	6.000
27	Mĩ thuật 10 - Đồ hoạ (tranh in)	6.000
28	Mĩ thuật 10 - Thiết kế công nghiệp	6.000
29	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 10	9.100
30	Giáo dục Quốc phòng và An ninh 10	11.400

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)
1	Chuyên đề học tập Ngữ văn 10	12.900
2	Chuyên đề học tập Toán 10	7.600
3	Chuyên đề học tập Vật lí 10	9.500
4	Chuyên đề học tập Hóa học 10	9.100
5	Chuyên đề học tập Sinh học 10	10.800
6	Chuyên đề học tập Lịch sử 10	8.200
7	Chuyên đề học tập Địa lí 10	5.400
8	Chuyên đề học tập Âm nhạc 10	9.000
9	Chuyên đề học tập Mĩ thuật 10	11.000
10	Chuyên đề học tập Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 10	10.000
11	Chuyên đề học tập Tin học 10: Khoa học máy tính	13.000
12	Chuyên đề học tập Tin học 10: Tin học ứng dụng	14.000
13	Chuyên đề học tập Công nghệ 10: Thiết kế và công nghệ	10.000
14	Chuyên đề học tập Công nghệ 10: Công nghệ trồng trọt	11.000

SÁCH GIÁO KHOA TIẾNG ANH

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)
1	**Tiếng Anh 10 Global Success** (hợp tác xuất bản với Pearson Education - Tổng Chủ biên Hoàng Văn Vân)	31.300



LƯU Ý

Phục vụ năm học 2026-2027, NXBGDVN áp dụng mức giá bìa theo bảng giá này thống nhất trong toàn quốc.

Được quét bằng CamScanner



SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP THẾ ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT Tiên Du số 1, Tiên Du, Bắc Ninh)

Khi giải một phương trình mà ta biến đổi ra một phương trình mới hoặc phát hiện một đẳng thức có chứa các biểu thức cũng xuất hiện trong phương trình đã cho thì ta có thể sử dụng phương pháp thế để giải tiếp phương trình. Sau đây là một vài thí dụ.

Thí dụ 1. *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{\sqrt{x^3+5x^2}+\sqrt{5}x}+\sqrt[3]{\sqrt{x^3+5x^2}-\sqrt{5}x}=1 \ (1).$$

Lời giải. Điều kiện: $x^3+5x^2\ge 0\Leftrightarrow x\ge -5$.

Khi đó ta có:

$$(1)\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{\sqrt{x^3+5x^2}+\sqrt{5}x}+\sqrt[3]{\sqrt{x^3+5x^2}-\sqrt{5}x}\right)^3=1$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^3+5x^2}+\sqrt{5}x+\sqrt{x^3+5x^2}-\sqrt{5}x$$
$$+3.\sqrt[3]{\left(\sqrt{x^3+5x^2}+\sqrt{5}x\right)\left(\sqrt{x^3+5x^2}-\sqrt{5}x\right)}\times$$
$$\times\left(\sqrt[3]{\sqrt{x^3+5x^2}+\sqrt{5}x}+\sqrt[3]{\sqrt{x^3+5x^2}-\sqrt{5}x}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^3+5x^2}+3.\sqrt[3]{x^3+5x^2-5x^2}\times$$
$$\times\left(\sqrt[3]{\sqrt{x^3+5x^2}+\sqrt{5}x}+\sqrt[3]{\sqrt{x^3+5x^2}-\sqrt{5}x}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^3+5x^2}+$$
$$+3\sqrt[3]{x^3}\left(\sqrt[3]{\sqrt{x^3+5x^2}+\sqrt{5}x}+\sqrt[3]{\sqrt{x^3+5x^2}-\sqrt{5}x}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^3+5x^2}+$$
$$+3x\left(\sqrt[3]{\sqrt{x^3+5x^2}+\sqrt{5}x}+\sqrt[3]{\sqrt{x^3+5x^2}-\sqrt{5}x}\right)=1 \ (2).$$

Thế (1) vào (2) ta có: $2\sqrt{x^3+5x^2}+3x=1$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^3+5x^2}=1-3x\Leftrightarrow\begin{cases}1-3x\ge 0\\4\left(x^3+5x^2\right)=(1-3x)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{1}{3}\\4x^3+11x^2+6x-1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{1}{3}\\(x+1)\left(4x^2+7x-1\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{1}{3}\\(x+1)(4x^2+7x-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{1}{3}\\\left[\begin{array}{l}x+1=0\\4x^2+7x-1=0\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{1}{3}\\\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\dfrac{-7\pm\sqrt{65}}{8}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\dfrac{-7\pm\sqrt{65}}{8}.\end{array}\right.$$

Thử lại thấy các nghiệm trên đều thỏa mãn (1).

Vậy PT(1) có đúng 3 nghiệm $x=-1;x=\dfrac{-7\pm\sqrt{65}}{8}$.

Thí dụ 2. *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{\sqrt{x^2-1}+x}-\sqrt[3]{\sqrt{x^2-1}-x}=x+1 \ (1).$$

Lời giải. Điều kiện: $x^2-1\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -1\\x\ge 1\end{array}\right.$. Khi đó:

$$(1)\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{\sqrt{x^2-1}+x}-\sqrt[3]{\sqrt{x^2-1}-x}\right)^3=(x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow 2x-3.\sqrt[3]{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}\times$$
$$\times\left(\sqrt[3]{\sqrt{x^2-1}+x}-\sqrt[3]{\sqrt{x^2-1}-x}\right)=(x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow 2x-3.\sqrt[3]{-1}\times\left(\sqrt[3]{\sqrt{x^2-1}+x}-\sqrt[3]{\sqrt{x^2-1}-x}\right)=(x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow 2x+3\left(\sqrt[3]{\sqrt{x^2-1}+x}-\sqrt[3]{\sqrt{x^2-1}-x}\right)=(x+1)^3 \ (2).$$

Được quét bằng CamScanner

Từ (1) và (2) sử dụng phương pháp thế ta được:

$$2x+3(x+1)=(x+1)^3 \Leftrightarrow 2x+3(x+1)=(x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow x^3+3x^2-2x-2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+4x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Từ điều kiện ta loại $x=-2+\sqrt{2}$. Thử lại ta thấy $x=1$ và $x=-2-\sqrt{2}$ là nghiệm của (1).

Vậy PT(1) có đúng 2 nghiệm $x=1$ và $x=-2-\sqrt{2}$.

Thí dụ 3. *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{1+x^3}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{1+x^3}}=x \quad (1).$$

Lời giải. Điều kiện: $x^3+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$. Khi đó:

$$(1)\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{1+\sqrt{1+x^3}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{1+x^3}}\right)^3=x^3$$

$$\Leftrightarrow 2+3.\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{1+x^3}\right)\left(1-\sqrt{1+x^3}\right)}\times$$

$$\times\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{1+x^3}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{1+x^3}}\right)=x^3$$

$$\Leftrightarrow 2+3.\sqrt[3]{-x^3}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{1+x^3}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{1+x^3}}\right)=x^3$$

$$\Leftrightarrow 2-3x\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{1+x^3}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{1+x^3}}\right)=x^3 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) sử dụng phương pháp thế ta được:

$$2-3x^2=x^3 \Leftrightarrow x^3+3x^2-2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2+2x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-1\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Từ điều kiện ta loại $x=-1-\sqrt{3}$. Thử lại ta thấy $x=-1$ không là nghiệm của (1), $x=-1+\sqrt{3}$ là nghiệm của (1).

Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x=-1+\sqrt{3}$.

Thí dụ 4. *Giải phương trình*

$$\sqrt{x^2+4x+3}=x.\sqrt[3]{3x^2+6}+1 \quad (1).$$

Lời giải. Ta có đẳng thức:

$$x^2+4x+3+3x^2+6=4x^2+4x+9$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+4x+3}\right)^2+\left(\sqrt[3]{3x^2+6}\right)^3=4x^2+4x+9 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) dùng phương pháp thế ta được:

$$\left(x.\sqrt[3]{3x^2+6}+1\right)^2+\left(\sqrt[3]{3x^2+6}\right)^3=4x^2+4x+9 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{3x^2+6}\right)^3-8+x^2\left(\sqrt[3]{3x^2+6}\right)^2-4x^2+2x.\sqrt[3]{3x^2+6}-4x=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{3x^2+6}-2\right)\times$$

$$\times\left[\left(\sqrt[3]{3x^2+6}+2\right)x^2+2x+\left(\sqrt[3]{3x^2+6}\right)^2+2\sqrt[3]{3x^2+6}+4\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{3x^2+6}-2=0 \quad (4) \text{ hoặc}$$

$$\left(\sqrt[3]{3x^2+6}+2\right)x^2+2x+\left(\sqrt[3]{3x^2+6}\right)^2+2\sqrt[3]{3x^2+6}+4=0 \quad (5).$$

Ta có: $(4)\Leftrightarrow \sqrt[3]{3x^2+6}-2=0 \Leftrightarrow 3x^2+6=8$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Do $\sqrt[3]{3x^2+6}>0$ nên

$$\left(\sqrt[3]{3x^2+6}+2\right)x^2+2x+\left(\sqrt[3]{3x^2+6}\right)^2+2\sqrt[3]{3x^2+6}+4$$

$$>2x^2+2x+4=x^2+(x+1)^2+3>0.$$

Suy ra PT(5) vô nghiệm. Thay $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ vào PT(1) ta thấy chỉ $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$ thỏa mãn.

Vậy PT(1) có đúng 1 nghiệm $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Thí dụ 5. *Giải phương trình*

$$\frac{1+(x^2-1)\sqrt{x^3-2x^2+\frac{11}{8}}}{\sqrt{x^4-x^3+2x^2-\frac{3}{8}}}=1 \quad (1).$$

Lời giải. Từ PT(1) suy ra:

$$\sqrt{x^4-x^3+2x^2-\frac{3}{8}}=1+(x^2-1)\sqrt{x^3-2x^2+\frac{11}{8}} \quad (2).$$

Ta có đẳng thức:

$$x^4-x^3+2x^2-\frac{3}{8}+x^3-2x^2+\frac{11}{8}=x^4+1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^4-x^3+2x^2-\frac{3}{8}}\right)^2+x^3-2x^2+\frac{11}{8}=x^4+1 \quad (3).$$

Từ (2) và (3) sử dụng phương pháp thế ta được:

Được quét bằng CamScanner

$$\left(1+\left(x^2-1\right)\sqrt{x^3-2x^2+\frac{11}{8}}\right)^2+x^3-2x^2+\frac{11}{8}=x^4+1$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(x^2-1\right)^2+1\right)\left(x^3-2x^2+\frac{11}{8}\right)+2\left(x^2-1\right)\sqrt{x^3-2x^2+\frac{11}{8}}-x^4=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^3-2x^2+\frac{11}{8}}-1\right)\times$$

$$\times\left[\left(\left(x^2-1\right)^2+1\right)\sqrt{x^3-2x^2+\frac{11}{8}}+x^4\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^3-2x^2+\frac{11}{8}}-1=0 \quad (4)$$

hoặc $\left(\left(x^2-1\right)^2+1\right)\sqrt{x^3-2x^2+\frac{11}{8}}+x^4=0$ (5).

Ta có: $(4)\Leftrightarrow x^3-2x^2+\frac{11}{8}=1$

$$\Leftrightarrow(2x-1)\left(4x^2-6x-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{4}\end{array}\right.$$

Dễ thấy $x=0$ không là nghiệm của (5). Với $x\neq0$ thì $x^4>0$, suy ra $VT(5)>0$, do đó (5) vô nghiệm.

Thử lại ta thấy các nghiệm $x=\frac{1}{2}$ và $x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{4}$ đều là nghiệm của (1). Vậy PT(1) có đúng 3 nghiệm $x=\frac{1}{2}$ và $x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{4}$.

Thí dụ 6. *Giải phương trình*

$$\left(\sqrt[3]{2x^3-2x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{3x^2+5x+1}\right)^2$$

$$-\sqrt[3]{\left(2x^3-2x\right)\left(3x^2+5x+1\right)}=x^2+x+1 \quad (1).$$

Lời giải. Ta có đẳng thức:

$$2x^3-2x+3x^2+5x+1=2x^3+3x^2+3x+1$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{2x^3-2x}\right)^3+\left(\sqrt[3]{3x^2+5x+1}\right)^3=2x^3+3x^2+3x+1$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{2x^3-2x}+\sqrt[3]{3x^2+5x+1}\right)\times$$

$$\times\left[\left(\sqrt[3]{2x^3-2x}\right)^2+\left(\sqrt[3]{3x^2+5x+1}\right)^2-\sqrt[3]{\left(2x^3-2x\right)\left(3x^2+5x+1\right)}\right]$$

$$=(2x+1)\left(x^2+x+1\right) \quad (2).$$

Từ (1) và (2) sử dụng phương pháp thế ta được:

$$\left(\sqrt[3]{2x^3-2x}+\sqrt[3]{3x^2+5x+1}\right)\left(x^2+x+1\right)=(2x+1)\left(x^2+x+1\right)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{2x^3-2x}+\sqrt[3]{3x^2+5x+1}=2x+1 \quad (3).$$

Đặt $\sqrt[3]{2x^3-2x}=a;\sqrt[3]{3x^2+5x+1}=b$.

Từ (1) và (3) ta có hệ: $\begin{cases}a+b=2x+1\\a^2+b^2-ab=x^2+x+1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2x+1\\(a+b)^2-3ab=x^2+x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2x+1\\(2x+1)^2-3ab=x^2+x+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2x+1\\ab=x^2+x\end{cases}.$$

Theo định lí Viète thì a, b là nghiệm phương trình: $t^2-(2x+1)t+x^2+x=0\Leftrightarrow(t-x)(t-x-1)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=x\\t=x+1\end{array}\right.$$

Với $a=x;b=x+1$ suy ra: $\begin{cases}\sqrt[3]{2x^3-2x}=x\\\sqrt[3]{3x^2+5x+1}=x+1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^3-2x=x^3\\3x^2+5x+1=(x+1)^3\end{cases}\Leftrightarrow x\left(x^2-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Với $a=x+1;b=x$ suy ra: $\begin{cases}\sqrt[3]{2x^3-2x}=x+1\\\sqrt[3]{3x^2+5x+1}=x\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^3-2x=(x+1)^3\\3x^2+5x+1=x^3\end{cases}\Leftrightarrow x^3-3x^2-5x-1=0$$

$$\Leftrightarrow(x+1)\left(x^2-4x-1\right)=0\Leftrightarrow x=-1,\ x=2\pm\sqrt{5}.$$

Thử lại ta thấy 6 nghiệm tìm được đều là nghiệm của (1). Vậy tập nghiệm của PT(1) là:

$$S=\left\{-1;0;-\sqrt{2};\sqrt{2};2-\sqrt{5};2+\sqrt{5}\right\}.$$

BÀI TẬP

Giải các phương trình sau

1. $\sqrt[3]{3x+\sqrt{9x^2-8}}+\sqrt[3]{3x-\sqrt{9x^2-8}}=x.$
2. $\sqrt[3]{2+\sqrt{4+x^3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{4+x^3}}=x.$
3. $\sqrt[3]{2x+\sqrt{4x^2+x^3}}+\sqrt[3]{2x-\sqrt{4x^2-x^3}}=x.$

(Xem tiếp trang 18)

Được quét bằng CamScanner

HƯỚNG DẪN GIẢI
ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN

Năm học 2026 - 2027

Câu 1. a) *Giả sử a, b, c, x, y, z là các số thực khác 0 thoả mãn $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ và $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.*

Chứng minh rằng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

b) *Tìm tất cả các số thực x, y, z thoả mãn: $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}=3$.*

Lời giải. a) Ta có:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ac}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{cxy+ayz+bxz}{abc}\right)=1 \quad (*).$$

Ta có: $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0 \Leftrightarrow \frac{ayz+bxz+cxy}{xyz}=0$

$$\Leftrightarrow ayz+bxz+cxy=0.$$

Thay vào (*) ta có:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

b) Điều kiện xác định: $|x|\le\sqrt{3}; |y|\le 1; |z|\le\sqrt{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức $AB\le\frac{A^2+B^2}{2}$ đúng với mọi A, B ta có:

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}$$

$$\le\frac{x^2+1-y^2}{2}+\frac{y^2+2-z^2}{2}+\frac{z^2+3-x^2}{2}$$

$$=3.$$

Kết hợp với giả thiết ta có dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} x=\sqrt{1-y^2} \\ y=\sqrt{2-z^2} \\ z=\sqrt{3-x^2} \\ x, y, z\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y^2+z^2=2 \\ z^2+x^2=3 \\ x, y, z\ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=0 \\ z^2=2 \\ x, y, z\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=\sqrt{2} \end{cases}.$$

Câu 2. *Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n\ge 6$ thì số $a_n=1+\frac{2.6.10...(4n-2)}{(n+5)(n+6)...(2n)}$ là một số chính phương.*

Lời giải. Ta có:

$$a_n=1+\frac{2^n[1.3.5.....(2n-1)].(n+4)!}{(2n)!}$$

$$=1+\frac{2^n.(n+4)!}{2.4.6...2n}$$

$$=1+\frac{2^n.[1.2.3...n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)!]}{2^n.[1.2.3.4...n]}$$

$$=1+(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

$$\Rightarrow a_n=(n^2+5n+5)^2.$$

Vì n là là số nguyên nên $(n^2+5n+5)^2$ cũng là một số nguyên. Do đó, a_n luôn là một số chính phương.

Câu 3. *Cho a, b, c là các số thực dương $abc=1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\le\frac{3}{4}.$$

Lời giải. Đặt $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$. Khi đó:

$$P=\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}$$

Được quét bằng CamScanner

$$= \frac{yz}{xy+xz+2yz} + \frac{zx}{xy+yz+2xz} + \frac{xy}{xz+yz+2xy}.$$

Suy ra: $3-P = 1 - \dfrac{yz}{xy+xz+2yz}$

$$+1 - \frac{zx}{xy+yz+2xz} + 1 - \frac{xy}{xz+yz+2xy}$$

$$\Rightarrow 3-P = (xy+yz+xz)\left(\frac{1}{xy+xz+2yz} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{xy+yz+2xz} + \frac{1}{xz+yz+2xy}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương:

$$A+B+C \geq 3\sqrt[3]{ABC};$$

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{ABC}}$$

ta được bất đẳng thức $\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}+\dfrac{1}{C} \geq \dfrac{9}{A+B+C}$.

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên, ta được:

$$(A+B+C)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right) \geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C} \geq \frac{9}{A+B+C}.$$

Khi đó ta có:

$$3-P \geq (xy+yz+xz)\frac{9}{4xy+4yz+4xz}$$

$$= \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow P \leq 3-\frac{9}{4} = \frac{3}{4}.$$

Kết hợp với giả thiết, dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} xy+yz+2xz = xy+2yz+xz = 2xy+yz+xz \\ xyz = 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=y=z=1$ hay $a=b=c=1$.

Câu 4. *Cho hình bình hành ABCD có CB = CA. Gọi M là điểm bất kỳ trên tia đối của tia BA. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt MD tại N (N khác D), đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt MC tại K (K khác M).*

a) *Chứng minh tứ giác ABKC nội tiếp.*

b) *Gọi I là giao điểm của đường thẳng AN và đường thẳng BK. Chứng minh I luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M thay đổi.*

Lời giải. a) Ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{BAC}$ (tam giác ABC cân tại C) và $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$ (so le trong)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACD}$.

Mặt khác, tứ giác $ADCN$ nội tiếp nên $\widehat{ACD} = \widehat{AND}$ (cùng chắn cung AD)

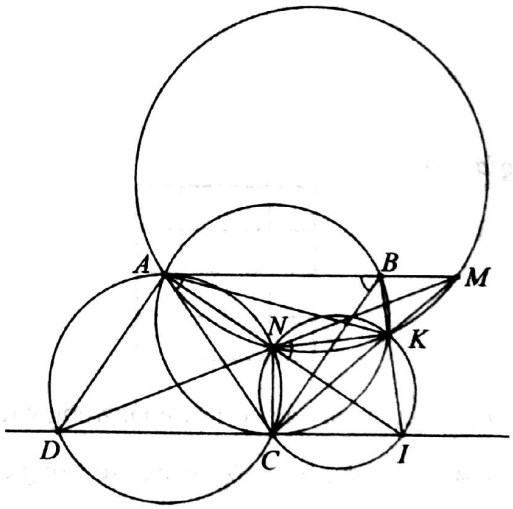
$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AND}$.

Mà $\widehat{ADN} = \widehat{MNI}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{MNI}$ (1).

Mặt khác ta có: $\widehat{AKC} + \widehat{AKM} = 180°$ (kề bù) và $\widehat{MNI} + \widehat{ANM} = 180°$ (kề bù).

Do tứ giác $AMKN$ nội tiếp nên $\widehat{AKM} = \widehat{ANM}$ (cùng chắn $\widehat{AM}$) nên $\widehat{AKC} = \widehat{MNI}$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{AKC} = \widehat{ABC}$ (cùng chắn cung AC). Vậy tứ giác $ABKC$ nội tiếp.



b) Do I là giao điểm của AN và BK. Ta sẽ chứng minh C, D, I thẳng hàng.

Tứ giác $ABKC$ nội tiếp nên $\widehat{BAC} = \widehat{IKC}$ (cùng bù với $\widehat{BKC}$).

Tứ giác $ADCN$ nội tiếp nên $\widehat{INC} = \widehat{ADC}$ (cùng bù với $\widehat{ANC}$).

Mà $\widehat{BAC} = \widehat{ADC}$ ($ABCD$ là hình bình hành có $CA = CB$) nên $\widehat{IKC} = \widehat{INC}$ (cùng chắn cung IC),

Được quét bằng CamScanner

suy ra tứ giác $CNKI$ nội tiếp.

Ta có: $\widehat{CIA}=\widehat{CIN}=\widehat{CKN}=180^\circ-\widehat{MKN}$

$=\widehat{MAN}=\widehat{MAI}.$

Suy ra: $AM // CI$. Mà $AM // CD$ nên C, D, I thẳng hàng. Vậy I thuộc đường thẳng CD cố định khi M thay đổi.

Câu 5. a) *Cho bảng ô vuông có kích thước 4×4 như hình bên.*

Mỗi ô trong bảng này được viết một số nguyên dương sao cho 16 số trên bảng đôi một khác nhau. Trong mỗi hàng, mỗi cột luôn tồn tại một số bằng tổng ba số còn lại trong hàng, trong cột đó. Gọi M là số lớn nhất trong 16 số trên bảng. Tìm giá trị nhỏ nhất của M.

b) *Có bao nhiêu tập hợp con A của tập hợp $\{1; 2; 3; 4; \ldots; 2014\}$ thoả mãn điều kiện A có ít nhất 2 phần tử và nếu $x\in A$, $y\in A$, $x>y$ thì $\dfrac{y^2}{x-y}\in A$.*

Lời giải. a)



Gọi a_1, a_2, a_3, a_4 là các số lớn nhất trong các cột 1, 2, 3, 4 và gọi $b_1, b_2, ..., b_{12}$ là các số trong các ô còn lại. Khi đó:

$$a_1+a_2+a_3+a_4=b_1+b_2+\cdots+b_{12}.$$

Do các số trong 16 ô vuông đôi một khác nhau nên

$$b_1+b_2+\cdots+b_{12}\ge1+2+\cdots+12=78$$

và $a_1+a_2+a_3+a_4\le M+(M-1)$

$+(M-2)+(M-3)=4M-6,$

Suy ra: $4M-6\ge78\Leftrightarrow M=21.$

Xây dựng một bảng ô vuông ứng với $M=21$.

b) Với mỗi tập A là tập con của $S=\{1; 2; 3; 4; \ldots; 2014\}$ thoả mãn đề bài, gọi a và b lần lượt là phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của A $(a,\ b\in S,\ a<b)$.

Ta chứng minh $b\le2a$. Thật vậy, giả sử $b>2a$.

Theo giả thiết $c=\dfrac{a^2}{b-a}\in A.$

Mà $b>2a\Rightarrow b-a>a>0\Rightarrow c=\dfrac{a^2}{b-a}<\dfrac{a^2}{a}=a,$

mâu thuẫn với a là phần tử nhỏ nhất của các tập A. Vậy $b\le2a$.

Gọi d là phần tử lớn nhất của tập $B=A\setminus\{b\}$. Ta chứng minh $b\ge2d$.

Thật vậy, giả sử $b<2d$, theo giả thiết thì:

$d<b\Rightarrow e=\dfrac{d^2}{b-d}\in A$ mà $b<2d$

$\Rightarrow0<b-d<d\ \Rightarrow e>\dfrac{d^2}{d}=d.$

Suy ra $e\in A$ nhưng $e\notin B$ nên $e=b$ suy ra:

$\dfrac{d^2}{b-d}=b\Rightarrow d^2=b^2-bd$

$\Rightarrow5d^2=4b^2-4bd+d^2=(2b-d)^2$ (mâu thuẫn vì vế phải là số chính phương, vế trái không là số chính phương).

Vậy $b\ge2d\Rightarrow2d\le b\le2a\ \Rightarrow d\le a.$

Khi $a\le d$ (a và d lần lượt là phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của tập con B) nên $a=d$ hay $b=2a$.

Vậy $A=\{a; 2a\}$. Kiểm tra lại ta thấy A thoả mãn đề bài. Vì $a\in S$ và $2a\in S$ nên $2\le2a\le2014$ hay $1\le a\le1007$.

Vậy số tập con A thoả mãn đề bài là 1007 tập con.

HÀ VĂN NHÂN

(GV Trường THCS Hoằng Xuân, Hoằng Hoá, Thanh Hoá)

Được quét bằng CamScanner

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN BẮC GIANG

Năm học 2025 - 2026

Mã đề:102

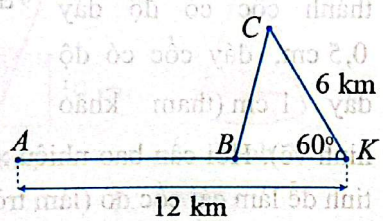
PHẦN I. Trắc nghiệm (6,0 *điểm*)

Câu 1. Cho đường tròn $(O;6)$ và hai điểm A, B sao cho $OA=18, OB=24, AB=30$. Điểm M thay đổi thuộc $(O;6)$, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+3MB$ bằng

A. $9\sqrt{577}$ **B.** $2\sqrt{145}$

C. $3\sqrt{577}$ **D.** $6\sqrt{145}$

Câu 2. Một trạm biến áp đặt tại vị trí A trên bờ biển AK. Một công ty điện lực thi công đường dây điện từ trạm biến áp A đến đảo C ở ngoài biển. Biết chi phí mỗi kilômét đường dây trên bờ biển là 30 triệu đồng, mỗi kilômét đường dây ngoài biển là 50 triệu đồng. Công ty điện lực thi công đường dây điện từ A đến B trên bờ biển và từ B đến đảo C với tổng chi phí là 500 triệu đồng. Biết $AK=12$ km, $CK=6$ km, $\widehat{CKB}=60^\circ$ $(AB>BK)$.

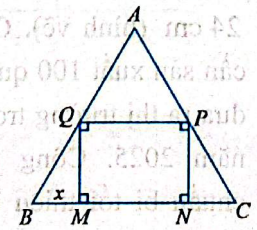


Tính khoảng cách giữa hai điểm A và B theo đơn vị kilômét (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

A. 7,7 km **B.** 7,9 km

C. 7,6 km **D.** 7,8 km

Câu 3. Cho một tấm nhôm hình tam giác đều ABC có cạnh bằng 20 cm. Người ta cắt ở ba góc của tấm nhôm đó ba tam giác như hình vẽ dưới đây để được hình chữ nhật $MNPQ$.



Đặt $BM=x$ (cm). Diện tích của hình chữ nhật $MNPQ$ đạt giá trị lớn nhất khi x bằng

A. 5,5 cm **B.** 5 cm

C. 4 cm **D.** 2,5 cm

Câu 4. Một nhóm có 5 học sinh gồm 3 học sinh nữ và 2 học sinh nam. Cô giáo chủ nhiệm chọn ngẫu nhiên 3 học sinh từ 5 học sinh đó để làm nhiệm vụ trực nhật lớp. Xác suất để 3 học sinh được chọn có ít nhất một học sinh nam bằng

A. $\frac{1}{5}$ **B.** $\frac{9}{10}$ **C.** $\frac{2}{5}$ **D.** $\frac{7}{10}$

Câu 5. Một vòi nước chảy với lưu lượng không đổi vào một bể có chứa sẵn 5 m^3 nước. Biết rằng sau 2 giờ kể từ khi vòi nước bắt đầu chảy người ta đo được lượng nước trong bể là 17 m^3. Hỏi sau bao nhiêu giờ kể từ khi vòi nước bắt đầu chảy thì lượng nước trong bể là 44 m^3 ?

A. 5 giờ **B.** 5,5 giờ

C. 6,5 giờ **D.** 6 giờ

Câu 6. Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xác suất để hai lần gieo có số chấm bằng nhau là

A. $\frac{5}{6}$ **B.** $\frac{1}{12}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{1}{6}$

Câu 7. Số giá trị nguyên của x để biểu thức $\sqrt{2026-2x+2\sqrt{2025-2x}}-\sqrt{1+2x}$ xác định là

A. 1012 **B.** 2026 **C.** 1013 **D.** 2025

Câu 8. Biết hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\sqrt{x-1}+\sqrt{x-y}=15 \\ \sqrt{x-1}-3\sqrt{x-y}=4 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất $(x_0;y_0)$. Ta có x_0+y_0 bằng

A. 99 **B.** 15 **C.** 8 **D.** 50

Câu 9. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\sqrt{16-x}+\sqrt{9+x}>5$ là

Được quét bằng CamScanner

A. 23 B. 27 C. 24 D. 26

Câu 10. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Trên đường thẳng a lấy 2 điểm phân biệt A_1, A_2; trên đường thẳng b lấy 4 điểm phân biệt B_1, B_2, B_3, B_4. Lấy ngẫu nhiên 3 điểm từ 6 điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, B_4$. Xác suất để chọn được 3 điểm là 3 đỉnh của một tam giác bằng

A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{7}{10}$ D. $\frac{3}{4}$

Câu 11. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+y=2m-3 \\ 2x+5y=13m+12 \end{cases}$ (m là tham số). Tích các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $x_0^2 + y_0 = 50$ bằng

A. 37 B. 21 C. -21 D. -37

Câu 12. Cho phương trình

$$2x^2 - (m-1)x + m - 11 = 0 \ (*).$$

Biết phương trình (*) có một nghiệm bằng 2, nghiệm còn lại của phương trình (*) là

A. $x = \frac{1}{3}$ B. $x = -3$ C. $x = \frac{-1}{3}$ D. $x = 3$

Câu 13. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 3$, $AC = 4$. Gọi r, R lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác ABC. Tỉ số $\frac{r}{R}$ bằng

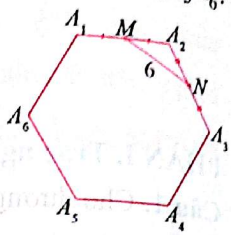
A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 14. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = x + m - 2$ (m là tham số). Nếu đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho hoành độ điểm A bằng -3 thì độ dài đoạn thẳng OB (O là gốc tọa độ) bằng

A. $3\sqrt{10}$ B. $5\sqrt{10}$

C. $2\sqrt{5}$ D. $4\sqrt{17}$

Câu 15. Cho hình lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm các cạnh A_1A_2, A_2A_3 và $MN = 6$. Độ dài cạnh của hình lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ bằng



A. $5\sqrt{3}$ B. $5\sqrt{2}$

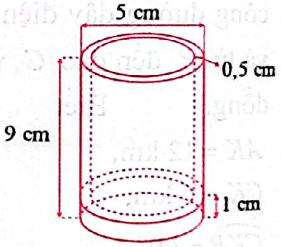
C. $4\sqrt{3}$ D. $\frac{13}{2}$

Câu 16. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số. Xác suất để chọn được số chia hết cho cả 4 và 6 là

A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{7}{90}$

C. $\frac{1}{10}$ D. $\frac{4}{45}$

Câu 17. Một cái cốc thủy tinh có dạng hình trụ có chiều cao 9 cm, miệng cốc có đường kính ngoài bằng 5 cm, thành cốc có độ dày 0,5 cm, đáy cốc có độ dày 1 cm (tham khảo hình vẽ). Hỏi cần bao nhiêu xăngtimét khối thủy tinh để làm cái cốc đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị, lấy $\pi = 3{,}14$)?



A. 58 cm^3 B. 76 cm^3

C. 75 cm^3 D. 81 cm^3

Câu 18. Một quả bóng đá làm bằng da có dạng hình cầu với đường kính 24 cm (hình vẽ). Công ty A cần sản xuất 100 quả bóng để đưa ra thị trường trong dịp hè năm 2025. Công ty A cần chuẩn bị tối thiểu bao nhiêu mét vuông da để sản xuất số quả bóng trên? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị, giả sử diện tích các phần mép nối bằng 0, lấy $\pi = 3{,}14$).



Được quét bằng CamScanner

A. $5\ \text{m}^2$ **B.** $45\ \text{m}^2$

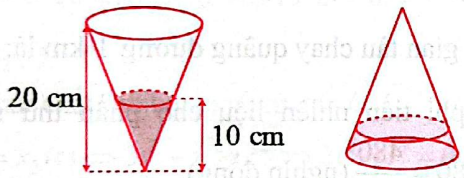
C. 18m^2 **D.** 181m^2

Câu 19. Có hai hộp đựng các tấm thẻ: hộp thứ nhất đựng 4 tấm thẻ ghi số từ 1 đến 4; hộp thứ hai đựng 6 tấm thẻ ghi số từ 1 đến 6. Chọn ngẫu nhiên mỗi hộp một tấm thẻ. Xác suất để tích hai số ghi trên 2 tấm thẻ được lấy ra bằng 12 là

A. $\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{3}{4}$

C. $\frac{2}{5}$ **D.** $\frac{1}{10}$

Câu 20. Một mô hình đồ chơi hình nón có chiều cao 20 cm, bên trong đựng một lượng chất lỏng. Nếu để mô hình hình nón có đáy ở phía trên và đỉnh ở phía dưới (H.1) thì phần chất lỏng có độ cao là 10 cm. Vậy nếu để mô hình hình nón có đáy ở phía dưới và đỉnh ở trên (H.2) thì phần chất lỏng trong mô hình có độ cao bằng bao nhiêu xăngtimét (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)?



Hình 1 Hình 2

A. 0,87 cm **B.** 1,07 cm.

C. 5,01 cm **D.** 2,78 cm

PHẦN II. Tự luận (14,0 *điểm*)

Câu 1. (5,0 *điểm*)

a) Rút gọn biểu thức

$$P=\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}\right):\frac{x-1}{x^2+x+1}$$

với $x\geq 0$ và $x\neq 1$.

b) Cho parabol $(P): y=2x^2$ và đường thẳng $d: y=2x+m-1$, với m là tham số. Tìm m để đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt đối xứng với nhau qua đường thẳng $2x+4y-2025=0$.

c) Giải phương trình

$$\sqrt{x^2-4}-\sqrt{4x^2+9x+2}=(15-3x)\sqrt{x+2}.$$

Câu 2. (4,0 *điểm*)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^3y+xy^3+2x^2y^2-8x-8y+16=0$.

b) Cho $P(x)$ là đa thức với các hệ số nguyên thỏa mãn: $P(a)=22$, $P(b)=23$, $P(c)=24$, $P(d)=25$ với $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, $a<b<c<d$ và $a+b+c+d=26$. Tính $P(7)$.

c) Tìm tất cả các số nguyên tố q sao cho tồn tại số nguyên dương n để n^2+136q là một lũy thừa với số mũ nguyên dương của 17.

Câu 3. (4,0 *điểm*) Cho tam giác ABC vuông tại A. Các điểm E, F thay đổi lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho $EF // BC$. Gọi D là giao điểm của BF và CE, H là hình chiếu vuông góc của D lên EF. Đường tròn (I) đường kính EF cắt BF tại M, cắt CE tại N (M khác F, N khác E).

a) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN đi qua điểm I.

b) Gọi K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của E, F lên BC và P, Q tương ứng là giao điểm của EM, FN với BC. Chứng minh $\frac{BP\cdot BL}{CQ\cdot CK}$ không đổi khi E, F thay đổi.

c) Chứng minh nếu EL và FK cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn (I) thì EM và FN cắt nhau tại một điểm thuộc đường thẳng BC.

Câu 4. (1,0 *điểm*) Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=2025abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2}+\frac{b}{3b^2+2c^2+a^2}+\frac{c}{3c^2+2a^2+b^2}.$$

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV Trường THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Giới thiệu

Được quét bằng CamScanner

THỬ SỨC TRƯỚC KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2026

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 1

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

1. A	2. C	3. C	4. B	5. C	6. C
7. B	8. D	9. D	10. A	11. D	12. B

Câu 1. Hình phẳng phần bôi đen trong hình được giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=2$, $x=1$ và $x=3$. Do đó diện tích hình phẳng bôi đen trong hình vẽ bằng $\int\limits_1^3 \left|2^x-2\right|\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 \left(2^x-2\right)\mathrm{d}x$. Chọn A.

Câu 2. Ta có: $\log_3 x<2 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<9 \end{cases}$.

Vậy $S=(0;9)$. Chọn C.

Câu 3. Phương trình đường thẳng d được viết lại:

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-2}=\frac{z+2}{-6}.$$

Suy ra một vectơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{u_3}=(-2;1;3)$. Chọn C.

Câu 4. Ta có $u_2=u_1.q \Leftrightarrow -6=2.q \Leftrightarrow q=-3$.

Chọn B.

Câu 6. Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu thuộc nhóm $[50;60)$ nên tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là: $Q_1=50+\dfrac{\frac{40}{4}-7}{12}(60-50)=52,5$.

Chọn C.

Câu 7. Chọn B, vì:

$$\log_2\left(2a^4\right)=\log_2 2+\log_2 a^4=1+4\log_2 a.$$

Câu 8. Ta có: $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$

$$\Rightarrow P(AB)=P(B\mid A).P(A)=\frac{1}{4}.\frac{2}{5}=\frac{1}{10}.$$

Do đó $P(A\mid B)=\dfrac{P(BA)}{P(B)}=\dfrac{1}{10}:\dfrac{1}{3}=\dfrac{3}{10}$. Chọn D.

Câu 9. Dựa vào đồ thị của hàm số, ta có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$. Chọn D.

Câu 10. $\int\left(e^x-\sin x\right)\mathrm{d}x=e^x-(-\cos x)+C$

$=e^x+\cos x+C$. Chọn A.

Câu 12. Độ dài của đường chéo từ A đến C' được tính bằng công thức:

$|\overrightarrow{AC'}|=\sqrt{|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+|\vec{w}|^2}=\sqrt{4^2+3^2+2^2}$

$=\sqrt{16+9+4}=\sqrt{29}$. Chọn B.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. a) Đúng, b) Sai, c) Đúng, d) Đúng.

a) Thời gian tàu chạy quãng đường 1 km là $\dfrac{1}{10}$ giờ.

Chi phí tiền nhiên liệu cho phần thứ nhất là:

$$\frac{1}{10}\cdot 480000=48000 \text{ (đồng)}.$$

b) Gọi x (km/h) là vận tốc của tàu, $x>0$.

Thời gian tàu chạy quãng đường 1 km là: $\dfrac{1}{x}$ giờ.

Chi phí tiền nhiên liệu cho phần thứ nhất là: $\dfrac{1}{x}\cdot 480=\dfrac{480}{x}$ (nghìn đồng).

Hàm chi phí cho phần thứ hai là $p=kx^3$ (nghìn đồng/giờ).

Khi $x=10 \Rightarrow p=30 \Rightarrow k=0,03$ nên $p=0,03x^3$ (nghìn đồng/giờ).

Do đó chi phí phần thứ hai để chạy 1 km là:

$$\frac{1}{x}\cdot 0,03x^3=0,03x^2 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Vậy hàm tổng chi phí là: $f(x)=\dfrac{480}{x}+0,03x^2$ (nghìn đồng).

c) Tổng chi phí nhiên liệu: $f(x)=\dfrac{480}{x}+0,03x^2$.

Thay $x=v=30$ km/h vào ta có công thức ta có:

$f(30)=\dfrac{480}{30}+0,03.30^2=43$ (nghìn đồng).

Được quét bằng CamScanner

d) $f(x)=\dfrac{480}{x}+0,03x^2=\dfrac{240}{x}+\dfrac{240}{x}+0,03x^2$

$\geq 3\sqrt[3]{1728}=36.$

Dấu "=" xảy ra khi $x=20$.

Câu 2. a) Đúng, b) Đúng, c) Sai, d) Sai.

Xác định phương trình vận tốc và tọa độ của hai chất điểm.

• Chất điểm thứ nhất:

Hàm vận tốc: $v_1(t)=6t-3t^2$ (m/s).

Tọa độ: $x_1(t)=\int v_1(t)dt=\int\left(6t-3t^2\right)dt$

$=3t^2-t^3+C.$

Khi $t=0$ có $x_1(t)=0$, suy ra $C=0$.

Vậy $x_1(t)=3t^2-t^3$.

• Chất điểm thứ hai:

Hàm vận tốc: $v_2(t)=2t$ (m/s).

Tọa độ: $x_2(t)=\int v_2(t)dt=\int 2tdt=t^2+C.$

Khi $t=0$ có $x_2(t)=0$, suy ra $C=0$.

Vậy $x_2(t)=t^2$.

• Khi hai chất điểm gặp nhau, ta có:

$x_1(t)=x_2(t)\Leftrightarrow 3t^2-t^3=t^2\Leftrightarrow 2t^2-t^3=0.$

Vì $t>0$ nên $t=2$ (thoả mãn).

• Khoảng cách lớn nhất giữa hai chất điểm:

$\Delta x=\left|x_1(t)-x_2(t)\right|=\left|2t^2-t^3\right|$ trên đoạn $[0;2]$.

Đạo hàm $f'(t)=4t-3t^2=0\Leftrightarrow t=\dfrac{4}{3}$ (vì $t=0$ là thời điểm hai chất điểm bắt đầu xuất phát).

• Khoảng cách giữa hai chất điểm tại thời điểm $t=\dfrac{4}{3}$ là:

$$\Delta\left(\frac{4}{3}\right)=\left|2.\left(\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^3\right|=\frac{32}{27}\text{ (m)}\neq 1\text{ (m)}.$$

• Tại thời điểm gặp nhau, vận tốc của hai chất điểm là: $v_1(2)=6.2-3.2^2=0$ (m/s);

$v_2(2)=2.2=4$ (m/s).

Câu 3. a) Đúng, b) Sai, c) Đúng, d) Đúng.

Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Oxy) và đi qua hai điểm $C(10;50;0)$ và $D(30;10;0)$ nên ta có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(P)}}\perp\vec{k}(0;0;1)$ và $\overrightarrow{n_{(P)}}\perp\overrightarrow{CD}=(20;-40;0)$, suy ra:

$\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\vec{k},\overrightarrow{CD}\right]=(40;20;0).$

Chọn một vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_1}=(2;1;0)$, ta có phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $C(10;50;0)$ là:

$2.(x-10)+1.(y-50)+0.(z-0)=0$

$\Leftrightarrow 2x+y-70=0.$

Đường thẳng AB vuông góc với mặt phẳng (P) nên vectơ chỉ phương của nó là $\overrightarrow{u_{AB}}=(2;1;0)$.

Phương trình đường thẳng AB là $\begin{cases}x=20+2t\\y=20+1t\\z=120\end{cases}$.

Tọa độ điểm giao hàng B là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (P) nên ta được:

$2.(20+2t)+20+t-70=0\Leftrightarrow t=2.$

Suy ra tọa độ điểm $B(24;22;120)$.

Ta có: $OA=\sqrt{20^2+20^2+120^2}=20\sqrt{38}$ (m).

$AB=\sqrt{(24-20)^2+(22-20)^2+(120-120)^2}$

$=2\sqrt{5}$ (m).

Quãng đường mà drone bay từ điểm xuất phát đến điểm giao hàng là:

$OA+AB=20\sqrt{38}+2\sqrt{5}\approx 128$ (m).

Câu 4. a) Đúng, b) Đúng, c) Đúng, d) Đúng.

Gọi L là biến cố: "Chip bị lỗi vật lý"; $\overline{L}$ là biến cố: "Chip không lỗi vật lý".

Ta có: $P(L)=0,04$ và $P(\overline{L})=0,96$.

Gọi B_1 là biến cố: "Bước 1 báo lỗi".

Được quét bằng CamScanner

Ta có $P(B_1 \mid L)=0,90$ và $P(B_1 \mid \overline{L})=0,05$.

Gọi B_2 là biến cố: "Bước 2 báo lỗi".

Ta có $P(B_2 \mid L)=1,00$ và $P(B_2 \mid \overline{L})=0,10$.

a) Xác suất báo lỗi tổng quát tại bước 1:
Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(B_1)=P(L).P(B_1 \mid L)+P(\overline{L}).P(B_1 \mid \overline{L})$$
$$=0,04.0,90+0,96.0,05=0,036+0,048=0,084.$$

b) Xác suất chip bị loại bỏ (thất thoát sản xuất):
Chip bị loại khi bị báo lỗi đồng thời ở bước 1 và bước 2. Vì bước 2 chỉ xét trên nhóm bước 1 báo lỗi nên ta có:

$$P(B_1 \cap B_2)=P(L \cap B_1 \cap B_2)+P(\overline{L} \cap B_1 \cap B_2).$$

Nhánh lỗi thật bị loại:

$$P(L \cap B_1 \cap B_2)=P(L).P(B_1 \cap B_2 \mid L)$$
$$=0,04.0,90.1,00=0,036.$$

Nhánh tốt bị báo lỗi nhầm cả hai bước:

$$P(\overline{L} \cap B_1 \cap B_2)=0,96.0,05.0,10=0,0048.$$

Vậy $P(B_1 \cap B_2)=0,036+0,0048=0,0408$.

c) Độ chính xác của quyết định loại bỏ: Xác suất một chip thực sự lỗi khi đã bị cả hai bước đều báo lỗi. Do đó ta có:

$$P(L \mid B_1 \cap B_2)=\frac{P(L \cap B_1 \cap B_2)}{P(B_1 \cap B_2)}=\frac{0,036}{0,0408}=\frac{15}{17}.$$

d) Xác suất kiểm tra sót lỗi (rủi ro khách hàng):
Chip xuất xưởng khi bước 1 báo tốt, ta tính:

$$P(L \mid \overline{B_1})=\frac{P(L \cap \overline{B_1})}{1-P(B_1)}=\frac{P(L).[1-P(B_1 \mid L)]}{1-P(B_1)}$$
$$=\frac{0,04.0,10}{1-0,084}=\frac{4}{916}=\frac{1}{229}.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. *Đáp số:* 96,5.

Gọi số tiền (triệu đồng) bác An đầu tư vào trái phiếu chính phủ, trái phiếu ngân hàng, trái phiếu doanh nghiệp lần lượt là $x; y; z$. Lợi nhuận sau một năm của bác An:

$$F=0,07x+0,08y+0,12z \text{ (triệu đồng).}$$

Hệ điều kiện ràng buộc:
$$\begin{cases} x;y;z \ge 0 \\ x+y+z=1200 \\ x \ge 3y \\ z \le 200 \end{cases} \quad (1).$$

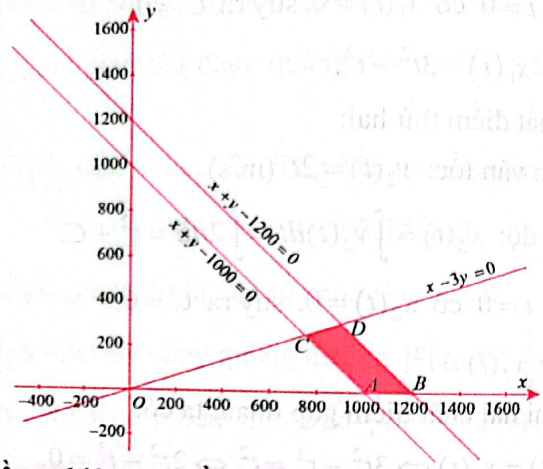
Biến đổi hệ điều kiện, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x;y;z \ge 0 \\ z=1200-x-y \\ x-3y \ge 0 \\ 0 \le 1200-x-y \le 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x;y \ge 0 \\ x-3y \ge 0 \\ x+y-1200 \le 0 \\ x+y-1000 \ge 0 \end{cases} (2).$$

Hàm lợi nhuận thu được là:

$$F=0,07x+0,08y+0,12(1200-x-y)$$
$$=144-0,05x-0,04y.$$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ (2):

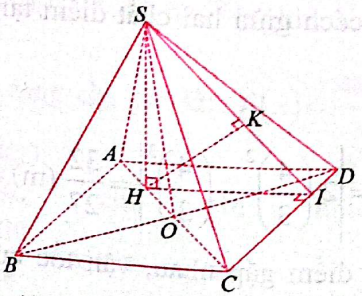


Miền nghiệm là miền tứ giác $ABDC$ với:
$A(1000;0), B(1200;0), C(750;250), D(900;300)$.

Thay tọa độ A, B, C, D lần lượt vào F ta được:
$F(A)=94; F(B)=84; F(C)=96,5; F(D)=87$.

Sau một năm, bác An có thể thu được lợi nhuận nhiều nhất là 96,5 triệu đồng.

Câu 2. *Đáp số:* 1,71.



Ta có $AB // (SCD)$, suy ra:

$$d(AB, SD)=d(AB, (SCD))=d(A, (SCD)).$$

Được quét bằng CamScanner

Gọi I là hình chiếu của H trên CD; K là hình chiếu của H trên SI.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp HI \\ CD \perp SH \ (\text{do } SH \perp (ABCD)) \end{cases}$

$\Rightarrow CD \perp (SHI) \Rightarrow CD \perp HK.$

Mà $SI \perp HK$ nên $HK \perp (SCD)$ suy ra:

$$d(H,(SCD)) = HK.$$

Vì $HI // AD$ (cùng vuông góc với CD) nên:

$$\frac{HI}{AD} = \frac{CH}{CA} = \frac{3}{4} \Rightarrow HI = \frac{3}{4}AD = 3;$$

$$AC = 4\sqrt{2};\ AH = \frac{1}{4}AC = \sqrt{2}.$$

Xét ΔSHA có: $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{2}.$

Xét ΔSHI có: $HK = \dfrac{HI \cdot SH}{\sqrt{SH^2 + HI^2}} = \dfrac{3\sqrt{22}}{11}.$

Ta có: $\dfrac{d(A,(SCD))}{d(H,(SCD))} = \dfrac{AC}{HC} = \dfrac{4}{3}$

$$\Rightarrow d(A,(SCD)) = \frac{4}{3} \cdot d(H,(SCD))$$

$$= \frac{4}{3}HK = \frac{4\sqrt{22}}{11}.$$

Vậy $d(AB,SD) = d(A,(SCD)) = \dfrac{4\sqrt{22}}{11} \approx 1,71.$

Câu 3. *Đáp số*: 45.

Giá trị lớn nhất là 75 không được là giá trị ngoại lai, nên ranh giới trên phải lớn hơn hoặc bằng 75.

Ta có: $Q_3 + 1,5\Delta Q \geq 75$

$$\Leftrightarrow Q_3 + 1,5.20 \geq 75 \Leftrightarrow Q_3 \geq 45.$$

Giá trị nhỏ nhất là 10 không được là giá trị ngoại lai, nên ranh giới dưới phải nhỏ hơn hoặc bằng 10.

Ta có: $Q_1 - 1,5\Delta Q \leq 10$

$$\Leftrightarrow Q_3 - 20 - 1,5.20 \leq 10 \Leftrightarrow Q_3 \leq 60.$$

Suy ra $45 \leq Q_3 \leq 60.$

Vậy giá trị nhỏ nhất có thể có của Q_3 là 45.

Câu 4. *Đáp số*: 4160.

Vì $P(t)$ là một nguyên hàm của $P'(t)$, ta có:

$$P(t) = \int P'(t)dt = \int 120\sqrt{t}dt = 120\int t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$= 120.\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}} + C = 80t\sqrt{t} + C.$$

Tại thời điểm ban đầu quần thể có 2000 cá thể, tức là khi $t = 0 \Rightarrow P(0) = C = 2000.$

Vậy $P(t) = 80t\sqrt{t} + 2000.$

Số lượng cá thể sau 9 ngày là:

$$P(9) = 80.9.3 + 2000 = 4160 \text{ (cá thể)}.$$

Câu 5. *Đáp số*: 154.

4	8	12	16	20	24
3	6	9	12	15	18
2	4	6	8	10	12
1	2	3	4	5	6

* Tổng số hình chữ nhật trong lưới 4×6

Một hình chữ nhật được tạo bởi 2 đường kẻ ngang (trong số 5 đường kẻ ngang) và 2 đường kẻ dọc (trong số 7 đường).

Số cách chọn 2 đường kẻ ngang: $C_5^2 = 10.$

Số cách chọn 2 đường kẻ dọc: $C_7^2 = 21.$

Số hình chữ nhật: $10.21 = 210.$

* Các ô (i,j) thỏa mãn $x = i.j$ là số chính phương gồm 6 ô sau:

$$(1,1);\ (1,4);(2,2);(3,3);(4,1);(4,4).$$

* Đếm số hình chữ nhật không chứa ô mang số chính phương nào

Ta đếm theo chiều cao h của các hình chữ nhật:

• Với $h = 1$: có 32 hình; • Với $h = 2$: có 15 hình;

• Với $h = 3$: có 6 hình; • Với $h = 4$: có 3 hình.

Vậy có 32 + 15 + 6 + 3 = 56 hình chữ nhật không chứa ô có số chính phương.

Được quét bằng CamScanner

Vậy số "Hình chữ nhật may mắn" là:

$$N = 210 - 56 = 154 \text{ (hình).}$$

Câu 6. *Đáp số*: 0,36.

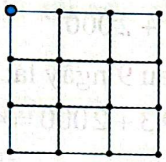
***Bước 1*:** Tổng số cách chọn 3 điểm.

Có 16 điểm $\Rightarrow$ số cách chọn 3 điểm bất kỳ là:

$$C_{16}^3 = 560.$$

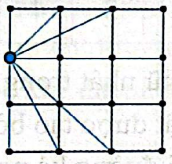
***Bước 2*:** Ta sẽ đếm số *tam giác vuông theo từng đỉnh góc vuông A* (đỉnh A là điểm màu hồng, hai cạnh góc vuông màu hồng). Xét các trường hợp

TH1: Đỉnh A ở điểm góc (có 4 điểm góc)



Mỗi điểm góc có 2 hướng vuông góc (ngang và dọc). Mỗi hướng có 3 điểm $\Rightarrow$ số tam giác vuông tại 1 điểm góc: $3 \times 3 = 9$. Có 4 điểm góc nên có $4 \times 9 = 36$ (tam giác vuông).

TH2: Đỉnh A ở điểm cạnh, không phải góc (có 8 điểm cạnh). Chẳng hạn A như điểm ở hình dưới:



Mỗi điểm này có:

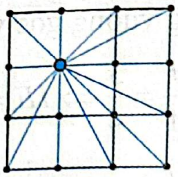
+ Theo hướng ngang: 3 điểm; theo hướng dọc: 3 điểm. Vậy có: $3 \times 3 = 9$ (tam giác vuông).

+ Theo hướng chéo có: 3 (tam giác vuông).

Do đó mỗi điểm này có: $9 + 3 = 12$ (tam giác vuông).

Có tất cả 8 điểm cạnh, vậy có: $8.12 = 96$ (tam giác vuông).

TH3: Đỉnh A ở điểm giữa (có 4 điểm giữa). Chẳng hạn A như điểm đánh dấu ở hình dưới:



Mỗi điểm này có:

+ Theo hướng ngang: 3 điểm; theo hướng dọc: 3 điểm. Vậy có: $3 \times 3 = 9$ (tam giác vuông).

+ Theo hướng chéo có: 8 (tam giác vuông).

Do đó mỗi điểm này có: $9 + 8 = 17$ (tam giác vuông).

Có tất cả 4 điểm giữa, vậy có: $4.17 = 68$ (tam giác vuông).

Vậy số các tam giác vuông là: $36 + 96 + 68 = 200$, và do đó xác xuất cần tính là

$$\frac{200}{560} = \frac{5}{14} \approx 0,36.$$

NGHIÊM XUÂN LỰC
(GV THPT Thăng Long, Hà Nội)

****

SAI LẦM . . .

(Tiếp theo trang 47)

Khi đó:

$$t + \frac{1}{t^2} = 2 \Leftrightarrow t^3 - 2t^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2 - t - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ t = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

$t = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ nên bị loại.

• Với $t = 1$, ta có:

$$x - \sqrt{x^2-1} = 1 \Rightarrow x + \sqrt{x^2-1} = 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1.$$

• Với $t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, ta có:

$$x - \sqrt{x^2-1} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x + \sqrt{x^2-1} = \frac{2}{7+3\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{7+3\sqrt{5}} \Rightarrow x = \frac{(7+3\sqrt{5})^2+4}{4(7+3\sqrt{5})} = \frac{7}{2}.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{1; \dfrac{7}{2}\right\}$.

Theo bạn lời giải trên đã đúng chưa?

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên, Hưng Yên)

Được quét bằng CamScanner

THỬ SỨC TRƯỚC KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2026

ĐỀ SỐ 2

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1=-3$ và công bội $q=2$. Tìm số hạng thứ 5?

A. $u_5=5$. **B.** $u_5=-96$.

C. $u_5=-30$. **D.** $u_5=-48$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;1)$ **B.** $(-3;0)$

C. $(-1;+\infty)$ **D.** $(-3;3)$

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P): $3x-2y+z-4=0$ có một vectơ pháp tuyến là:

A. $\vec{n}(-3;2;-1)$ **B.** $\vec{n}(3;-2;-4)$

C. $\vec{n}(3;-2;0)$ **D.** $\vec{n}(3;2;1)$

Câu 4. Nghiệm của phương trình $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ là

A. $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{-\pi}{3}+l2\pi\end{array}\right.(k,l\in\mathbb{Z})$ **B.** $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{2\pi}{3}+l2\pi\end{array}\right.(k,l\in\mathbb{Z})$

C. $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+l2\pi\end{array}\right.(k,l\in\mathbb{Z})$ **D.** $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\\ x=\dfrac{2\pi}{3}+l\pi\end{array}\right.(k,l\in\mathbb{Z})$

Câu 5. Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-2}{x+1}$ lần lượt là:

A. $x=3, y=-1$ **B.** $y=-1,\ x=3$

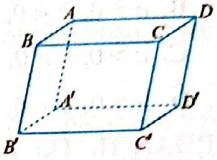
C. $x=1, y=3$ **D.** $x=-1, y=3$

Câu 6. Nghiệm của phương trình $3^{x+1}=81$ là

A. $x=3$ **B.** $x=4$

C. $x=5$ **D.** $x=2$

Câu 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{BD}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{AC'}$.

D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{CA}$.

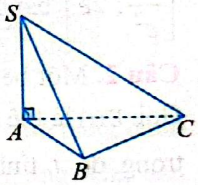
Câu 8. Cho $\displaystyle\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=-3$ và $\displaystyle\int_{-1}^{2}g(x)\mathrm{d}x=2$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\displaystyle\int_{-1}^{2}[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=5$ **B.** $\displaystyle\int_{-2}^{2}[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=5$

C. $\displaystyle\int_{-2}^{2}[2f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=8$ **D.** $\displaystyle\int_{-1}^{2}[3f(x)-4g(x)]\mathrm{d}x=-17$

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$ (hình vẽ). Hình chiếu của SB lên mặt phẳng (ABC) là:



A. BC **B.** AC

C. AB **D.** SC

Câu 10. Khảo sát thời gian (đơn vị: phút) học tập môn Toán của các học sinh ở một trường THPT thu được số liệu trong bảng tần số ghép nhóm sau:

Nhóm	[0;20)	[20;40)	[40;60)	[60;80)	[80;100)
Tần số	7	8	12	10	8

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này là:

A. $M_e=50$ **B.** $M_e=40$

C. $M_e=52,5$ **D.** $M_e=32,5$

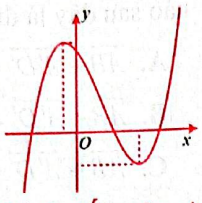
Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $a^3\sqrt{6}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$

Được quét bằng CamScanner

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ D. $a^3\sqrt{3}$

Câu 12. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng về dấu của a, b, c, d?



A. $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$

B. $a>0,\ b<0,\ c>0,\ d>0$

C. $a>0,\ b>0,\ c<0,\ d>0$

D. $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=x^2\ln x$.

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là
$$f'(x)=2x\ln x+x.$$

c) Hàm số có hai điểm cực trị.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{e^2};2e\right]$ bằng $\frac{-1}{2e}$.

Câu 2. Một bể chứa dầu ban đầu có 50 000 lít dầu. Gọi $V(t)$ là thể tích dầu (lít) trong bể tại thời điểm t, trong đó t tính theo giờ $(0\le t\le 24)$. Trong quá trình bơm dầu vào bể, thể tích dầu tăng theo tốc độ được biểu diễn bởi hàm số $V'(t)=k.\sqrt{t}$, với k là hằng số dương. Sau 4 giờ bơm liên tục, thể tích dầu trong bể đạt 58 000 lít.

a) Hàm số $V(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(t)=k.\sqrt{t}$.

b) Hàm số $V(t)=\frac{2k}{3}.t\sqrt{t}+C$ với $0\le t\le 24$ và k, C là các hằng số.

c) Sau 16 giờ bơm liên tục, thể tích dầu trong bể đạt được 148 000 lít.

d) Trong quá trình bơm dầu, nếu sau mỗi giờ lượng dầu bị rò rỉ đều đặn với tốc độ 500 lít/giờ, thì tại thời điểm t bằng 9 giờ, thể tích dầu trong bể là 72 500 lít.

Câu 3. Tại một trường THPT, người ta khảo sát ngẫu nhiên 1000 học sinh về việc sử dụng các công cụ trí tuệ nhân tạo (AI) để hỗ trợ học tập. Kết quả cho thấy có 600 học sinh trả lời "thường xuyên sử dụng" và 400 học sinh trả lời "không thường xuyên sử dụng". Thực tế cho thấy tỉ lệ học sinh "đạt kết quả học tập loại giỏi" tương ứng với nhóm thường xuyên sử dụng AI và nhóm không thường xuyên sử dụng AI lần lượt là 40% và 20%.

Gọi A là biến cố: "Học sinh được chọn thường xuyên sử dụng AI".

Gọi B là biến cố: "Học sinh được chọn đạt kết quả học tập loại giỏi".

a) Xác suất học sinh thường xuyên sử dụng AI là $P(A)=0,6$ và xác suất học sinh không thường xuyên sử dụng AI là $P(\overline{A})=0,4$.

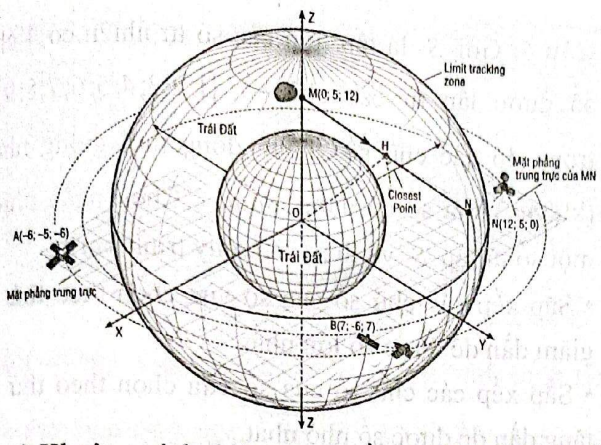
b) Xác suất có điều kiện để một học sinh đạt loại giỏi khi biết học sinh đó thường xuyên sử dụng AI là $P(B\mid A)=0,4$ và xác suất học sinh đạt loại giỏi khi biết học sinh đó không thường xuyên sử dụng AI là $P(B\mid \overline{A})=0,2$.

c) Xác suất để một học sinh được chọn ngẫu nhiên đạt kết quả học tập loại giỏi là $P(B)=0,32$.

d) Trong số những học sinh đạt kết quả học tập loại giỏi, có đúng 75% học sinh là những người thường xuyên sử dụng AI (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*).

Câu 4. Các thiên thạch có đường kính lớn hơn 140 m và có thể lại gần Trái Đất ở khoảng cách nhỏ hơn 7 500 000 km được coi là những vật thể có khả năng va chạm gây nguy hiểm cho Trái Đất. Để theo dõi những thiên thạch này, các nhà nghiên cứu của Trung tâm Vũ trụ Nasa đã thiết lập các trạm quan sát các vật thể bay gần Trái Đất. Giả sử có một hệ thống có khả năng theo dõi các vật thể ở độ cao không quá 4 600 km so với mực nước biển. Coi Trái Đất là khối cầu có bán kính 6 400 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O là tâm Trái đất và đơn vị độ dài mỗi trục là 1000 km. Một thiên thạch (xem như một hạt) chuyển động với vận tốc $v_1=2\sqrt{2}.10^3$ (km/h) không đổi theo đường thẳng xuất phát từ điểm $M(0;5;12)$ đến $N(12;5;0)$.

Được quét bằng CamScanner



a) Khoảng cách thiên thạch gần với Trái Đất nhất có độ dài bằng 3449 km (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*).

b) Các nhà nghiên cứu của Trung tâm Vũ trụ Nasa đưa ra giả thiết nếu lúc thiên thạch đang ở vị trí M bất ngờ đổi hướng và lao xuống Trái Đất với phương thẳng thì quãng đường dài nhất nó có thể va chạm với Trái Đất là 14490 km (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*).

c) Tại thời điểm thiên thạch đang ở vị trí M thì có 2 vệ tinh đang ở vị trí $A(-6;-5;-6)$, $B(7;-6;7)$ có vận tốc khác nhau di chuyển trong mặt phẳng trung trực của MN và luôn cách Trái Đất với khoảng cách cố định. Khoảng cách xa nhất của 2 vệ tinh có thể đạt được là 18412 km (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*).

d) Nếu vệ tinh A đi với vận tốc $v_2 = \dfrac{\pi\sqrt{97}}{3}.10^3$ (km/h) thì sẽ va chạm với thiên thạch.

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Một đội kỹ thuật đang triển khai hệ thống khảo sát tại khu vực địa hình có nhiễm phóng xạ. Để duy trì kết nối giữa trạm chỉ huy $A(-1;0;0)$ và robot tự hành $B(2;3;4)$, người ta cần đặt hai thiết bị tiếp sóng nhỏ tại các điểm M và N để truyền tín hiệu trung gian.

Khu vực cho phép đặt thiết bị tiếp sóng phải nằm trong vùng giao thoa tín hiệu giữa hai trạm phát sóng vệ tinh, mỗi trạm phát tín hiệu theo dạng cầu:

• Trạm 1 phủ vùng tín hiệu theo mặt cầu:

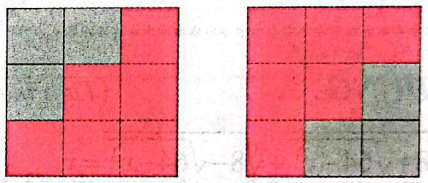
$$(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4.$$

• Trạm 2 phủ vùng tín hiệu theo mặt cầu:

$$x^2+y^2+z^2+2y-2=0.$$

Hai thiết bị tiếp sóng M, N phải được đặt trong mặt phẳng chứa giao tuyến của hai vùng phủ sóng này để đảm bảo tín hiệu mạnh nhất. Để tối ưu hóa chi phí và thiết bị, khoảng cách giữa hai điểm tiếp sóng $MN=1$ đơn vị độ dài. Khi đó tổng quãng đường truyền tín hiệu $AM+BN$ nhỏ nhất bằng bao nhiêu đơn vị độ dài?

Câu 2. Một bảng ô vuông 3×3 được chia thành 9 ô vuông. Mỗi ô vuông được tô một màu xám hoặc hồng. Có bao nhiêu cách tô màu cho bảng ô vuông này sao cho khi quay bảng ô vuông một góc bằng $180°$ theo chiều kim đồng hồ quanh tâm của nó thì mọi ô vuông được tô màu xám sẽ ở vị trí trước đây của ô vuông được tô màu hồng? (Dưới đây là một hình minh hoạ cho một cách tô màu như vậy).



Câu 3. Một công ty X sản xuất máy tính bảng dành cho học sinh bán được x máy mỗi tháng. Giá bán của mỗi máy tính bảng được cho bởi công thức $p(x)=8600-10x$ (nghìn đồng). Chi phí để sản xuất mỗi máy tính bảng là $c(x)=x^2-4x+500+\dfrac{1000}{x}$ (nghìn đồng). Hỏi công ty X sẽ bán bao nhiêu máy tính bảng mỗi tháng để đạt được lợi nhuận cao nhất?

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a$, $AD=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB, SD. Biết thể tích hình chóp bằng $\dfrac{a^3}{2}$. Số đo góc phẳng nhị diện $[M,AC,N]$ bằng bao nhiêu độ? (*kết quả được là tròn đến hàng đơn vị*).

Được quét bằng CamScanner

Câu 5. Một quả bóng bầu dục theo quy định được sử dụng trong giải bầu dục quốc gia có kích thước 28 cm từ đầu này đến đầu kia và đường kính 17 cm ở phần dày nhất (quy định được phép thay đổi một chút về các kích thước này) (*Theo nguồn: NFL*).



Hình dạng của một quả bóng bầu dục có kích thước nói trên có thể được tạo thành khi quay phần diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$, trục hoành và các đường thẳng $x=-4$; $x=24$, trong đó x tính bằng centimét. Thể tích (đơn vị: cm^3, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) của quả bóng bầu dục có kích thước nói trên bằng bao nhiêu?

Câu 6. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số được lập từ các chữ số $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, trong đó các chữ số không đồng thời giống nhau (không chứa số có dạng $\overline{aaaa}$). Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S và thực hiện quy trình sau:

- Sắp xếp các chữ số của số vừa chọn theo thứ tự giảm dần để được số lớn nhất.
- Sắp xếp các chữ số của số vừa chọn theo thứ tự tăng dần để được số nhỏ nhất.
- Lấy số lớn nhất trừ đi số nhỏ nhất để thu được một hiệu số.

Biết xác suất để hiệu số thu được là một số đối xứng có 4 chữ số (số đối xứng có dạng $\overline{abba}$ với $a\neq 0$) là T. Tính giá trị của $\dfrac{1}{T}$.

LƯƠNG MẠNH QUYỀN
(GV THPT chuyên Nguyễn Chí Thanh, Lâm Đồng)

****

SỬ DỤNG . . .

(*Tiếp theo trang 3*)

4. $\sqrt[3]{8+\sqrt{64-x^3}}+\sqrt[3]{8-\sqrt{64-x^3}}=x.$

5. $\sqrt[3]{2+\sqrt{4+\left(\dfrac{17x}{12}\right)^3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{4-\left(\dfrac{17x}{12}\right)^3}}=x.$

6. $\sqrt[3]{\sqrt{x^2-1}+x}-\sqrt[3]{\sqrt{x^2-1}-x}=x.$

7. $\sqrt[3]{\sqrt{x^2-1}+x}-\sqrt[3]{\sqrt{x^2-1}-x}=\dfrac{3}{x}.$

8. $\sqrt[3]{\sqrt{5x-x^3}+\sqrt{5x}}+\sqrt[3]{\sqrt{5x-x^3}-\sqrt{5x}}=1.$

9. $\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}+x}-\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}-x}=\sqrt{x^2+1}.$

10. $\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}+x}-\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}-x}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2}.$

11. $\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}+x}-\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}-x}=\dfrac{3}{\sqrt{x^2+1}}.$

12. $\sqrt[3]{\sqrt{5x^2-1}+\sqrt{5x}}+\sqrt[3]{\sqrt{5x^2-1}-\sqrt{5x}}=x.$

13. $\sqrt{2x^4-4x^2+3x}+\sqrt{x^4-x+1}=(x-1)^2.$

14. $\sqrt{\dfrac{2}{3}x^2+2x+\dfrac{5}{3}}=x.\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{3}}+1.$

15. $\sqrt{4-2x+\dfrac{3}{x^3}}=x.\sqrt[3]{2x-\dfrac{2}{x^3}}+1.$

16. $\sqrt{x^2+3x+2}=x.\sqrt[3]{3x^2+x+7}+1.$

17. $\sqrt{x^4-x^3+4}=(x^2-1)\sqrt{x^3-3}+1.$

18. $\dfrac{1+(x^2-1)\sqrt{x^3-4x^2+9}}{\sqrt{x^4-x^3+4x^2-8}}=1.$

19. $\dfrac{1+(x^2-1)\sqrt{x^3+3x^2+\dfrac{1}{8}}}{\sqrt{x^4-x^3-3x^2+\dfrac{7}{8}}}=1.$

20. $\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}}{\sqrt{(x^2-7)^2+5}}=1.$

Được quét bằng CamScanner



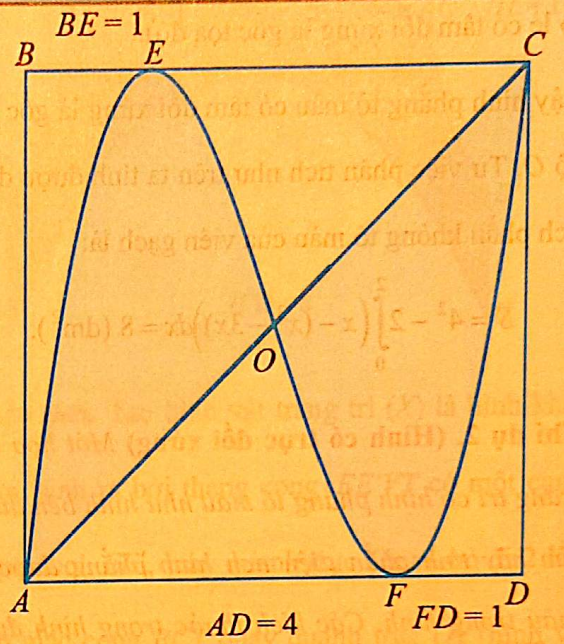
SỬ DỤNG KIẾN THỨC BIẾN HÌNH ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

ĐINH NGUYỄN ĐÔNG TRIỀU
(GV THPT Nguyễn Du, TP. Hồ Chí Minh)

Một số bài toán ứng dụng tích phân tính diện tích và thể tích cho học sinh lớp 12 trong sách giáo khoa Toán 12 bộ *Kết nối tri thức với cuộc sống*, cần học sinh nắm vững các kiến thức về phép biến hình. Việc này chúng ta sẽ thấy rõ ràng qua sự phân tích của tác giả như sau. Khi tính toán các diện tích họa tiết, hoa văn hoặc thể tích hình khối, học sinh cần đưa ra được nhận xét về cách tạo hình của chúng, cụ thể như: hình cần tính có trục đối xứng hay không? có tâm đối xứng hay không? hình cần tính có phải là hình tạo ra từ phép tịnh tuyến hay không? Hình cần tính tạo ra từ phép quay của bao nhiêu hình?... Như vậy, ta thấy phụ thuộc vào hình đề bài cho học sinh cần phải có nhận xét trước để đưa ra định hướng tính toán.

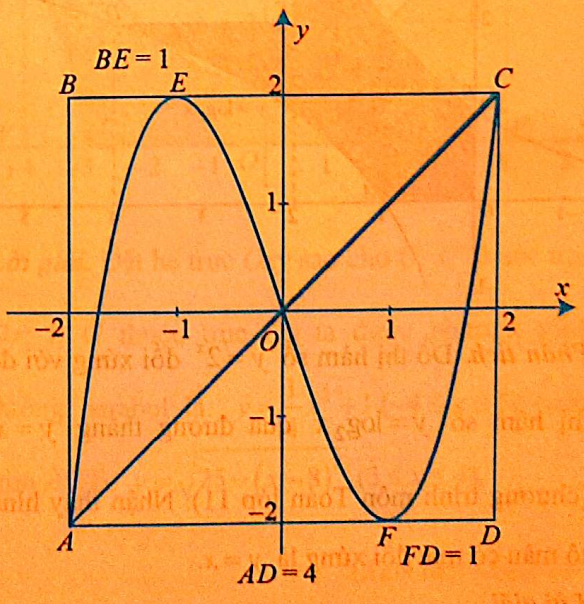
Trong bài giới thiệu này, tác giả đưa ra một số bài toán để làm sáng tỏ khẳng định trên.

Thí dụ 1. (Hình có tâm đối xứng) *Một viên gạch hình vuông có hoa văn hình cánh bướm được mô tả như sau: Hình cánh bướm tạo thành từ đường cong của hàm số bậc ba và đường chéo AC. Biết E, F là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba. Các kích thước trong hình lấy đơn vị đêximét. Tính diện tích phần không tô màu của viên gạch.*



Phân tích. Dự đoán hình phẳng tô màu cần tính có tâm đối xứng là O.

Lời giải. Đặt hệ trục Oxy vào hình phẳng viên gạch sao cho gốc tọa độ O trùng tâm O của viên gạch như hình vẽ.



Được quét bằng CamScanner

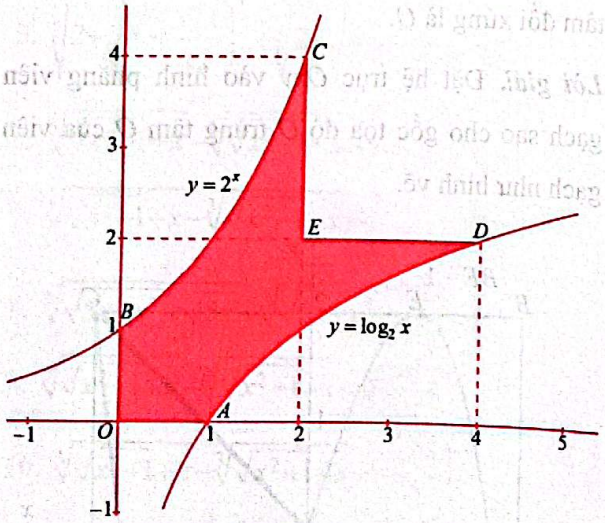
Ta được phương trình đồ thị hàm số bậc ba là là: $y = x^3 - 3x$ $(-2 \le x \le 2)$ (đồ thị hàm số lẻ có tâm đối xứng là gốc tọa độ).

Phương trình đường chéo AC là $y = x$ (đồ thị hàm số lẻ có tâm đối xứng là gốc tọa độ).

Vậy hình phẳng tô màu có tâm đối xứng là gốc toạ độ O. Từ việc phân tích như trên ta tính được diện tích phần không tô màu của viên gạch là:

$$S = 4^2 - 2\int_0^2 \left(x - (x^3 - 3x)\right)dx = 8 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

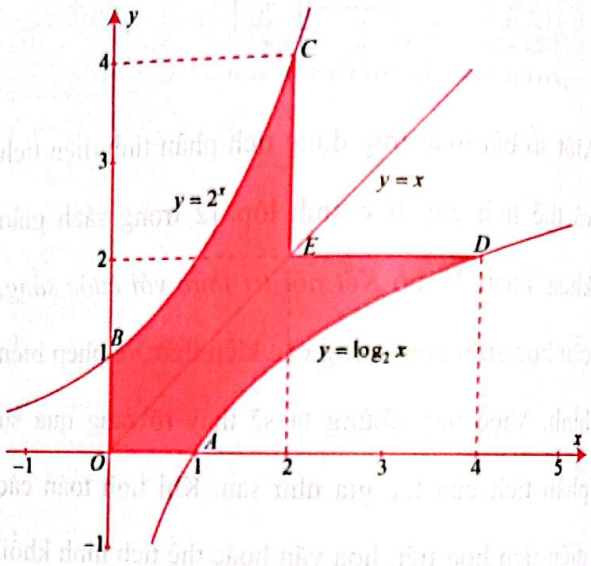
Thí dụ 2. (Hình có trục đối xứng) *Một họa tiết trang trí có hình phẳng tô màu như hình bên dưới. Em hãy tính phần diện tích hình phẳng được tô màu trong hình. Các kích thước trong hình được tính bằng đơn vị đêximét.*



Phân tích. Đồ thị hàm số $y = 2^x$ đối xứng với đồ thị hàm số $y = \log_2 x$ qua đường thẳng $y = x$ (chương trình môn Toán lớp 11). Nhận thấy hình tô màu có trục đối xứng là $y = x$.

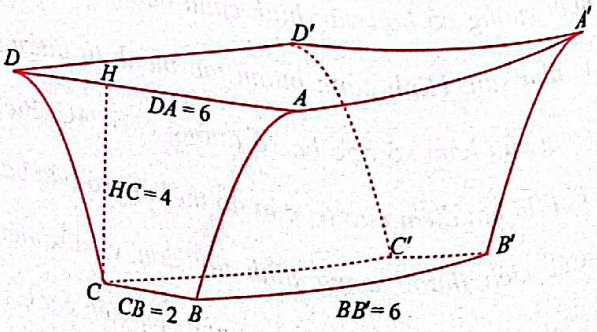
Lời giải.

Diện tích hình phẳng cần tính bằng hai lần diện tích được giới hạn bởi 4 đường sau: $y = 2^x$, $y = x$, $x = 0$, $x = 2$. Vậy ta được:



$$V = 2\int_0^2 \left(2^x - x\right)dx \approx 4{,}66 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

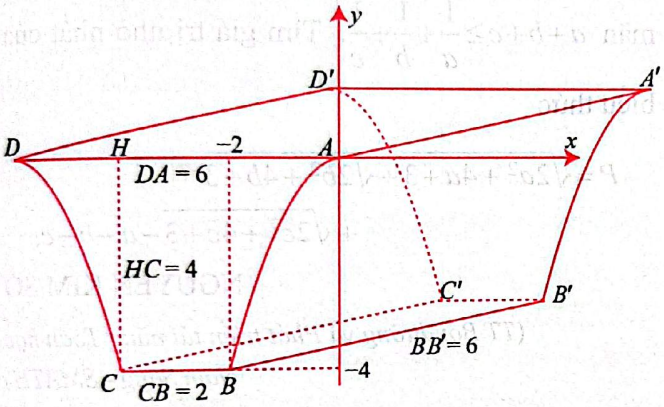
Thí dụ 3. (Một khối hình được sinh ra bởi hình thang cong tịnh tiến theo một vectơ vuông góc với mặt phẳng chứa hình thang cong) *Một hồ chứa nước có hình dáng được mô tả như sau: Mặt phẳng (ABCD) vuông góc với mặt đáy. Hai đường cong AB, CD là hai đường parabol có đỉnh lần lượt tại A, D; hai cạnh AD và BC song song với nhau. Các kích thước trong hình được tính bằng đơn vị mét. Hãy tính dung tích của hồ chứa nước.*



Được quét bằng CamScanner

Phân tích. Tạo hình của hồ nước là hình lăng trụ có đáy là hình thang cong $ABCD$ tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$, vectơ $\overrightarrow{AA'}$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

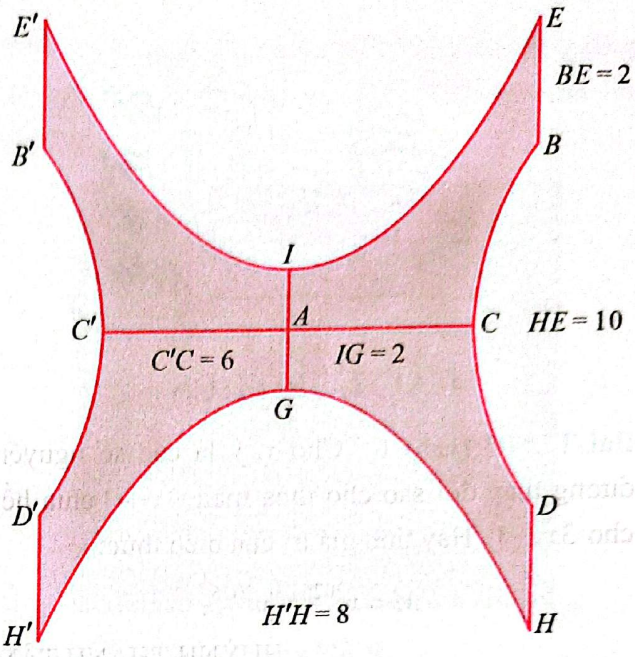
Lời giải. Đặt hệ trục Oxy vào mặt phẳng $(ABCD)$, sao cho gốc tọa độ O trùng với điểm A (như hình vẽ) ta được phương trình đường cong parabol chứa đường cong AB là $y=-x^2$.



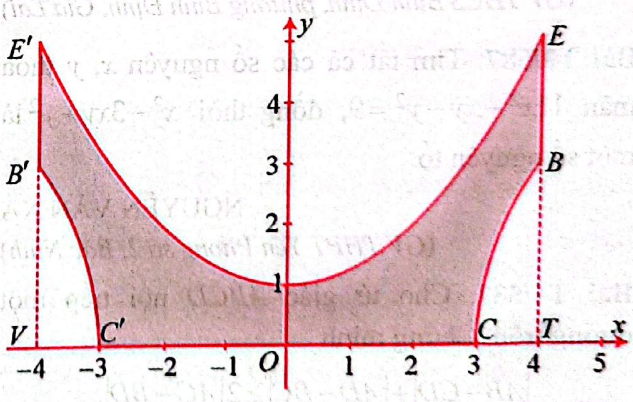
Vậy ta được dung tích của hồ chứa nước là:

$$V=6\left(2\int_{-2}^{0}\left(0-(-x^2)\right)dx+2.4\right)=80\ (\text{m}^3).$$

Thí dụ 4. (Một hình khối được sinh ra bởi các hình thang cong, tam giác cong quay quanh một trục) *Một vật trang trí (X), được mô tả như sau: hình dạng khối tròn xoay quanh trục CC' có chiều cao $HE=10$ dm, chiều ngang $H'H=8$ dm. Khi cắt vật (X) bởi mặt phẳng chứa trục IG thì mặt cắt thu được như phần tô đậm trong hình vẽ. Phần bên trong là đường parabol, bên ngoài là 2 cung tròn. Các kích thước có trong hình được tính bằng đơn vị đêximét. Tính thể tích vật trang trí (X).*



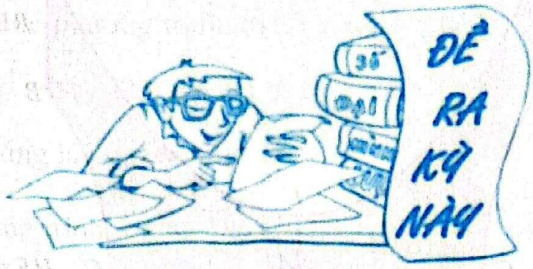
Phân tích. Tạo hình vật trang trí (X) là hình khối được sinh ra bởi thang cong $EE'VT$ có một cạnh là parabol EE', quay quanh trục Ox và bỏ đi 2 lần tam giác cong BCT quay quanh trục Ox (hình vẽ sau).



Lời giải. Đặt hệ trục Oxy sao cho C, C' thuộc trục Ox; I, G thuộc trục Oy ta được phương trình đường parabol là: $y=\frac{1}{4}x^2+1\ (-4\le x\le 4)$, cung tròn BC là: $y=\sqrt{25-(x-8)^2}\ (3\le x\le 4)$.

(Xem tiếp trang 24)

Được quét bằng CamScanner



CÁC LỚP THCS

Bài T1/587 (Lớp 6). Cho x, y là các số nguyên dương thay đổi sao cho thỏa mãn $3x^2-1$ chia hết cho $3xy-1$. Hãy tính giá trị của biểu thức:

$$M=x^{2026}-y^{2026}.$$

HUỲNH THANH TÂM

(CB Bưu điện phường Bình Định, Gia Lai)

Bài T2/587 (Lớp 7). Cho x, y, z là các số thực thay đổi thỏa mãn $|x+y+z|\le 1$, $\left|\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+z\right|\le 1$ và $|z|\le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của tổng

$$S=|x|+|y|+|z|.$$

NGUYỄN TẤN NGỌC

(GV THCS Bình Định, phường Bình Định, Gia Lai)

Bài T3/587. Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $11x^2-xy-y^2=9$, đồng thời $x^2-3xy+y^2$ là một số nguyên tố.

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Bài T4/587. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn. Chứng minh

$$|AB-CD|+|AD-BC|\ge 2|AC-BD|.$$

HOÀNG VIỆT DŨNG

(GV THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, Nghệ An)

Bài T5/587. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=\sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{2}{3x^2+2(y^2+yz+z^2)}$.

PHAN CHIẾN THẮNG

(GV Trường Trưng Vương, Đông Hà, Quảng Trị)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/587. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn:

$$\begin{cases}u_1=12\\ u_{n+1}+2n^2+6n+3=3u_n,\ n=1,2,...\end{cases}$$

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho u_n là số chính phương.

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG

(GV THPT Mỹ Đình, Hà Nội)

Bài T7/587. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{2a^2+4a+3}+\sqrt{2b^2+4b+3}+\sqrt{2c^2+4c+3}-a-b-c.$$

NGUYỄN KIM SÓ

(TT Bồi dưỡng và Phát triển tài năng Toán học Nam Sáng - SMATH)

Bài T8/587. Cho tam giác ABC có $AB=\sqrt{3}$, $\widehat{CAB}=48^0$, $\widehat{CBA}=12^0$. Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $CM=1$. Tính góc $\widehat{MCB}$.

PHAN VĂN ĐỨC NHẬT

(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

Bài T9/587. Đa thức

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$$

có n nghiệm thực (không nhất thiết phân biệt) thuộc đoạn [0; 1]. Chứng minh rằng

$$3a_1^2+2a_1-8a_2\le 1.$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC

Bài T10/587. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$, $Q(x)$ với hệ số nguyên thỏa mãn:

$$P(x)Q(2025x+2026)=(2025Q(x)+2026)x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT chuyên Chu Văn An, Gia Lai)

Được quét bằng CamScanner

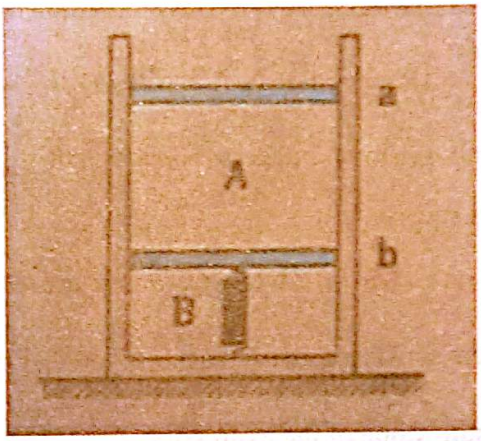
Bài T11/587. Cho c là một số thực. Dãy số $a_1, a_2, a_3, \ldots$ được xác định bởi $a_1 = c$ và $a_n = 2a_{n-1}^2 - 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Tìm tất cả các giá trị của c sao cho $a_n < 0$ với mọi $n \geq 1$.

NGUYỄN ĐỨC TƯỜNG
(*Pleiku*)

Bài T12/587. Cho hình chữ nhật $ABCD$, G là điểm thuộc đoạn CD sao cho $AG \perp BD$. Hai điểm E, H lần lượt thuộc AD, AB sao cho EH song song với BD, F là hình chiếu vuông góc của A trên DH, EF cắt BD tại điểm L; K là giao điểm của AG và EH. Chứng minh LG là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KEF.

NGUYỄN NGỌC TÚ
(*GV THPT chuyên Hà Giang*)

Bài L1/587. Như hình vẽ, hai pít-tông a và b cùng có khối lượng 1 kg, chiều dày không đáng kể trong một xi lanh có chiều cao 45 cm và tiết diện 10 cm^2. Hai pít-tông chia khí trong xi lanh thành hai phần A và B. Lò xo nhẹ nối với pít-tông b có chiều dài tự nhiên 20 cm và độ cứng 100 N/m. Ban đầu nhiệt độ của khí A và B đều là 27^{0}C, chiều cao khí A là 25 cm và chiều cao khí B là 15 cm. Sau đó giữ nhiệt độ khí A là không đổi, đồng thời khí B được làm nóng từ từ để pít-tông a dâng lên ngang với miệng xi lanh. Biết áp suất khí quyển là 10^5 Pa và g = 10 m/s^2.



Tính nhiệt độ lúc sau của khí B.

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/587. Dòng điện xoay chiều chạy trong dây dẫn có biểu thức $i = 2\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$(A), ($t$ đo bằng s). Tính điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn trong $\frac{1}{300}$ (s) kể từ thời điểm $t = 0$.

THANH LÂM (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/587 (Grade 6). Let x, y be positive integers such that $3x^2 - 1$ is divisible by $3xy - 1$. Compute the value of the expression

$$M = x^{2026} - y^{2026}.$$

Problem T2/587 (Grade 7). Given x , y , z are real numbers satisfying

$$|x + y + z| \leq 1, \left|\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + z\right| \leq 1 \text{ and } |z| \leq 1.$$

Find the maximum value of the sum

$$S = |x| + |y| + |z|.$$

Problem T3/587. Find all integers x and y that simultaneously satisfy $11x^2 - xy - y^2 = 9$ and $x^2 - 3xy + y^2$ is a prime number.

Problem T4/587. Given a cyclic quadrilateral $ABCD$. Prove that

$$|AB - CD| + |AD - BC| \geq 2|AC - BD|.$$

Problem T5/587. Let x, y, z be positive numbers satisfying $x + y + z = \sqrt{2}$. Find the maximum value of the expression

$$P = \frac{2}{3x^2 + 2(y^2 + yz + z^2)}.$$

Được quét bằng CamScanner

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/587. Given the sequence (u_n) that satisfies: $\begin{cases} u_1 = 12 \\ u_{n+1} + 2n^2 + 6n + 3 = 3u_n, n = 1,2,... \end{cases}$.

Find all positive integers n such that u_n is a perfect square.

Problem T7/587. Given a, b, c are positive numbers satisfying $a+b+c \ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Find the minimum value of the expression

$$P = \sqrt{2a^2+4a+3} + \sqrt{2b^2+4b+3} + \sqrt{2c^2+4c+3} - a - b - c.$$

Problem T8/587. Given triangle ABC with $AB = \sqrt{3}$, $\widehat{CAB} = 48^0$, $\widehat{CBA} = 12^0$. Take the point M on the side AB such that $CM = 1$. Calculate the measurement of the angle $\widehat{MCB}$.

Problem T9/587. The polynomial

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

has n real solutions (not necessarily distinct) in the interval [0; 1]. Prove that

$$3a_1^2 + 2a_1 - 8a_2 \le 1.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T10/587. Find all polynomials $P(x)$, $Q(x)$ with integral coefficients that satisfy

$$P(x)Q(2025x+2026) = (2025Q(x)+2026)x^2,$$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

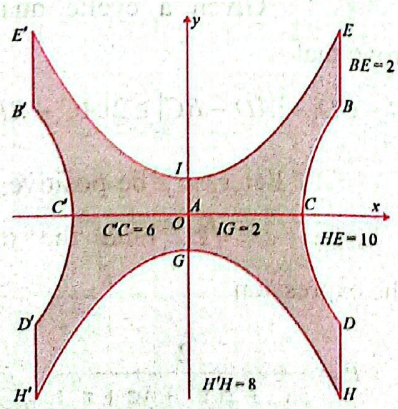
Problem T11/587. Let c be a real number. The sequence $a_1, a_2, a_3, ...$ is defined by $a_1 = c$ and $a_n = 2a_{n-1}^2 - 1$, $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$. Find all values of c such that $a_n < 0$ for all $n \ge 1$.

Problem T1 2/587. Given a rectangle $ABCD$, G is the point on the side CD such that $AG \perp BD$. Given two points E and H on AD and AB respectively such that EH is parallel to BD. Let F be the orthogonal projection of A onto DH. Suppose that EF intersects BD at L; and AG intersects EH at K. Prove that LG is a tangent to the circumcircle of the triangle KEF.

NGUYEN PHU HOANG LAN
(University of Education, VNU, Hanoi)

****

SỬ DỤNG ... *(Tiếp theo trang 21)*



Từ quá trình phân tích phía trên ta tính được thể tích vật trang trí (X) như sau:

$$V = \pi\int_{-4}^{4}\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)^2 dx - 2\pi\int_{3}^{4}\left(25-(x-8)^2\right)dx$$

$$= 45,6\pi \text{ (dm}^3\text{)}.$$

Được quét bằng CamScanner



Bài T1/583. *Một ổ khóa có tổ hợp số là một số nguyên dương có bốn chữ số. Chữ số đầu tiên là 4 và tổ hợp bốn chữ số này chia hết cho 45. Hỏi có bao nhiêu tổ hợp khác nhau có thể có?*

Lời giải. Gọi tổ hợp số là số gồm bốn chữ số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $\overline{4abc}$ thì

$$4000 \le \overline{4abc} \le 4999,$$

trong đó a, b, c là các chữ số thập phân. Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $\overline{4abc} = 45n$ với n là số nguyên dương. Ta thấy số $4005 = 45.89$ là số nhỏ nhất trong các số lớn hơn 3999 mà chia hết cho 45, còn số $4995 = 45.111$ là số lớn nhất trong các số nhỏ hơn 5000 mà chia hết cho 45, suy ra $89 \le n \le 111$. Từ đó $n = 111 - 89 + 1 = 23$. Vậy có 23 tổ hợp số gồm bốn chữ số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nhận xét. Các bạn gửi lời giải bài này về Tòa soạn đều viết dài hơn cách trên, khi xét các số $\overline{4abc}$ chia hết cho 5, tức là có dạng $\overline{4ab0}$ hoặc $\overline{4ab5}$, rồi xét các số đó chia hết cho 9, tức là $a + b$ chia hết cho 5 hoặc $a + b$ chia hết cho 9 với điều kiện $0 \le a + b \le 18$.

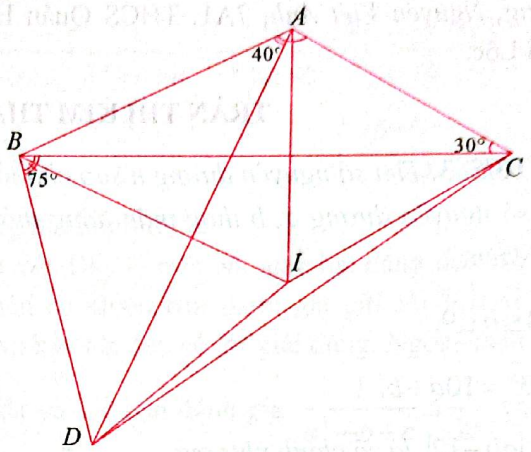
Các bạn sau có lời giải đúng:

Phú Thọ: *Đỗ Tuấn Minh, Phạm Trung Đức*, 6A, THCS Lý Nam Đế, Vạn Xuân; **Nghệ An**: *Nguyễn Việt Anh, Nguyễn Đình Lộc, Nguyễn Phúc Hưng*, 7A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc; *Trương Đình Quốc Anh*, 7E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Đà Nẵng**: *Lê Văn Minh*, 6/12, THCS Lương Thế Vinh, Hòa Khánh; **Quảng Ngãi**: *Bùi Quỳnh Nhã Trúc*, 6A, THCS Nghĩa Mỹ, Vệ Giang; **TP. Hồ Chí Minh**: *Đào Phương Thy*, 6/7, THCS Trần Quốc Toản, Bình Trưng.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/583. *Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 125^0$ và $\widehat{ACB} = 30^0$. Lấy điểm D sao cho A và D nằm về hai phía của đường thẳng BC, ngoài ra $\widehat{BAD} = 40^0$, $\widehat{CBD} = 75^0$. Tính số đo của góc $\widehat{ADC}$.*

Lời giải.



Từ giả thiết, dễ thấy $\widehat{ABC} = 25°$, $\widehat{CAD} = 85°$ và $\widehat{ABD} = 100°$. Tam giác ABD có $\widehat{BAD} = 40°$ và $\widehat{ABD} = 100°$ nên $\widehat{ADB} = \widehat{BAD} = 40°$. Do đó tam giác ABD cân tại B, suy ra $BA = BD$.

Vì $\widehat{ACB} = 30° < 60°$ nên tồn tại điểm I sao cho A và I nằm về hai phía của đường thẳng BC, ngoài ra tam giác ACI đều. Do $AC = IC$ và $\widehat{ACB} = \widehat{ICB}$ $(= 30°)$ nên dễ thấy $\Delta ABC = \Delta IBC$ (c.g.c), suy ra $BA = BI = BD$. Ta cũng có $\widehat{ABC} = \widehat{IBC} = 25°$ nên $\widehat{ABI} = 50°$. Kết hợp $\widehat{ABD} = 100°$ suy ra $\widehat{ABI} = \widehat{DBI}$ $(= 50°)$.

Từ đó dễ thấy $\Delta ABI = \Delta DBI$ (c.g.c) suy ra $IA = ID = IC$. Dẫn đến tam giác ICD cân tại I.

Các tam giác ABI, DBI cùng cân tại B và có $\widehat{ABI} = \widehat{DBI} = 50°$ nên $\widehat{BIA} = \widehat{BID} = 65°$.

Suy ra $\widehat{AID} = 130°$. Kết hợp $\widehat{AIC} = 60°$ suy ra $\widehat{CID} = 170°$. Tam giác ICD cân tại I và có $\widehat{CID} = 170°$ nên $\widehat{ICD} = 5°$. Suy ra $\widehat{ACD} = 65°$.

Vậy trong tam giác ACD có $\widehat{CAD} = 85°$ và $\widehat{ACD} = 65°$ nên $\widehat{ADC} = 30°$.

Nhận xét. Một số bạn gửi bài đến Toà soạn có lời giải tốt và giống với cách giải trên của tác giả. Ngoài ra có bạn đưa ra cách giải đúng khác, nhưng trình bày hơi dài dòng. Lưu ý phê bình hai bạn gửi bài có lời giải sai giống nhau. Xin tuyên dương các bạn có tên sau: **Quảng Ngãi:** *Bùi Quỳnh Nhã Trúc*, 6A,

Được quét bằng CamScanner

THCS Nghĩa Mỹ, Vệ Giang; **Nghệ An:** *Trương Đình Quốc Anh, Đinh Trí Dũng, Bùi Hữu Anh Quân*, 7E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Đặng Văn Hoàng, Nguyễn Việt Anh*, 7A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc.

TRẦN THỊ KIM THANH

Bài T3/583. *Tìm số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương a, b thỏa mãn đồng thời các điều kiện:*

i) $0 \le b \le 9$.

ii) $3^n = 10a + b$.

iii) $|ab-12|$ *là số chính phương.*

Lời giải. Giả sử có các số nguyên dương n, a, b thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do a, b là số nguyên dương nên $3^n = 10a + b > 10 \Rightarrow n \ge 3$.

• Xét $n = 3$, khi đó $10a + b = 27$ nên $b = 7$ và $a = 2$. Có $|ab-12| = 2$ không là số chính phương nên loại khả năng này.

• Xét $n = 4$, khi đó $10a + b = 81$ nên $b = 1$ và $a = 8$. Có $|ab-12| = 4$ là số chính phương nên chọn $n = 4$.

• Xét $n \ge 5$, khi đó: $a = \dfrac{3^n - b}{10} \ge \dfrac{3^5 - 9}{10} \Rightarrow a \ge 24$.

Kết hợp điều kiện b là số nguyên dương suy ra $ab \ge 24$, do đó $|ab-12| = ab - 12$ là số chính phương. Đặt $ab - 12 = c^2$, với c là số nguyên dương.

Vì n là số nguyên dương và $3^n = 10a + b$ nên $a \equiv -b \pmod 3$, suy ra:

$$ab - 12 \equiv -b^2 \pmod 3 \text{ hay } c^2 \equiv -b^2 \pmod 3.$$

Do 3^n có chữ số tận cùng là 1, 3, 7 hoặc 9; $0 < b \le 9$ và $3^n = 10a + b \Rightarrow b \in \{1;3;7;9\}$.

+) Nếu $b = 1$ hoặc $b = 7$ thì $-b^2 \equiv 2 \pmod 3$ $\Rightarrow c^2 \equiv 2 \pmod 3$, điều này vô lí nên loại khả năng này.

+) Nếu $b = 3$ hoặc $b = 9$ thì $-b^2 \equiv 0 \pmod 9$.

Mặt khác: $3^n \equiv 0 \pmod 9 \Rightarrow 10a + b \equiv 0 \pmod 9$ $\Rightarrow a \equiv -b \pmod 9 \Rightarrow ab - 12 \equiv -b^2 - 12 \pmod 9$ hay $ab - 12 \equiv 6 \pmod 9$, điều này này vô lí vì số chính phương chia cho 9 chỉ có thể dư 0, 1, 4 hoặc 7 nên loại khả năng này. Do đó khi $n \ge 5$ thì không có số nguyên dương a, b nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $n = 4$ thì có $a = 8$, $b = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

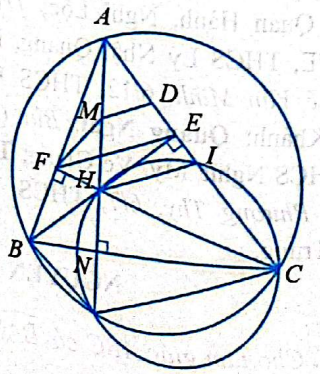
Nhận xét. Có không nhiều bạn đọc đã gửi bài giải đến tòa soạn. Ngoài cách làm trên, các bạn có thể tính $a = \dfrac{3^n - b}{10}$ rồi thay vào điều kiện $|ab-12| = c^2$ rồi giải phương trình nghiệm nguyên $|(3^n - b)b - 120| = 10c^2$ với $b \in \{1;3;7;9\}$. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt hơn cả:

Cộng hòa Áo: *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp II, III GIBS, TP. Graz; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc; **Nghệ An:** *Đặng Văn Hoàng*, 7A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc; *Lê Hoàng Long*, 8D, THCS Hòa Hiếu 2, Tây Hiếu; *Trương Đình Quốc Anh*, 7E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương **Hà Nội:** *Nguyễn Minh Tuấn*, lớp 8, THPT chuyên Hà Nội Amsterdam.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG

Bài T4/583. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng AH cắt đường tròn (O) tại K (K khác A). Đường tròn ngoại tiếp tam giác CHK cắt AC tại I (I khác C). Gọi D là trung điểm của AI. Chứng minh các điểm D, F, K, C cùng nằm trên một đường tròn.*

Lời giải.



Cách 1. Gọi M là trung điểm của AH.

Được quét bằng CamScanner

Ta có $MD \parallel HI$. Vì tứ giác $BCEF$, $CKHI$ nội tiếp, ta có: $\widehat{ADM}=\widehat{AIH}=\widehat{HKC}=\widehat{CBA}=\widehat{AEF}$. Vậy tứ giác $DCKM$ nội tiếp (1) và $MD \parallel HI \parallel EF$.

Lại có tứ giác $AFHE$ nội tiếp, ta có:

$$\widehat{MFH}=\widehat{MHF}=\widehat{AEF}=\widehat{CKM}.$$

Từ đó suy ra tứ giác $MFKC$ nội tiếp (2).

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $DFKC$ nội tiếp.

Cách 2. Gọi N là giao điểm của AH với BC. Ta có $\widehat{CBK}=\widehat{CAK}=\widehat{CBH}$. Suy ra BC là trung trực của HK. Do đó N là trung điểm của HK.

Sử dụng phương tích cho các tứ giác nội tiếp $BCEF$, $ACNF$ ta có:

$$HF.HC = HN.HA = HM.HK.$$

Từ đó suy ra tứ giác $MFKC$ nội tiếp. Mặt khác, tứ giác $CKHI$ nội tiếp, ta có: $AI.AC = AH.AK$, suy ra $2AD.AC = 2AM.AK$. Do $AD.AC = AM.AK$, suy ra tứ giác $DMKC$ nội tiếp. Từ đó suy ra C, D, M, F, K cùng thuộc một đường tròn, nên $DFKC$ là tứ giác nội tiếp.

Nhận xét. Các bạn dưới đây có lời giải tốt.

TP.HCM: *Trần Khánh Tùng*, 9/2, THCS Trần Quốc Toản, Bình Trưng; *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc; **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, Hùng Châu; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Bá Đức Anh*, 8A, THCS Lương Chí, Tĩnh Gia; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz; **Hà Nội:** *Nguyễn Minh Tuấn*, lớp 8, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam;

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/583. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a^4+b+c}+\frac{1}{b^4+c+a}+\frac{1}{c^4+a+b}\le 1.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$a^4+b+c\ge 3\sqrt[3]{a^4bc};$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^4bc}}=\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}.\frac{1}{ab}.\frac{1}{ac}}\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}\right).$$

Do đó: $\frac{1}{a^4+b+c}\le\frac{1}{3\sqrt[3]{a^4bc}}\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}\right).$

Tương tự ta có: $\frac{1}{b^4+c+a}\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ab}\right);$

$$\frac{1}{c^4+a+b}\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{bc}\right)$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta thu được:

$$\frac{1}{a^4+b+c}+\frac{1}{b^4+c+a}+\frac{1}{c^4+a+b}\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$$

$$=\left(\frac{ab+bc+ca}{3abc}\right)^2=1.$$

Chứng minh hoàn tất.

Nhận xét. Đây là một bài toán bất đẳng thức khá cơ bản nên có nhiều bạn tham gia gửi lời giải về tòa soạn và hầu hết đều có lời giải đúng. Ngoài cách giải trên, đa số các bạn đánh giá $\frac{1}{a^4+b+c}\le\frac{1}{3a}$ và hai bất đẳng thức tương tự để sử dụng giả thiết được viết lại dưới dạng $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. Một vài bạn sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky để đánh giá mẫu cũng cho lời giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

TP. Hồ Chí Minh: *Xuân Nhi*, 8/7, THCS Phạm Văn Chiêu, phường Thông Tây Hội; *Trần Khánh Tùng*, 9/2, THCS Trần Quốc Toản, phường Bình Trưng; *Nguyễn Chí Đại*, 11A1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông; *Đinh Khánh Danh*, *Trần Minh Huy*, *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*; 3B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp II,III GIBS, TP.Graz; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Bá Đức Anh*, 8A, THCS Lương Chí, Tĩnh Gia; **Vĩnh Long:** *Lưu Gia Phúc*, 9^1, THCS Bến Tre; **Phú Thọ:** *Vũ Khiêm*, 8A8, THCS Vĩnh Yên, phường Vĩnh Phúc; **Nghệ An:** *Nguyễn Thái Dũng*, 8B, *Ngô Trần Bảo Ngọc*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, xã Đô Lương; **Đà Nẵng:** *Mai Văn Võ*, 9/3, THCS Lê Độ; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc; **Hà Nội:** *Nguyễn Đức Huy*, 8A2, THCS Thanh Xuân, phường Thanh Xuân; *Nguyễn Thành Nam*, 9A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt; **Thái Bình:** *Phạm Ngọc Diệp*, 9A, THCS Quỳnh Côi.

HOÀNG NGỌC MINH

Bài T6/583. *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{1-4x+3x^2}+\sqrt[3]{1-5x+2x^2}=2-x+x^4 \quad (*).$$

Lời giải.

• Với $x\ge 1$ thì $x-1\ge 0$ và $x^3+x^2+x-2>0$.

Ta xét: $x^3-(1-4x+3x^2)=(x-1)^3+x>0$

Được quét bằng CamScanner

$\Rightarrow 1-4x+3x^2<x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{1-4x+3x^2}<x$ (1).

$x^3-(1-5x+2x^2)=x(1-x)^2+4x-1>0$

$\Rightarrow 1-5x+2x^2<x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{1-5x+2x^2}<x$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$VT(*)=\sqrt[3]{1-4x+3x^2}+\sqrt[3]{1-5x+2x^2}<x+x=2x.$

Mặt khác: $VP(*)=2-x+x^4=(x^4-3x+2)+2x$

$=(x-1)(x^3+x^2+x-2)+2x\geq 2x$.

Từ đó $VT(*)<2x\leq VP(*)$. Vậy phương trình (*) không có nghiệm với $x\geq 1$.

• Xét $x<1$: Biến đổi phương trình (*) như sau:

$(*)\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{1-4x+3x^2}-(1-x)\right)+\left(\sqrt[3]{1-5x+2x^2}-(1-x)\right)=x^4+x$

$\Leftrightarrow\dfrac{1-4x+3x^2-(1-x)^3}{A}+\dfrac{1-5x+2x^2-(1-x)^3}{B}=x^4+x$

(với $A=\sqrt[3]{(1-4x+3x^2)^2}+\sqrt[3]{1-4x+3x^2}.(1-x)+(1-x)^2$

$B=\sqrt[3]{(1-5x+2x^2)^2}+\sqrt[3]{1-5x+2x^2}.(1-x)+(1-x)^2$)

$\Leftrightarrow\dfrac{x^3-x}{A}+\dfrac{x^3-x^2-2x}{B}=x^4+x$

$\Leftrightarrow\dfrac{x(x+1)(x-1)}{A}+\dfrac{x(x+1)(x-2)}{B}-x(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\Leftrightarrow x(x+1)\left(\dfrac{x-1}{A}+\dfrac{x-2}{B}-(x^2-x+1)\right)=0$ (**).

Nhận thấy, với $x<1$ thì $x-1<0; x-2<0;$

$A=\sqrt[3]{(1-4x+3x^2)^2}+\sqrt[3]{1-4x+3x^2}.(1-x)+(1-x)^2$

$=\left(\sqrt[3]{1-4x+3x^2}+\dfrac{1}{2}(1-x)\right)^2+\dfrac{3}{4}(1-x)^2>0.$

$B=\sqrt[3]{(1-5x+2x^2)^2}+\sqrt[3]{1-5x+2x^2}.(1-x)+(1-x)^2$

$=\left(\sqrt[3]{1-5x+2x^2}+\dfrac{1}{2}(1-x)\right)^2+\dfrac{3}{4}(1-x)^2>0.$

$x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0\Rightarrow -(x^2-x+1)<0.$

Do đó: $\dfrac{x-1}{A}+\dfrac{x-2}{B}-(x^2-x+1)<0$ với $x<1$.

Từ đó: (**) $\Leftrightarrow x(x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$ (thoả mãn).

Vậy PT(*) có hai nghiệm là $x=0$ và $x=-1$.

Nhận xét. Đây là một bài toán hay về giải phương trình, mấu chốt là biến đổi đến phương trình (**) và lập luận $\dfrac{x-1}{A}+\dfrac{x-2}{B}-(x^2-x+1)<0$. Đa số các bạn tham gia gửi bài đều sử dụng bất đẳng thức để lập luận và cho đáp số đúng. Tuy nhiên, một số bạn vẫn còn nhầm dấu, lập luận quá dài dòng. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Hưng Yên: *Trần Gia Phú,* 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Tĩnh:** *Bùi Tùng Lâm,* 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Hoàng Hà Uyên Nhi, Nguyễn Trần Bảo Ngọc,* 10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Thanh Trúc,* 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đậu Nguyễn Phú Quốc,* 11E5, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng,* 3B, Trường Quốc tế Song ngữ Cấp II, III GIBS, TP. Graz.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T7/583. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases}u_1=2\\u_n=\dfrac{2n+1}{2n}u_{n-1}+\dfrac{n}{n+1},n\in\mathbb{N},n\geq 2\end{cases}.$$

Chứng minh rằng $u_{2025}>2026$.

Lời giải. Cách 1. Do $\dfrac{2n+1}{2n}>1$ và $\dfrac{n}{n+1}>0$ nên $u_n>u_{n-1},\forall n\in\mathbb{N},n\geq 2$, do đó (u_n) là dãy tăng.

Mà $u_n=\dfrac{2n+1}{2n}u_{n-1}+\dfrac{n}{n+1}$, do đó:

$u_n-u_{n-1}=\dfrac{1}{2n}u_{n-1}+\dfrac{n}{n+1}\geq\dfrac{1}{2n}.2+1-\dfrac{1}{n+1}$

$=1+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right).$

Cho n lần lượt các giá trị 2, 3, 4, …, 2025 ta được:

$u_2-u_1=1+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)$; $u_3-u_2=1+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)$;

$u_4-u_3=1+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}\right)$; …;

$u_{2025}-u_{2024}=1+\left(\dfrac{1}{2025}-\dfrac{1}{2026}\right).$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta được:

$u_{2025}-u_1=2024+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2026}\right)=2024+\dfrac{1012}{2026}>2024.$

Vậy: $u_{2025}>2024+u_1=2026$ (đpcm).

Được quét bằng CamScanner

Cách 2. Ta chứng minh bằng quy nạp rằng:

$u_n > n+1$ (1) với mọi $n \in \mathbb{N}, n > 2$.

Với $n = 2$ ta có: $u_2 = \frac{2.2+1}{2.2}.2 + \frac{2}{2+1} = \frac{19}{6} > 2+1$.

Vậy (1) đúng với $n = 2$. Giả sử (1) đúng với $n = k$ $(k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$, tức là $u_k > k+1$. Ta có:

$$u_{k+1} = \frac{2(k+1)+1}{2(k+1)}u_k + \frac{k+1}{k+2} > \frac{2k+3}{2(k+1)}.(k+1) + \frac{k+1}{k+2}$$

$$= \frac{2k+3}{2} + \frac{k+1}{k+2} = \frac{2k^2+9k+8}{2(k+2)}$$

$$= k+2+\frac{k}{2(k+2)} > k+2.$$

Vậy (1) đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp thì (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Với $n = 2025$ thì $u_{2025} > 2026$.

Nhận xét. Bài toán không khó nên tất cả các bạn tham gia đều có lời giải đúng và hầu hết các bạn giải như cách thứ 2. Danh sách các bạn có lời giải đúng là: **Phú Thọ:** *Vũ Khiêm*, 8A8, THCS Vĩnh Yên, phường Vĩnh Phúc; **Lào Cai:** *Trần Tiến Đạt*, 10 Toán, THPT chuyên Lào Cai; **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, *Phạm Văn Phong*, *Đỗ Quang Anh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nội:** *Nguyễn Đức Huy*, 8A2, THCS Thanh Xuân, phường Thanh Xuân, *Nguyễn Thành Nam*, 9A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt; **Thanh Hóa:** *Mai Thiện Ân*, 9B, THCS Chu Văn An, xã Nga Sơn; **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, xã Hùng Châu, *Nguyễn Đức Dũng*, 11A1, THPT Yên Thành 2, xã Quan Thành; *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 11A3, THPT Hoàng Mai, Hoàng Mai; **Hà Tĩnh:** *Ngô Bùi Anh Khoa*, *Lê Minh Mạnh*, *Bùi Tùng Lâm*, 11 Toán 1, *Phan Viết Lê Huy*, 11 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Nguyễn Trần Bảo Ngọc*, *Phạm Khánh Hùng*, *Hoàng Hà Uyên Nhi*, 10 Toán 1, *Lê Phước Quý*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc, *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 10T, THPT chuyên Thăng Long; **TP. Hồ Chí Minh:** *Mai Phú Khang*, *Trần Minh Huy*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, *Nguyễn Thanh Hậu*, 10A1, *Trần Lê Thế Vũ*, 10E1, *Trần Ngọc Khánh Vân*, 10E2, *Đậu Nguyễn Phú Quốc*, 11E5, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông; **An Giang:** *Lâm Khánh Nguyên*, THPT chuyên Thủ Khoa Nghĩa, *Nguyễn Sơn Khánh*, *Nguyễn Đức Mạnh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Đồng Tháp:** *Phạm Tiến Đạt*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Tây Ninh:** *Võ Tiến Phát*, 11A1, THPT Nguyễn Thông; **Vĩnh Long:** *Lê Duy Minh*, *Thái Minh Phúc*, *Nguyễn Thanh Trúc*, *Lê Hoàng Khang*, 11T1, *Huỳnh Minh Đức*, 11T2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

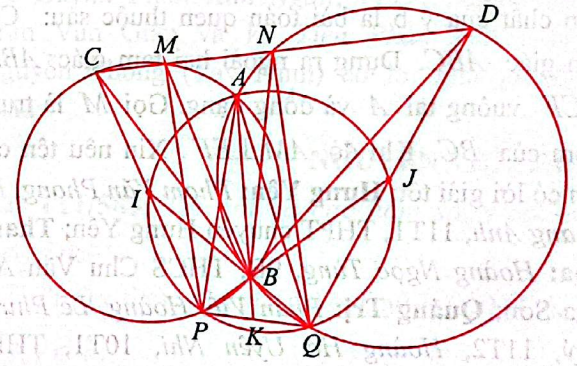
TRẦN HỮU NAM

Bài T8/583. *Cho hai đường tròn (I), (J) cắt nhau tại hai điểm A, B, trong đó I, J nằm về hai phía của đường thẳng AB và $IJ > AB$. Tiếp tuyến của (I) tại B cắt (J) tại điểm thứ hai là D. Tiếp tuyến của (J) tại B cắt (I) tại điểm thứ hai là C. Đường thẳng CI cắt (I) tại P (P khác C), đường thẳng DJ cắt (J) tại Q (Q khác D).*

a) *Chứng minh B là tâm đường tròn nội tiếp tam giác APQ.*

b) *Gọi K là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng $KB \perp CD$.*

Lời giải.



a) Ta có BD là tiếp tuyến của (I) nên $\widehat{DBI} = 90^0$. Mà $\widehat{DBQ} = 90^0$ nên I, B, Q thẳng hàng. Chứng minh tương tự, J, B, P thẳng hàng. Từ đó:

$$\widehat{PAB} = \frac{1}{2}\widehat{PIB} = 90^0 - \widehat{IBP} = 90^0 - \widehat{JBQ} = \frac{1}{2}\widehat{BJQ} = \widehat{BAQ}.$$

Ta thu được AB là đường phân giác của $\widehat{PAQ}$, đồng thời $\widehat{PAQ} = 2\widehat{PAB} = \widehat{PIQ}$. Suy ra I nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ. Mà $IA = IP$

Được quét bằng CamScanner

nên QI là đường phân giác của $\widehat{AQP}$. Vậy B là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác APQ.

b) ***Cách 1.*** CD cắt lại $(I),(J)$ theo thứ tự tại M,N.

Ta có $\widehat{BMN}=\widehat{IPB}=\widehat{IBP}=\widehat{JBQ}=\widehat{JQB}=\widehat{BNM}$ nên $BM=BN$. Suy ra B nằm trên đường trung trực của MN. Mà $\widehat{PMN}=\widehat{QNM}=90^0$ nên $PMNQ$ là hình thang vuông. Suy ra B nằm trên đường trung bình của hình thang vuông $PMNQ$. Suy ra:

$$BK\perp MN \text{ hay } BK\perp CD.$$

Cách 2. $BK\perp CD$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

Điều này tương đương $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BQ}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\right)=0$.

Chú ý rằng $BP\perp BC, BQ\perp BD$ nên ta cần chứng minh $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Do $\left(\overrightarrow{BP},\overrightarrow{BD}\right)=90^0+\widehat{CBD}=\left(\overrightarrow{BQ},\overrightarrow{BC}\right)$ nên ta chỉ cần chứng minh $BP\cdot BD=BQ\cdot BC\Leftrightarrow\frac{BP}{BC}=\frac{BQ}{BD}$.

Nhưng điều này hiển nhiên đúng do hai tam giác PBC và QBD đồng dạng.

Nhận xét. Đây là một bài toán hay và không khó. Bản chất của ý b là bài toán quen thuộc sau: Cho tam giác ABC. Dựng ra ngoài hai tam giác ABE, ACF vuông tại A và đồng dạng. Gọi M là trung điểm của BC. Khi đó $AM\perp EF$. Xin nêu tên các bạn có lời giải tốt: **Hưng Yên:** *Phạm Văn Phong, Đỗ Quang Anh*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** *Hoàng Ngọc Tùng*, 9B, THCS Chu Văn An, Nga Sơn; **Quảng Trị:** *Phan Viết Hoàng, Lê Phước Quý*, 11T2, *Hoàng Hà Uyên Nhi*, 10T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **An Giang:** *Lâm Khánh Nguyên*, THPT chuyên Thủ Khoa Nghĩa; **TP. Hồ Chí Minh:** *Hồ Duy Khang*, 10E1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Tùng Duy, Lê Minh Mạnh*, 11T1, *Phan Viết Lê Huy*, 11T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Vĩnh Long:** *Lê Duy Minh, Lê Hoàng Khang*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 10T, THPT chuyên Thăng Long; **Tây Ninh:** *Trần Lê Trọng Phúc*, 11T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu.

NGUYỄN VĂN LINH

Bài T9/583. *Cho số nguyên dương $n\geq 3$. Gọi M là một số nguyên dương chỉ gồm các chữ số 1 và 2 thỏa mãn M chia hết cho 10^n-7. Hỏi M có ít nhất bao nhiêu chữ số?*

Lời giải. (Của tác giả đề toán) Đặt $d=10^n-7$; $M=\overline{a_m\ldots a_1}$, $a_i\in\{1,2\}$ với mọi $i=1,\ldots,m$.

Vì M chia hết cho d nên $M=qd\geq 2d$. Vì M chỉ gồm toàn các chữ số 1 và 2 nên

$$2d\leq M\leq \underbrace{2\ldots2}_{m}=2\times\underbrace{1\ldots1}_{m}=2\times\frac{10^m-1}{9}\quad(1).$$

Suy ra: $10^n-7=d\leq\frac{10^m-1}{9}\leq 10^m\Rightarrow m\geq n+1$.

Hơn nữa, $m\geq 2n+1$. Thật vậy, giả sử $n<m<2n$. Ta có:

$$M=\overline{a_m\ldots a_1}=\overline{a_m\ldots a_{n+1}}\times 10^n+\overline{a_n\ldots a_1}=\overline{a_m\ldots a_{n+1}}\times d+S$$

với $S=7\times\overline{a_m\ldots a_{n+1}}+\overline{a_n\ldots a_1}$.

M chia hết cho d nên S chia hết cho d.

Vì $S\leq 7\times\underbrace{2\ldots2}_{n-1}+\underbrace{2\ldots2}_{n}<2d$ (do $m<2n$), suy ra $S=d$ (2). Mặt khác, $S\equiv 7a_{n+1}+a_1\pmod{10}$ và vì $a_{n+1},a_1\in\{1;2\}$ nên $S-3$ không thể là bội của 10. Do đó (2) không thể xảy ra. Vậy $m\geq 2n+1$.

Ta chỉ ra số $M=2\underbrace{1\ldots1}_{n-1}\underbrace{2\ldots2}_{n-2}111$ chia hết cho d.

Ta có:

$$M=2\underbrace{1\ldots1}_{n-1}\underbrace{2\ldots2}_{n-2}111=2\times10^{2n}+\underbrace{1\ldots1}_{n-1}2\times10^n+\underbrace{2\ldots2}_{n-3}111$$

$$\equiv 2\times7^2+\underbrace{11\ldots1}_{n-1}2\times7+\underbrace{22\ldots2}_{n-3}111\pmod d$$

$$\equiv\underbrace{77\ldots7}_{n-2}84+\underbrace{22\ldots2}_{n-2}209\equiv\underbrace{9\ldots9}_{n-1}3=10^n-7\equiv 0\pmod d.$$

Vậy đáp số $m=2n+1$.

Thử lại: $n=3$: $M=2112111:993=2127$.

$n=4$: $M=211122111:9993=21127$.

$n=5$: $M=21111222111:99993=211127$.

Từ đây ta có thể dự đoán: $M=2\underbrace{1\ldots1}_{n-1}\underbrace{2\ldots2}_{n-2}111$ chia hết cho $d=10^n-7$ được thương là $2\underbrace{11\ldots1}_{n-2}27$.

Được quét bằng CamScanner

Nhận xét. Bài này có lẽ khó nên chỉ có ba bạn giải tuy nhiên vẫn có thiếu sót.

Lâm Đồng: *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Viết Thế Tài* 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Vũ Đức Phát*, 11E1, THPT Lê Thánh Tông.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T10/583. *Cho dãy số* (u_n) *xác định bởi:*

$$u_1 = 14, u_2 = 20, u_3 = 32,$$

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 8u_n + 8u_{n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Tìm tất cả các số n để u_n *chia hết cho* 2^{n+3}.

Lời giải (theo đa số các bạn). Dãy đã cho có phương trình đặc trưng như sau:

$$x^3 - 4x^2 + 8x - 8 = 0,$$

hay $(x-2)(x^2-2x+4)=0$. Phương trình này có ba nghiệm lần lượt là

$$x_1 = 2, x_2 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$x_3 = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i.\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Do đó số hạng tổng quát u_n sẽ có dạng

$$u_n = A.2^n + 2^n\left(B.\cos\frac{n\pi}{3} + C.\sin\frac{n\pi}{3}\right).$$

Thay lần lượt $n=1,2,3$ ta được

$$\begin{cases} u_1 = 2A + 2B\cos\frac{\pi}{3} + 2C\sin\frac{\pi}{3} = 14 \\ u_2 = 4A + 4B\cos\frac{2\pi}{3} + 4C\sin\frac{2\pi}{3} = 20 \\ u_3 = 8A + 8B\cos\pi + 8C\sin\pi = 32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A + B + C\sqrt{3} = 14 \\ 4A - 2B + 2C\sqrt{3} = 20 \\ 8A - 8B = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 6 \\ B = 2. \\ C = 0 \end{cases}$$

Vậy $u_n = 2^n\left(6 + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$. Khi đó $\frac{u_n}{2^{n+3}} = \frac{3 + \cos\frac{n\pi}{3}}{4}$.

Mà $-1 \leq \cos\frac{n\pi}{3} \leq 1$ nên $\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{2^{n+3}} \leq 1$. Do vậy $\frac{u_n}{2^{n+3}} \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $\cos\frac{n\pi}{3} = 1$, tức $n = 6k, k \in \mathbb{Z}^+$ và đây là tất cả các giá trị nguyên dương của n thỏa mãn yêu cầu.

Nhận xét. Đây là dạng toán cơ bản của dãy số liên quan tới phương trình đặc trưng và công thức số hạng tổng quát nên có khá nhiều bạn tham gia giải và tất cả đều đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 11A3, THPT Hoàng Mai; **Lào Cai:** *Trần Tiến Đạt*, 10 Toán, THPT chuyên Lào Cai; **Lâm Đồng**: *Nguyễn Bảo Nguyên Chương*, 11 Toán, *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long; **Quảng Ninh:** *Trương Phước Nguyên*, 10 Toán, THPT chuyên Hạ Long; **An Giang:** *Nguyễn Hoài Nhanh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Hưng Yên:** *Đỗ Quang Anh*, 11 Toán 1, *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Thanh Trúc*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Hà Tĩnh:** *Lê Minh Mạnh*, *Bùi Tùng Lâm*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Tây Ninh:** *Trần Lê Trọng Phúc*, 11T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Đồng Tháp:** *Phạm Tiến Đạt*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chí Đại*, 11A1, *Đậu Nguyễn Phú Quốc*, 11E5, THPT Lê Thánh Tông. Đáng tiếc có bạn *Đặng Sỹ Phước Đức*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh có lời giải đúng gần hết nhưng đến đoạn cuối tìm n thì lại sai. Ngoài ra, hai bạn *Huỳnh Phan Kim Ngân*, 11T2, THPT chuyên Trần Văn Giàu và *Võ Tiến Phát*, 11A1, THPT Nguyễn Thông (Tây Ninh) có lời giải giống hệt nhau.

NGUYỄN VIỆT HÙNG

Bài T11/583. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sao cho*:

$$f(f(x-y)) + xy = f(x) - f(y) + f(x)f(y),$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. (Của bạn *Nguyễn Bảo Nguyên Chương* và một số bạn khác)

Gọi $P(u, v)$ là phép thế $x = u, y = v$. Ta có:

$P(0, 0)$: $f(f(0)) = f^2(0)$.

$P(f(0), f(0))$: $2f^2(0) = f^4(0)$

$\Leftrightarrow f(0) = 0$ hoặc $f(0) = \sqrt{2}$ hoặc $f(0) = -\sqrt{2}$.

• TH1: $f(0) = 0$. Khi đó:

$P(x, 0)$: $f(f(x)) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

$P(0, x)$: $f(f(-x)) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra:

Được quét bằng CamScanner

$$f(f(x))+f(f(-x))=0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Ở đây, thay x bởi $x-y$ có:

$$f(f(x-y))+f(f(y-x))=0,\forall x,y\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x)-f(y)+f(x)f(y)-xy+f(y)-f(x)+f(x)f(y)-xy=0,\forall x,y\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x)f(y)-xy=0,\forall x,y\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x}=\frac{f(y)}{y},\forall x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Suy ra: $f(x)=kx,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (k là hằng số thực).

Mà $f(0)=0$ nên $f(x)=kx,\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại đề bài ta tìm được $k=1$ nên $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$.

• TH2: $f(0)=\sqrt{2}$ hoặc $f(0)=-\sqrt{2}$. Khi đó:

$P(x,0)$: $f(f(x))=f(x)-f(0)+f(x)f(0),\forall x\in\mathbb{R}$.

$P(0,x)$: $f(f(-x))=f(0)-f(x)+f(0)f(x),\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(f(x))+f(f(-x))=2f(x)f(0),\forall x\in\mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow [f(f(x))+f(f(-x))]^2=4f^2(x)f^2(0),\forall x\in\mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow f^2(f(x))+f^2(f(-x))+2f(f(x)).f(f(-x))=8f^2(x),\forall x\in\mathbb{R}\ (1).$$

$P(x,x)$: $f^2(x)=x^2+f(f(0))=x^2+f^2(0)=x^2+2,\forall x\in\mathbb{R}$

Ở đây thay x bởi $f(x)$ ta được:

$$f^2(f(x))=f^2(x)+2=x^2+2+2=x^2+4,\forall x\in\mathbb{R}\ (2).$$

Tiếp tục thay x bởi $-x$ ta được:

$$f^2(f(-x))=x^2+4,\forall x\in\mathbb{R}\ (3).$$

Khi đó từ (1) ta được:

$$\Rightarrow 2x^2+8+2f(f(x)).f(f(-x))=8f^2(x),\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(f(x)).f(f(-x))=4f^2(x)-x^2-4=4(x^2+2)-x^2-4=3x^2+4,\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow [f(f(x)).f(f(-x))]^2=(3x^2+4)^2,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Kết hợp với (2) và (3) ta có:

$$(x^2+4)(x^2+4)=(3x^2+4)^2,\forall x\in\mathbb{R}\ \text{(vô lý)}.$$

Vậy tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là

$$f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Nhận xét. Sử dụng ký hiệu phép thế $P(u, v)$ với $x=u, y=v$ cho ta lời giải ngắn gọn. Một số bạn còn trình bày dài. Các bạn sau có lời giải đúng: **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, *Đỗ Quang Anh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 11A3, THPT Hoàng Mai, Nghệ An; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Viết Thế Tài, Ngô Bùi Anh Khoa*, 11 Toán 1, *Nguyễn Viết Lê Huy*, 11 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Nguyễn Trần Bảo Ngọc*, 10 Toán 1, *Lê Phước Quý*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **TP. Hồ Chí Minh:** *Lê Xuân Định*, 10, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông; **Tây Ninh:** *Hồ Bảo Ngọc*, 11T1, *Phan Kim Ngân*, 11T2, THPT chuyên Trần Văn Giàu, *Võ Tiến Phát*, 11A1, THPT Nguyễn Thông; **Vĩnh Long:** *Lê Duy Minh, Lê Hoàng Khang, Thái Minh Phúc*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Cà Mau:** *Khổng Thùy Hiếu*, 11C1, THPT Nguyễn Thị Minh Khai; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 10T, *Nguyễn Bảo Nguyên Chương*, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long.

NHƯ HOÀNG

Bài T12/583. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Lấy H thuộc (I) sao cho $DH\perp EF$. Gọi N là giao điểm của AH với (I); T là giao điểm của OI với BC. Chứng minh rằng $\widehat{ANT}=90^0$.*

Lời giải. Trong lời giải này, kí hiệu (XYZ) chỉ đường tròn đi qua ba điểm X, Y, Z và XX kí hiệu tiếp tuyến tại X với đường tròn (XYZ).

Ta cần có hai bổ đề.

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm. M là trung điểm của BC. K, L theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AH, AO và (O). Khi đó*

1) K, H đối xứng với nhau qua BC.

2) L, H đối xứng với nhau qua M.

Bổ đề 1 rất quen thuộc, không trình bày cách chứng minh ở đây.

Bổ đề 2. *Cho tam giác ABC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp, (I) là đường tròn nội tiếp. D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) và BC, CA, AB. Khi đó OI là đường thẳng Euler của tam giác DEF.*

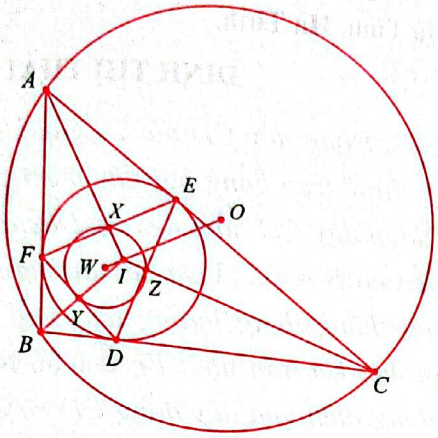
Chứng minh. Gọi r là bán kính đường tròn (I); X, Y, Z theo thứ tự là trung điểm của EF, FD, DE; W là tâm đường tròn (XYZ) (h.1).

Gọi f là phép nghịch đảo tâm I phương tích r^2, dễ thấy $f: A\leftrightarrow X, B\leftrightarrow Y, C\leftrightarrow Z$.

Do đó $f: (ABC)\leftrightarrow(XYZ)$. Vậy I, O, W thẳng hàng. Từ đó, chú ý rằng IW là đường thẳng Euler

Được quét bằng CamScanner

của tam giác DEF, suy ra OI là đường thẳng Euler của tam giác DEF.



Hình 1

Trở lại giải bài toán T12/583.

Gọi M là trung điểm của EF; K là trực tâm của tam giác DEF; P, Q theo thứ tự là giao điểm thứ hai của DI, HI và (I); T' là giao điểm của BC và NQ (h.2). Dễ thấy AI vuông góc với EF tại M.

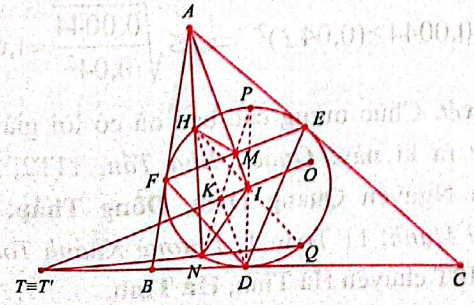
Do đó: $\overline{AI}.\overline{AM}=AF^2=\overline{AH}.\overline{AN}$. Điều đó có nghĩa là tứ giác $MHNI$ nội tiếp. Kết hợp với $IH=IN$, suy ra MI là phân giác ngoài của góc $\widehat{HMN}$.

Kết hợp với $EF\perp MI$, suy ra EF là phân giác trong của góc $\widehat{HMN}$. Theo bổ đề 1, H, K đối xứng với nhau qua EF. Vậy M, N, K thẳng hàng.

Theo bổ đề 2, M, P, K thẳng hàng. Vậy N, P, K thẳng hàng. Từ đó, áp dụng định lí Pascal cho sáu điểm $\begin{pmatrix} DNH \\ QDP \end{pmatrix}$, chú ý rằng

$$T'=BC\cap NQ=DD\cap NQ,$$
$$K=NP\cap HD, I=DP\cap HQ$$

suy ra T', K, I thẳng hàng. Theo bổ đề 2, K, I, O thẳng hàng. Vậy T', I, O thẳng hàng. Điều đó có nghĩa là $T'=OI\cap BC=T$. Từ đó, chú ý rằng $T'Q\perp HN\equiv AN$, suy ra $\widehat{ANT}=90^\circ$.



Hình 2

Nhận xét. 1) Bài toán này không khó, có 7 bạn tham gia giải, bằng hai phương pháp: hình học thuần túy và số phức.

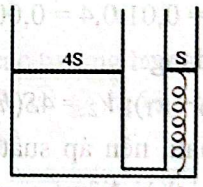
2) Có thể chứng minh bổ đề 2 mà không sử dụng phép nghịch đảo, tuy nhiên cách chứng minh này hơi dài.

3) Các bạn sau đây có lời giải bằng hình học thuần túy: **Phú Thọ:** *Vi Văn Khành, Trần Việt Tùng*, 11TA, THPT chuyên Hùng Vương; **Hưng Yên:** *Đỗ Quang Anh*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** *Vũ Duy Mạnh*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn; **TP. Hồ Chí Minh:** *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

4) Các bạn sau đây có lời giải bằng số phức: **Quảng Ninh:** *Dương Anh Kha*, THPT chuyên Hạ Long; **Tây Ninh:** *Vũ Tiến Phát*, 11A1, THPT Nguyễn Thông.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/583. *Trong quá trình vận hành tàu sân bay, việc hạ cánh an toàn cho máy bay không người lái (UAV) hạng nặng là một thách thức kĩ thuật lớn. Không gian hạn chế của boong tàu và tốc độ tiếp đất cao đòi hỏi hệ thống giảm chấn đặc biệt để hấp thụ năng lượng va chạm một cách hiệu quả. Hải quân đã phát triển hệ thống giảm chấn khí nén hai buồng khí nén hai buồng kết hợp lò xo trợ lực như hình vẽ.*



Hệ thống bao gồm: buồng chính (bên trái), có tiết diện 4S, chứa khí nén; buồng phụ (bên phải), có tiết diện S, chứa khí nén và lò xo; giữa hai buồng khí có một kênh kết nối nhỏ cho phép khí di chuyển giữa hai buồng. Khi UAV hạ cánh, lực tác động lên hệ thống buồng chính, làm pit - tông đẩy xuống thể tích buồng chính giảm, áp suất khí tăng và chuyển sang buồng phụ. Pit-tông bên phải ở buồng phụ bị đẩy lên, giảm chấn cho hệ thống. Trong quá trình này độ giảm chấn tối đa cho phép ở buồng phụ là 15 cm. Biết tiết diện S = 100 cm^2, chiều cao ban đầu của hai cột khí h_0 = 40 cm, áp

Được quét bằng CamScanner

suất ban đầu $p = 7{,}488$ bar, *nhiệt độ của khối khí coi như không đổi*; 1 bar $= 10^5$ Pa. *Ban đầu lò xo không biến dạng. Các kĩ thuật viên hải quân cần phải sử dụng lò xo có độ cứng là bao nhiêu* (N/m) *để hành trình giảm chấn tối đa cho phép ở buồng chính bằng* 5 cm?

Lời giải. - Tổng thể tích ở hai buồng khí là không đổi, nên khi pít-tông bên trái đi xuống một đoạn $x_1 = 5$ cm thì pít-tông bên phải đi lên một đoạn $x_2 = 15$ cm.

- Thể tích buồng chính giảm: $\Delta V_{\text{chính}} = -4Sx_1$.
- Thể tích buồng phụ tăng: $\Delta V_{\text{phụ}} = +Sx_2$.

$\Rightarrow -4Sx_1 + Sx_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 4x_1$.

Với $x_1 = 5$ cm thì $x_2 = 20$ cm. Nhưng đề bài giới hạn hành trình tối đa buồng phụ là 15 cm, nên hệ phải dừng ở $x_2 = 15$ cm $\Rightarrow x_1 = \dfrac{x_2}{4} = 3{,}75$ cm.

Để buồng phụ đạt hành trình tối đa 15 cm thì hành trình buồng chính thực tế chỉ là 3,75 cm. Tuy nhiên, muốn để buồng chính đạt tối đa 5 cm thì ta cần phải chọn lò xo có độ cứng đủ để giới hạn buồng phụ chỉ dịch 15 cm, không vượt quá.

- Thể tích ban đầu:

$$V_{1,0} = 4Sh_0 = 4.0{,}01.0{,}4 = 0{,}016 \text{ m}^3.$$
$$V_{2,0} = Sh_0 = 0{,}01.0{,}4 = 0{,}004 \text{ m}^3.$$

- Khi lò xo biến dạng:

$$V_1 = 4S(h_0 - x_1);\ V_2 = 4S(h_0 + x_2).$$

Do khí thông nhau, nên áp suất khí ở hai buồng bằng nhau tại mọi thời điểm: $p_1 = p_2 = p$.

Vì nhiệt độ không đổi nên:

$$p_0(V_{1,0} + V_{2,0}) = p(V_1 + V_2)$$
$$\Rightarrow p = \frac{p_0(V_{1,0} + V_{2,0})}{V_1 + V_2} = 7{,}676.10^5 \text{ Pa}.$$

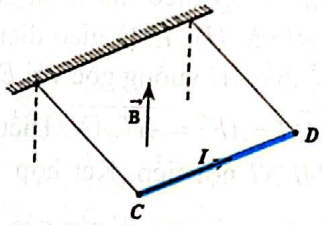
Khi cân bằng: $pS = p_0S + kx_2 \Rightarrow kx_2 = (p - p_0)S$

$$\Rightarrow k = \frac{(p - p_0)S}{x_2} = \frac{(7{,}676 - 7{,}488).10^5.10^{-2}}{0{,}15}$$
$$\approx 1{,}25.10^3 \text{ N/m}.$$

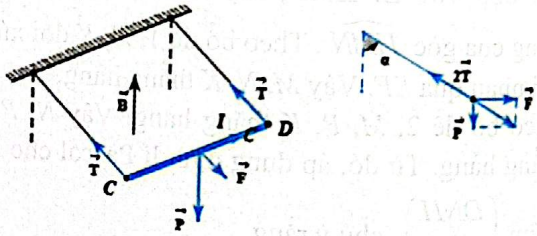
Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Phạm Tùng Lâm, Nguyễn Phúc Thịnh*, 11 lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**; *Trương Khánh Toàn*, 11 Lý, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/583. *Đoạn dây CD dài* 20 cm, *khối lượng* $m = 10$ g *được treo bằng hai dây mềm cách điện sao cho đoạn dây CD nằm ngang. Dây ở trong từ trường đều có* $B = 0{,}2$ T *và các đường sức từ là các đường thẳng đứng hướng lên. Mỗi dây treo chịu được lực kéo lớn nhất* $F_K = 0{,}06$ N. *Hỏi có thể cho dòng điện qua dây đồng CD có cường độ lớn nhất là bao nhiêu để dây đồng CD có cường độ lớn nhất bao nhiêu để dây treo không đứt. Coi khối lượng dây treo rất nhỏ;* $g = 10$ m/s^2.



Lời giải. Các lực tác dụng như hình vẽ.



$$F_K = T_{\max} = 0{,}06 \text{ N}.$$

Để dây treo không bị đứt thì:

$$(2T)^2 \le P^2 + F^2$$
$$\Leftrightarrow (2.0{,}06)^2 \ge 0{,}1^2 + (BIL)^2$$
$$\Leftrightarrow 0{,}12^2 \ge 0{,}1^2 + (0{,}2.I.0{,}2)^2$$
$$\Leftrightarrow 0{,}0144 \ge 0{,}01 + (0{,}04.I)^2$$
$$\Leftrightarrow 0{,}0044 \ge (0{,}04.I)^2 \Rightarrow I \le \sqrt{\frac{0{,}0044}{0{,}04^2}} \approx 1{,}658 \text{ A}.$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Quách Khả Tân*, 11T2, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**; *Đặng Văn Lê Mạnh*, 11 Toán 1, *Trương Khánh Toàn*, 11 Lý, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Được quét bằng CamScanner



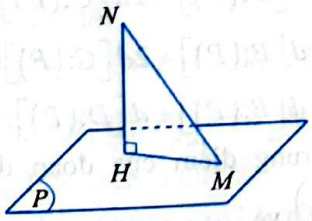
MỘT SỐ BÀI TOÁN MAX - MIN LIÊN QUAN ĐẾN KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẲNG TRONG HỆ TRỤC TỌA ĐỘ Oxyz

TRỊNH BA
(GV THPT chuyên Hoàng Lê Kha, Tây Ninh)

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, các bài toán liên quan đến mặt phẳng được khai thác khá nhiều, đặc biệt là bài toán liên quan đến khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng. Bài viết này trình bày một số bài toán về phương trình mặt phẳng và tính khoảng cách hoặc tổng khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng đạt giá trị lớn nhất, hoặc nhỏ nhất, vốn được khai thác nhiều trong các bài toán thi THPTQG. Trong bài viết này ta kí hiệu $d\left[N;(P)\right]$ để chỉ khoảng cách từ điểm N đến mặt phẳng (P).

Bài toán 1. *Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai điểm M và N. Xác định mặt phẳng (P) qua M sao cho $d\left[N;(P)\right]$ lớn nhất.*

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của N trên (P) thì $d\left[N;(P)\right]=NH\le MN\Rightarrow \max d\left[N;(P)\right]=MN$ $\Leftrightarrow (P)\perp MN$, suy ra $\overrightarrow{MN}$ là vectơ pháp tuyến (VTPT) của (P).

Thí dụ 1. *Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $M(-1;2;4)$ và $N(0;1;5)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M sao cho khoảng cách từ N đến (P) là lớn nhất. Khi đó, khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (P) bằng bao nhiêu?*

A. $d=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $d=\sqrt{3}$ **C.** $d=\dfrac{1}{3}$ **D.** $d=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Lời giải.

• Khoảng cách từ N đến (P) lớn nhất khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN}=(1;-1;1)$ là VTPT của (P). Phương trình của (P) là: $x-y+z-1=0$.

• $d\left[O;(P)\right]=\dfrac{|-1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, ta chọn A.

Bài tương tự

1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-1;2;4)$ và $N(0;1;5)$. Viết phương trình mặt phẳng qua N sao cho $d\left[M;(P)\right]$ lớn nhất.

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-1;2;4)$ và $N(1;0;0)$. Viết phương trình mặt phẳng qua N sao cho $d\left[M;(P)\right]$ lớn nhất.

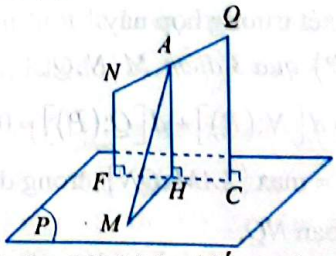
Bài toán 2. *Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho ba điểm M, N và Q. Xác định mặt phẳng (P) qua M sao cho*

$$T=d\left[N;(P)\right]+d\left[Q;(P)\right]$$

lớn nhất.

Lời giải. Ta xét các trường hợp:

TH1. *Hai điểm N và Q không thuộc (P) và nằm cùng phía với (P).*



Gọi F, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của N, Q trên (P) thì

$$T=d\left[N;(P)\right]+d\left[Q;(P)\right]=NF+QC=2AH$$

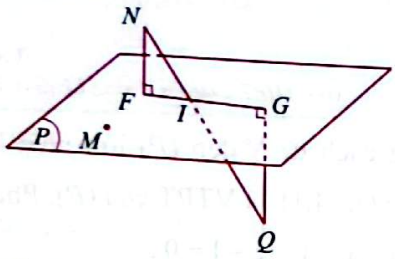
với A là trung điểm của NQ và H là hình chiếu vuông góc của A trên (P). Do đó:

$$d\left[N;(P)\right]+d\left[Q;(P)\right]=2AH\le 2AM$$

Được quét bằng CamScanner

$\Rightarrow \max T = 2AM \Leftrightarrow H \equiv M$ hay $\overline{MA}$ là VTPT của (P).

TH2: *Hai điểm N và Q không thuộc (P) và nằm khác phía với (P).*



Gọi F, G lần lượt là hình chiếu vuông góc của N, Q trên (P) thì

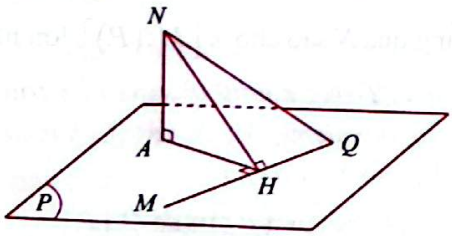
$$d\left[N;(P)\right]+d\left[Q;(P)\right]=NF+QG\le NI+IQ=NQ$$

với I là giao điểm của GN và (P). Suy ra:

$$\max T = NQ \Leftrightarrow \begin{cases} F \equiv I \\ G \equiv I \end{cases} \text{hay } (P)\perp QN.$$

Do đó $\overline{QN}$ là VTPT của (P).

TH3: *$mp(P)$ qua M và một trong 2 điểm còn lại, chẳng hạn là Q.*



Khi đó $T = NA \le NH$, trong đó A là hình chiếu của N trên (P) và H là hình chiếu vuông góc của N lên đường thẳng MQ. Vậy $\max T = NH$. Nhưng $NH \le NQ$ ($NQ = \max T$ ở trường hợp 2) nên ta không cần xét trường hợp này.

TH4: *$mp(P)$ qua 3 điểm M, N, Q.*

Khi đó $T = d\left[N;(P)\right]+d\left[Q;(P)\right]=0$

Tóm lại: $T = \max\{2AM; QN\}$, trong đó A là trung điểm của đoạn NQ.

Thí dụ 2. *Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;1;1), N(0;2;0)$ và $Q(0;0;4)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M sao cho $T = d\left[N;(P)\right]+d\left[Q;(P)\right]$ lớn nhất. Viết phương trình mặt phẳng (P).*

Lời giải. Gọi A là trung điểm của NQ, suy ra:

$$A(0;1;2), 2MA = 2\sqrt{2};\ NQ = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} > 2MA.$$

Ta thấy $\max T = 2\sqrt{5}$ khi (P) qua M và nhận $\overline{NQ} = (0;-2;4) = -2(0;1;-2)$ làm VTPT và phương trình của (P) là:

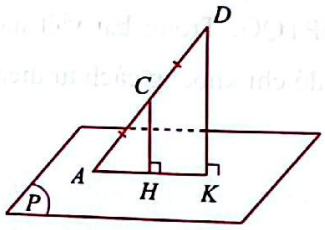
$$0(x-1)+1(y-1)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow y-2z+1=0.$$

Thí dụ 3. (Trích Đề thi HK2 toán 12, năm học 2017 – 2018, sở GD&ĐT Tây Ninh).

Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-1;-4;4)$, $B(1;7;-2), C(1;4;-2)$. Mặt phẳng (P): $2x+by+cz+d=0$ qua A và thỏa mãn $T = d\left[B;(P)\right]+2d\left[C;(P)\right]$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $b+c+d$.

A. 52 B. 10 C. 77 D. 65

Lời giải.



Gọi D là điểm đối xứng của A qua C (tức là C là trung điểm của AD) thì $D(3;12;-8)$. Khi đó

$$d\left[D;(P)\right]=2d\left[C;(P)\right].$$

Suy ra: $T = d\left[B;(P)\right]+2d\left[C;(P)\right]$

$$= d\left[B;(P)\right]+d\left[D;(P)\right].$$

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BD thì $M\left(2;\frac{19}{2};-5\right)$ và

$$2AM = 2\sqrt{3^2+\left(\frac{19}{2}+4\right)^2+9^2} = 2\sqrt{\frac{1089}{4}} = 33.$$

Vì $BD = \sqrt{65} < 2AM$ nên theo bài toán tổng quát ở trên thì $T\max \Leftrightarrow (P)$ nhận $\overline{AM} = \left(3;\frac{27}{2};-9\right) = \frac{3}{2}(2;9;-6)$ làm VTPT. Suy ra phương trình của (P) là:

$$2(x+1)+9(y+4)-6(z-4)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x+9y-6z+62=0.$$

Suy ra $b+c+d=65$ nên ta chọn đáp án là D.

Bài tương tự

1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3), B(-1;4;-5)$. Viết phương

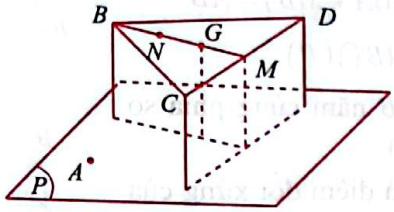
Được quét bằng CamScanner

trình mp(P) đi qua gốc tọa độ O sao cho $T=d\left[A;(P)\right]+3d\left[B;(P)\right]$ lớn nhất.

2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3), B(-1;4;-5)$. Viết phương trình mp(P) đi qua gốc tọa độ O sao cho $T=2d\left[A;(P)\right]+3d\left[B;(P)\right]$ lớn nhất.

Bài toán 3. *Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm A, B, C, D. Xác định mặt phẳng (P) qua A sao cho ba điểm B, C, D nằm về cùng một phía với (P) và $T=d\left[B;(P)\right]+d\left[C;(P)\right]+d\left[D;(P)\right]$ lớn nhất.*

Lời giải.



Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (là trọng tâm ΔBCD nếu B, C, D không thẳng hàng). Ta chứng minh được rằng:

$$T=d\left[B;(P)\right]+d\left[C;(P)\right]+d\left[D;(P)\right]=3d\left[G;(P)\right].$$

Thật vậy, gọi M là trung điểm của CD và N là trung điểm của BG thì

$$d\left[C;(P)\right]+d\left[D;(P)\right]=2d\left[M;(P)\right];$$

$$d\left[B;(P)\right]+d\left[G;(P)\right]=2d\left[N;(P)\right].$$

Cộng hai đẳng thức trên ta được:

$$T+d\left[G;(P)\right]=2\left(d\left[M;(P)\right]+d\left[N;(P)\right]\right).$$

Do G là trung điểm của MN nên

$$d\left[M;(P)\right]+d\left[N;(P)\right]=2d\left[G;(P)\right].$$

Vậy $T+d\left[G;(P)\right]=4d\left[G;(P)\right]\Rightarrow T=3d\left[G;(P)\right]$.

Do đó $T_{max}\Leftrightarrow GA\perp(P)$.

Thí dụ 4. *Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3,0,0), B(0,6,0), D(0,0,9)$. Xác định mặt phẳng (P) qua O sao cho ba điểm A, B, C nằm về cùng một phía với (P) và $T=d\left[A;(P)\right]+d\left[B;(P)\right]+d\left[C;(P)\right]$ lớn nhất.*

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1$ B. $x+2y+3z=0$

C. $2x+y+3z=0$ D. $3x+2y+z=0$

Lời giải. Vì A, B, C không thẳng hàng nên gọi G là trọng tâm của ΔABC thì $G(1;2;3)$. Khi đó:

$\max T=d\left[A;(P)\right]+d\left[B;(P)\right]+d\left[C;(P)\right]=3d\left[G;(P)\right]$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG}=(1;2;3)$ là VTPT của (P). Suy ra mp(P) có phương trình là : $x+2y+3z=0$. Ta chọn đáp án là B.

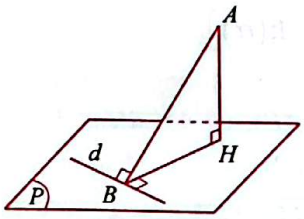
Bài tương tự

1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3,0,0), B(0,6,0), C(0,0,9)$. Xác định mặt phẳng (P) qua O sao cho ba điểm A, B, C nằm về cùng một phía với (P) và $T=d\left[A;(P)\right]+2d\left[B;(P)\right]+3d\left[C;(P)\right]$ lớn nhất.

2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3,0,0), B(0,6,0), C(0,0,9)$. Xác định mặt phẳng (P) qua A sao cho ba điểm O, B, C nằm về cùng một phía với (P) và $T=d\left[O;(P)\right]+d\left[B;(P)\right]+d\left[C;(P)\right]$ lớn nhất.

Bài toán 4. *Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho trước đường thẳng d và một điểm A không thuộc d. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d sao cho $d\left[A;(P)\right]$ lớn nhất.*

Lời giải.



Gọi H, B lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên (P) và d. Khi đó: $d\left[A;(P)\right]=AH\le AB$ nên

$$d\left[A;(P)\right]_{max}=AB\Leftrightarrow AB\perp(P).$$

Vậy (P) qua B, vuông góc với AB.

Thí dụ 5 (Trích đề thi HK2, năm học 2016 – 2017 của sở GD&ĐT Vĩnh Long).

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho (α) là mặt phẳng chứa trục Oy và cách $A(1;3;5)$ một đoạn dài nhất. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $x+5z-18=0$ B. $x+5z=0$

C. $3x+4z=0$ D. $x+5y=0$

Được quét bằng CamScanner

Lời giải. Cách 1 *(Áp dụng bài toán 4).*

Gọi B là hình chiếu vuông góc của A trên Oy, thì $B(0;3;0)$ và $\overrightarrow{BA}=(1;0;5)$. Mp$(\alpha)$ cần tìm đi qua B, nhận $\overrightarrow{BA}=(1;0;5)$ làm VTPT nên có phương trình: $x+5z=0$. Vậy ta chọn B.

Cách 2 *(Dùng cách kiểm tra điều kiện và loại trừ).* Kiểm tra mặt phẳng chứa Oy, tức là chứa $O(0;0;0), M(0;1;0)$ ta loại các phương án A, D. Tính khoảng cách từ A đến mp(α) ở phương án B, C và so sánh ta có:

$$d\left[A;(\alpha)\right]=\frac{|1+5.5|}{\sqrt{1^2+5^2}}=\frac{26}{\sqrt{26}}=\sqrt{26};$$

$$d\left[A;(\alpha)\right]=\frac{|3.1+4.5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{23}{5}<\sqrt{26}.$$

Vậy ta chọn B.

Bài tương tự

1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;3;5)$ và (α) là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua trục Ox. Tính $\max d\left[A;(\alpha)\right]$.

2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;3;5)$ và (α) là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua trục Oz. Tìm tọa độ điểm B sao cho $AB=\max d\left[A;(\alpha)\right]$.

Bài toán 5. *Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho mp(P), và hai điểm A, B. Một điểm M thay đổi trên (P).*

1. *Tìm* $\min\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$.
2. *Tìm* $\min\left|m\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}\right|, m,n\in\mathbb{R}$.
3. *Tìm* $\min(MA+MB)$.
4. *Tìm* $\max|MA-MB|$, *với* $d\left[A;(P)\right]\neq d\left[B;(P)\right]$.
5. *Tìm* $\min\left(mMA^2+nMB^2\right), m,n\geq 0$.

Lời giải. 1) Chú ý rằng

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|2\overrightarrow{MI}\right|=2MI\geq 2d\left[I;(P)\right],$$

với I là trung điểm AB.

Suy ra $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|_{\min}=2d\left[I;(P)\right]$.

2) Ta có: $\left|m\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}\right|=\left|m\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+n\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\right|$

$$=\left|(m+n)\overrightarrow{MI}+\left(m\overrightarrow{IA}+n\overrightarrow{IB}\right)\right|.$$

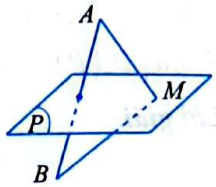
Ta tìm điểm I sao cho $m\overrightarrow{IA}+n\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ thì

$$\left|m\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}\right|=\left|(m+n)\overrightarrow{MI}\right|=|m+n|MI$$
$$\geq(m+n)d\left[I;(P)\right].$$

Suy ra $\min\left|m\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}\right|=(m+n)d\left[I;(P)\right]$ khi $M\equiv H$ là hình chiếu của I lên (P).

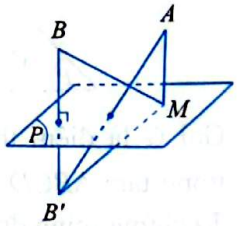
3) Ta xét 2 trường hợp:

TH1: A, B nằm khác phía so với mp(P).



Vì $MA+MB\geq AB=\text{const}$ nên $\min(MA+MB)=AB$ khi $M=AB\cap(P)$.

TH2 : A, B nằm cùng phía so với mp (P)

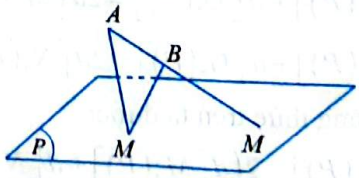


Gọi B' là điểm đối xứng của B qua mp(P). Khi đó $MA+MB=MA+MB'\geq AB'$.

Vậy $\min(MA+MB)=AB'$ khi $M=AB'\cap(P)$.

4) Ta xét hai trường hợp

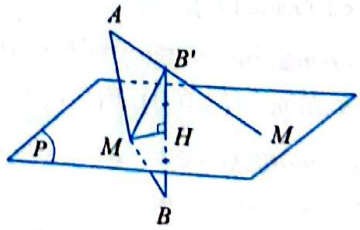
TH1: A, B nằm cùng phía so với mp(P); AB không song song (P).



Vì $|MA-MB|\leq AB=\text{const}$ nên

$\max|MA-MB|=AB$ khi $M=AB\cap(P)$.

TH2: A, B nằm khác phía so với mp(P) và $d\left[A;(P)\right]\neq d\left[B;(P)\right]$



Gọi B' là điểm đối xứng của B qua mp(P).

Khi đó $|MA-MB|=|MA-MB'|\leq AB'=\text{const}$

Vậy $\max|MA-MB|=AB'$ khi $M=AB'\cap(P)$.

Được quét bằng CamScanner

5) Ta có: $mMA^2+nMB^2=m\overrightarrow{MA}^2+n\overrightarrow{MB}^2$

$=m\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+n\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$=(m+n)MI^2+2\overrightarrow{MI}\left(m\overrightarrow{IA}+n\overrightarrow{IB}\right)+mIA^2+nIB^2.$

Ta chọn I là điểm thỏa mãn $m\overrightarrow{IA}+n\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ thì

$mMA^2+nMB^2=(m+n)MI^2+mIA^2+nIB^2$

$\geq(m+n)\left(d\left[I;(P)\right]\right)^2+mIA^2+nIB^2=\text{const}$. Vậy:

$\min\left(mMA^2+nMB^2\right)=(m+n)\left(d\left[I;(P)\right]\right)^2+mIA^2+nIB^2$

khi M trùng với hình chiếu của điểm I trên mp(P).

Thí dụ 6. *Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng* $(P):x-y+3z-4=0$ *và hai điểm* $A(1;0;0),B(-1;2;0)$. *M là điểm thay đổi trong mặt phẳng (P). Tính*

a) $\min\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$. b) $\min\left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|$.

c) $\min(MA+MB)$. d) $\max|MA-MB|$.

e) $\min\left(2MA^2+3MB^2\right)$.

Lời giải. a) Gọi I là trung điểm của đoạn AB thì $I(0;1;0)$. Khi đó:

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|2\overrightarrow{MI}\right|=2MI\geq 2d\left(I;(P)\right).$$

Vậy $\min\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=2d\left(I;(P)\right)=2.\dfrac{|-5|}{\sqrt{11}}=\dfrac{10\sqrt{11}}{11}$.

b) Ta tìm điểm $I(x;y;z)$ sao cho: $\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow(1-x;-y;-z)-2(-1-x;2-y;-z)=(0;0;0)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}1-x+2+2x=0\\-y-4+2y=0\\-z+2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=4\\z=0\end{cases}\Rightarrow I(-3;4;0).$

Khi đó: $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}-2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)$

$=-\overrightarrow{MI}+\left(\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}\right)=\overrightarrow{IM}.$

Do đó: $\min\left|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right|=\min\left|\overrightarrow{IM}\right|=d\left[I;(P)\right]$

$=\dfrac{|-3-4+3.0-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}}=\sqrt{11}.$

c) Khi thay tọa độ A, B vào vế trái của phương trình của $(P):x-y+3z-4=0$ ta được kết quả là hai số cùng âm nên 2 điểm A,B nằm cùng phía với (P). Gọi d là đường thẳng qua A và vuông góc với (P) thì d có phương trình tham số là:

$\begin{cases}x=1+t\\y=-t\\z=3t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$. Gọi H là giao điểm của d và (P) thì $H\left(\dfrac{14}{11};\dfrac{-3}{11};\dfrac{9}{11}\right)$. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P) thì H là trung điểm của AA' nên $A'\left(\dfrac{17}{11};\dfrac{-6}{11};\dfrac{18}{11}\right)$. Khi đó A' và B nằm khác phía so với (P) và $MA+MB=MA'+MB\geq A'B$.

Do đó $\min(MA+MB)=A'B=\dfrac{2\sqrt{473}}{11}$ khi $M=A'B\cap(P)$.

d) Theo câu c) thì A,B nằm cùng phía so với (P) nên $|MA-MB|\leq AB$, đẳng thức xảy ra khi $M=AB\cap(P)$. Do đó: $\max|MA-MB|=AB=\sqrt{8}$.

e) Gọi $K(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn:

$2\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{KB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2(1-x;-y;-z)+3(-1-x;2-y;-z)=(0;0;0)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2-2x-3-3x=0\\-2y+6-3y=0\\-2z-3z=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{-1}{5},y=\dfrac{6}{5},z=0$

$\Rightarrow K\left(\dfrac{-1}{5};\dfrac{6}{5};0\right)$. Khi đó: $2MA^2+3MB^2$

$=2\overrightarrow{MA}^2+3\overrightarrow{MB}^2=2\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB}\right)^2$

$=5MK^2+2\overrightarrow{MK}.\left(2\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{KB}\right)+2KA^2+3KB^2$

$=5MK^2+2KA^2+3KB^2$

$\geq 5\left(d\left[K;(P)\right]\right)^2+2KA^2+3KB^2$. Vậy:

$\min\left(2MA^2+3MB^2\right)=5\left(d\left[K;(P)\right]\right)^2+2KA^2+3KB^2$

với $d\left[K;(P)\right]=\dfrac{\left|\dfrac{-1}{5}-\dfrac{6}{5}+3.0-4\right|}{\sqrt{11}}=\dfrac{27}{5\sqrt{11}}=\dfrac{27\sqrt{11}}{55}.$

$KA^2=\left(\dfrac{-1}{5}-1\right)^2+\left(\dfrac{6}{5}\right)^2=\dfrac{72}{25};$

$KB^2=\left(\dfrac{-1}{5}+1\right)^2+\left(\dfrac{6}{5}-2\right)^2=\dfrac{32}{25}.$

$\min\left(2MA^2+3MB^2\right)=5\left(\dfrac{27\sqrt{11}}{55}\right)^2+2.\dfrac{72}{25}+3.\dfrac{32}{25}$

$=1257/55.$

Được quét bằng CamScanner

Bài toán 6. *Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho mp(P), và ba điểm A, B, C, các số $m,n,p\in\mathbb{R}$, điểm M thay đổi trên (P).*

1) *Tìm* $\min\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$.

2) *Tìm* $\min\left|m\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}+p\overrightarrow{MC}\right|$.

Lời giải. 1) Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ (nếu A, B, C không thẳng hàng thì G là trọng tâm của ΔABC). Khi đó :

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\overrightarrow{MG}\right|\geq 3d\left[G;(P)\right]=3GH.$$

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt GTNN khi M trùng với hình chiếu H của G trên (P).

2) Gọi G là điểm thỏa mãn $m\overrightarrow{GA}+n\overrightarrow{GB}+p\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Khi đó:

$$\left|m\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}+p\overrightarrow{MC}\right|=\left|(m+n+p)\overrightarrow{MG}\right|$$
$$\geq|m+n+p|d\left[G;(P)\right]=|m+n+p|GH,$$

với hình chiếu H của G trên (P). Vậy:

$$\min\left|m\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}+p\overrightarrow{MC}\right|=|m+n+p|d\left[G;(P)\right].$$

Thí dụ 7. (Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu – Đồng Tháp – lần II, 2017). *Trong không gian Oxyz, cho 3 điểm $A(0;1;2),B(1;1;1),C(2;-2;3)$ và mặt phẳng $(P):x-y+z+3=0$. Tìm điểm M trên (P) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.*

A. $M(1;0;2)$ B. $M(0;1;1)$

C. $M(-1;2;0)$ D. $M(-3;1;1)$

Lời giải. Cách 1 *(Thử và loại).* Kiểm tra tọa độ M thuộc (P) ta loại được phương án A và B.

Tính $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ cho cả 2 phương án còn lại và so sánh, ta có bảng sau:

Tọa độ M	$M(-1;2;0)$	$M(-3;1;1)$
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$	$(6;-6;6)$	$(12;-3;3)$
$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$	$6\sqrt{3}$	$9\sqrt{2}$

Ta thấy phương án C là câu trả lời đúng.

Cách 2 *(Tìm điểm M).* Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Khi đó:

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\overrightarrow{MG}\right|\geq 3d\left[G;(P)\right]=3GH.$$

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt GTNN khi M trùng với hình chiếu H của G lên (P). Ta có $G(1;0;2)$.

Đường thẳng d qua G, vuông góc với (P) có phương trình tham số là: $\begin{cases}x=1+t\\y=-t\\z=2+t\end{cases}$.

Giải hệ gồm phương trình của (P) và d ta có $t=-2$, suy ra: $x=-1;y=2;z=0$ hay $H(-1;2;0)$ nên ta chọn C.

Cách 3. *(Tìm điểm M).* Gọi $M(x;y;z)$, ta có:

$\overrightarrow{MA}=(-x;1-y;2-z)$; $\overrightarrow{MB}=(1-x;1-y;1-z)$;

$\overrightarrow{MC}=(2-x;-2-y;3-z)$

$\Rightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(3-3x;-3y;6-3z)$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\sqrt{(3-3x)^2+(-3y)^2+(6-3z)^2}$

Mặt khác: $M\in(P)\Rightarrow x-y+z+3=0$

$\Rightarrow x-y+z=-3$. Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có: $\left[(3x-3)^2+(3y)^2+(3z-6)^2\right]\left[1^2+(-1)^2+1^2\right]$

$$\geq\left[1(3x-3)-1.3y+1.(3z-6)\right]^2$$
$$=\left[3(x-y+z)-9\right]^2=(-3.3-9)^2=18^2$$
$$\Leftrightarrow(3x-3)^2+(3y)^2+(3z-6)^2\geq 3.6^2$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{(3x-3)^2+(3y)^2+(3z-6)^2}\geq 6\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|\geq 6\sqrt{3}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{3x-3}{1}=\dfrac{3y}{-1}=\dfrac{3z-6}{1}\\x-y+z+3=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=-1,y=2,z=0$. Vậy $M(-1;2;0)$ là điểm cần tìm.

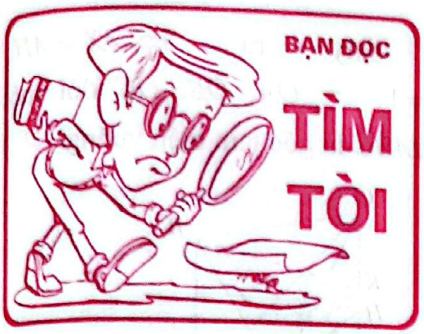
Bài tương tự

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-y+z+3=0$ và ba điểm $A(1;0;0),B(0;2;0),C(0;0;-3)$..

a) Tìm điểm M trên (P) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm $\min\left|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ với M là điểm di động trên (P).

Được quét bằng CamScanner



TƯƠNG TỰ TRONG KHÔNG GIAN CỦA BÀI TOÁN PHẲNG

NGUYỄN MINH HÀ
(Hà Nội)

Có những bài toán phẳng mà việc giải chúng khá đơn giản nhưng việc giải bài toán tương tự trong không gian của chúng lại rất phức tạp. Bài báo này xin giới thiệu một bài toán phẳng như vậy.

Để cho bạn đọc tiện theo dõi, sau đây xin giới thiệu một số kí hiệu thường gặp.

- (ABC): mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C.
- S_{ABC}: diện tích tam giác ABC.
- V_{ABCD}: thể tích tứ diện $ABCD$.
- $\vec{a}.\vec{b}$: tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$.
- $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$: tích có hướng của hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$.
- (m,n): góc giữa hai đường thẳng m,n.
- $\left((P),(Q)\right)$: góc giữa hai mặt phẳng $(P),(Q)$.
- (OA): góc nhị diện cạnh OA của tứ diện $OABC$.
- $\left(\Delta,(P)\right)$: góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P).

Bài toán 1. *Cho tam giác OAB. Điểm M thuộc đoạn AB. Các điểm X, Y theo thứ tự thuộc OB, OA sao cho MX, MY theo thứ tự song song với OA, OB. Các điểm U, V theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên OB, OA. Chứng minh rằng*

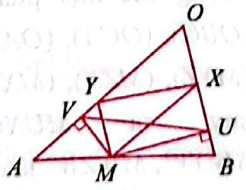
$$S_{MXY} \ge S_{MUV}.$$

Lời giải. Dễ thấy: $\widehat{XMY} = \widehat{AOB} = 180° - \widehat{UMV}$,

$MX \ge MU, MY \ge MV$ (h.1).

Do đó:

$$S_{MXY} = \frac{1}{2}MX.MY.\sin\widehat{XMY}$$
$$\ge \frac{1}{2}MU.MV.\sin\widehat{UMV}$$
$$= S_{MUV}.$$



Hình 1

Vậy $S_{MXY} \ge S_{MUV}$. Đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow MX = MU, MY = MV$$
$$\Leftrightarrow MU // OA, MV // OB \Leftrightarrow \widehat{AOB} = 90°.$$

Bài toán sau đây là tương tự trong không gian của bài toán 1 và việc giải nó không hề đơn giản.

Bài toán 2. *Cho tứ diện OABC. Điểm M thuộc tam giác ABC. Các điểm X, Y, Z theo thứ tự thuộc các mặt OBC, OCA, OAB sao cho MX, MY, MZ theo thứ tự song song với OA, OB, OC. Các điểm U, V, W theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB). Chứng minh rằng* $V_{MXYZ} \ge V_{MUVW}$.

Lời giải. Ta cần có hai bổ đề

Bổ đề 1. *Cho hai tứ diện OABC và OXYZ sao cho OX, OY, OZ theo thứ tự vuông góc với các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB). Khi đó*

$$\frac{V_{OABC}}{V_{OXYZ}} = \frac{OA.OB.OC\sin\widehat{AOB}}{OX.OY.OZ\sin(OC)}$$

Chứng minh. Dễ thấy: $V_{OABC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OC}\right|$

và $V_{OXYZ} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}\right].\overrightarrow{OZ}\right|$.

Rõ ràng $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right] \perp (OAB), \left[\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}\right] \perp (OXY)$.

Từ đó, chú ý rằng OX, OY, OZ theo thứ tự vuông góc với các mặt phẳng $(OBC), (OCA), (OAB)$, suy ra: $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right] // \overrightarrow{OZ}, \left[\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}\right] // \overrightarrow{OC}$.

Do đó các góc giữa hai vectơ $\left(\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right],\overrightarrow{OC}\right)$ và $\left(\left[\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}\right],\overrightarrow{OZ}\right)$ hoặc bằng nhau hoặc bù nhau. Điều đó có nghĩa là:

$$\left|\cos\left(\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right],\overrightarrow{OC}\right)\right| = \left|\cos\left(\left[\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}\right],\overrightarrow{OZ}\right)\right|.$$

Mặt khác, vì OX, OY theo thứ tự vuông góc với các mặt phẳng $(OBC), (OCA)$ nên góc giữa hai

Được quét bằng CamScanner

đường thẳng (OX,OY) và góc giữa hai mặt phẳng $((OCA),(OCB))$ bằng nhau.

Vậy chú ý rằng giữa hai đường thẳng (OX,OY) và góc giữa hai tia OX,OY hoặc bằng nhau hoặc bù nhau; góc giữa hai mặt phẳng (OCA), (OCB) và góc nhị diện (OC) hoặc bằng nhau hoặc bù nhau, ta có:

$$\frac{V_{OABC}}{V_{OXYZ}}=\frac{S_{OAB}.OC}{S_{OXY}.OZ}=\frac{OA.OB.OC\sin\widehat{AOB}}{OX.OY.OZ\sin\widehat{XOY}}$$

$$=\frac{OA.OB.OC\sin\widehat{AOB}}{OX.OY.OZ\sin(OC)}.$$

Chú ý. Bổ đề 1 cho chúng ta một cách chứng minh khác của kết quả đẹp sau, nó thường được gọi là định lí sin cho góc tam diện:

$$\frac{\sin\widehat{BOC}}{\sin(OA)}=\frac{\sin\widehat{COA}}{\sin(OB)}=\frac{\sin\widehat{AOB}}{\sin(OC)}.$$

Bổ đề 2. *Cho tứ diện OABC. X, Y, Z theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B, C xuống các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB). Khi đó:*

$$\frac{OA.OB.OC.\sin\widehat{AOB}}{AX.BY.CZ.\sin(OC)}\geq 1.$$

Chứng minh. (h.2) Gọi (P) là một mặt phẳng vuông góc với OC; H, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B trên OC. Qua phép chiếu vuông góc xuống mắt phẳng (P), A, B, C theo thứ tự biến thành A', B', C' và O, H, K cùng biến thành C'. Dễ thấy $AA'C'H$, $BB'C'K$ là các hình chữ nhật. Vì CO, CZ theo thứ tự vuông góc với các mặt phẳng (P), (OAB) nên góc giữa hai đường thẳng (CO,CZ) và góc giữa hai mặt phẳng $((P),(OAB))$ bằng nhau, gọi số đo của chúng là φ. Vậy chú ý rằng ΔCOZ vuông tại Z, ta có:

$$\frac{CZ}{CO}=\cos\varphi=\frac{S_{C'A'B'}}{S_{OAB}}=\frac{C'A'.C'B'\sin\widehat{A'C'B'}}{OA.OB\sin\widehat{AOB}}$$

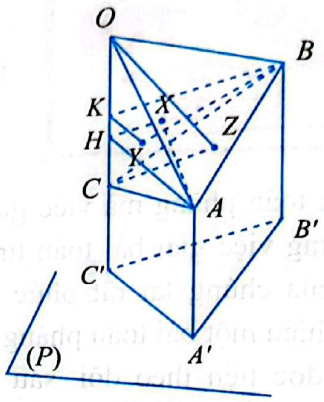
$$=\frac{HA.KB\sin(OC)}{OA.OB\sin\widehat{AOB}}.$$

Từ đó, chú ý rằng $AX\leq AH, BY\leq BK$, suy ra:

$$\frac{AX.BY.CZ\sin(OC)}{OA.OB.OC\sin\widehat{AOB}}\leq\frac{HA.KB.CZ\sin(OC)}{OA.OB.OC\sin\widehat{AOB}}=\cos^2\varphi\leq 1.$$

Điều đó có nghĩa là: $\frac{OA.OB.OC.\sin\widehat{AOB}}{AX.BY.CZ.\sin(OC)}\geq 1.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow AX=AH$, $BY=BK, \cos\varphi=1 \Leftrightarrow OA$, OB, OC đôi một vuông góc $\Leftrightarrow OABC$ là góc tam diện vuông.



Hình 2

Chú ý. Vì $\sin\left(CO,(AOB)\right)=\frac{CZ}{CO}$

$$=\frac{HA.KB\sin(OC)}{OA.OB\sin\widehat{AOB}}=\sin\widehat{COA}\sin\widehat{COB}.\frac{\sin(OC)}{\sin\widehat{AOB}}$$

nên theo định lí sin cho góc tam diện, ta có kết quả đẹp sau, tạm gọi nó là định lí sin mở rộng cho góc tam diện:

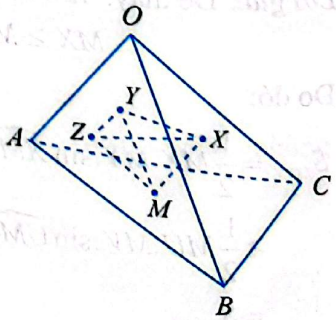
$$\frac{\sin\widehat{BOC}}{\sin(OA)}=\frac{\sin\widehat{COA}}{\sin(OB)}=\frac{\sin\widehat{AOB}}{\sin(OC)}=\frac{\sin\widehat{AOB}\sin\widehat{AOC}}{\sin\left(AO,(BOC)\right)}.$$

$$=\frac{\sin\widehat{BOC}\sin\widehat{BOA}}{\sin\left(BO,(COA)\right)}=\frac{\sin\widehat{COA}\sin\widehat{COB}}{\sin\left(OC,(AOB)\right)}.$$

Trở lại giải bài toán 2. (h.3)

Gọi U', V', W' theo thứ tự là hình chiếu của X, Y, Z trên các mặt phẳng (MYZ), (MZX), (MXY).

Vì MX, MY, MZ theo thứ tự song song với OA, OB, OC nên các mặt phẳng (MYZ), (MZX), (MXY) theo thứ tự song song với các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB). Từ đó, chú ý rằng U, V, W, U', V', W' theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M, M, M, X, Y, Z xuống các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB), (MYZ), (MZX), (MXY), suy ra $MUXU'$, $MVYV'$, $MWZW'$ là các hình chữ nhật.



Hình 3

Do đó: $MU=XU', MV=YV', MW=ZW'$. ☞

Được quét bằng CamScanner

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 128

PROBLEM. *Given two sequences* $a_1, ..., a_n$ *and* $b_1, ..., b_n$ *which satisfy* $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \geq 0$ *and* $b_1 \geq 0, b_1 + b_2 \geq 0, ..., b_1 + b_2 + ... + b_n \geq 0.$

Show that $a_1b_1 + ... + a_nb_n \geq 0.$

***Solution*:** Let

$$B_1 = b_1,\ B_2 = b_1 + b_2, ..., B_n = b_1 + b_2 + ... + b_n.$$

By the Abel transformation, which was introduced in the 585 issue, we get

$$a_1b_1 + ... + a_nb_n = (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + ... + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_nB_n.$$

By hypotheses, every term in the right hand side is non-negative and hence so is the left hand side.

TỪ VỰNG/KÍ HIỆU

transformation : *phép biến đổi*

term : *số hạng*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 126

BÀI TOÁN. *Cho hai dãy số* $a_1, ..., a_n$ *và* $b_1, ..., b_n$. *Đặt* $B_1 = b_1,\ B_2 = b_1 + b_2, ...$

$$B_n = b_1 + b_2 + ... + b_n.$$

Chứng minh rằng

$$a_1b_1 + ... + a_nb_n = (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + ... + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_nB_n.$$

Lời giải. Chúng ta khai triển và nhóm lại về phải từ phía cuối. Ví dụ:

$$(a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_nB_n = a_{n-1}B_{n-1} + a_n(B_n - B_{n-1}) = a_{n-1}B_{n-1} + a_nb_n.$$

Sau đó, ta tiếp tục làm tương tự để thu được đẳng thức: $(a_{n-2} - a_{n-1})B_{n-2} + a_{n-1}B_{n-1} + a_nb_n$

$$= a_{n-2}B_{n-2} + a_{n-1}(B_{n-1} - B_{n-2}) + a_nb_n = a_{n-2}B_{n-2} + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n.$$

Cứ tiếp tục như vậy, ta có thể biến đổi về phải thành về trái.

Chú ý. Đẳng thức trên thường được gọi là **biến đổi Abel**, đóng vai trò quan trọng trong việc chứng minh một số bất đẳng thức.

Nhận xét. Các bạn *Lê Bạch Hải Đăng*, lớp 3B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz, **Cộng hòa Áo** và bạn *Trương Quốc Minh*, 11B2, THPT Tây Thạnh, **TP. Hồ Chí Minh** đã có bài dịch tốt. Xin hoan nghênh hai bạn.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

****

☞ Vậy, chú ý rằng *MU*, *MV*, *MW* theo tứ tự vuông góc với các mặt phẳng (*MYZ*), (*MZX*), (*MXY*), áp dụng các bổ đề 1 và 2 cho các tứ diện *MXYZ* và *MUVW*, ta có:

$$\frac{V_{MXYZ}}{V_{MUVW}} = \frac{MX.MY.MZ}{MU.MV.MW}.\frac{\sin\widehat{XMY}}{\sin(MZ)} = \frac{MX.MY.MZ}{XU'.YV'.XW'}.\frac{\sin\widehat{XMY}}{\sin(MZ)} \geq 1.$$

Điều đó có nghĩa là $V_{MXYZ} \geq V_{MUVW}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ tam diện *M.UVW* là tam diện vuông $\Leftrightarrow$ *O.ABC* là tam diện vuông.

Giải bài toán tương tự không gian của một bài toán phẳng là một công việc rất thú vị nhưng cũng đầy thách thức.

Để kết thúc bài viết này, xin giới thiệu một bài toán phẳng và bài toán tương tự không gian của nó, xem như một bài tập.

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC, M là một điểm nằm trong tam giác. X, Y, Z theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng* $S_{XYZ} \leq \frac{1}{4}S_{ABC}$.

Bài toán 4. *Cho tứ diện ABCD, M là một điểm nằm trong tứ diện. X, Y, Z, T theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên các mặt (BCD), (CDA), (DAB), (ABC). Chứng minh rằng*

$$V_{XYZT} \leq \frac{1}{27}V_{ABCD}.$$

Được quét bằng CamScanner



BÀI TOÁN 107. *Cho tam giác ABC vuông tại A và có $\hat{B}=60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm P, Q. Chứng minh rằng $\widehat{PMQ}=90°$ khi và chỉ khi*

$$BP+\sqrt{3}CQ=BC.$$

(Trích Ví dụ 4, trang 69, tập 1, Toán 10, Bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống)

Nhận xét. Đây là một bài khá khó đối với học sinh, nhưng nếu phân tích thật tỉ mỉ thì ta có thể giải bài này bằng nhiều cách và qua đó học sinh có được nhiều kiến thức và kĩ năng quan trọng.

Lời giải. ***Cách 1.*** *Theo SGK Toán 10, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống*

Đặt $MB=MC=a$. Ta có: $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ}=0$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BP}\right).\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CQ}\right)=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{BP}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BP}.\overrightarrow{CQ}=0.$

Mặt khác ta có: $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=a.a.\cos 180^o=-a^2;$

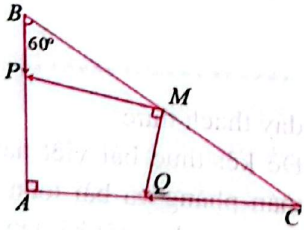
$\overrightarrow{BP}.\overrightarrow{CQ}=0$ vì $BP\perp CQ;$

$\overrightarrow{BP}.\overrightarrow{MC}=PB.a.\cos 60^o$

$=\dfrac{a}{2}.PB;$

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CQ}=a.CQ.\cos 30^o$

$=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}.CQ.$



Suy ra: $-a^2+\dfrac{\sqrt{3}a}{2}.CQ+\dfrac{a}{2}PB+0=0$

$\Leftrightarrow PB+\sqrt{3}.CQ=2a=BC$ (đpcm).

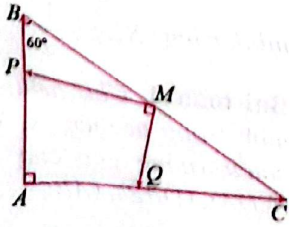
Cách 2. Rõ ràng ta có

$BC=2AB$

và $BC=\dfrac{2}{\sqrt{3}}AC.$

Đặt $\overrightarrow{PB}=x.\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{QC}=y.\overrightarrow{AC}$ với $0<x,y<1.$



Khi đó: $x=\dfrac{PB}{AB}=\dfrac{2PB}{BC};\ y=\dfrac{QC}{AC}=\dfrac{2QC}{\sqrt{3}BC}$ (1).

Mặt khác ta có:

$$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=(1-x)\overrightarrow{AB}-\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$$

$$=\frac{1-2x}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC};$$

$$\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AM}=(1-y)\overrightarrow{AC}-\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1-2y}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Vì $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ}=0$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ nên ta có:

$$\frac{2x-1}{4}AB^2+\frac{2y-1}{4}AC^2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{4}.\frac{BC^2}{4}+\frac{2y-1}{4}.\frac{3BC^2}{4}=0$$

$\Leftrightarrow (2x-1)+3(2y-1)=0\Leftrightarrow x+3y=2$ (2).

Thay (1) vào (2) ta được:

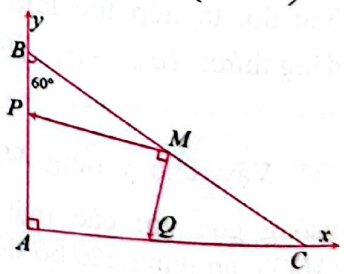
$\dfrac{2PB}{BC}+3.\dfrac{2QC}{\sqrt{3}BC}=2\Leftrightarrow PB+\sqrt{3}QC=BC$ (đpcm).

Cách 3. Không mất tính tổng quát, giả sử $AB=1$, khi đó $AC=\sqrt{3}$. Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

Ta có: $A(0;0)$, $B(0;1)$, $C(\sqrt{3};0)$, $M=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2}\right).$

Đặt $P(0;p)$ và $Q(q;0)$ với $0<p<1,\ 0<q<\sqrt{3}.$

Lưu ý $PB=1-p$ và $CQ=\sqrt{3}-q$.



Vì $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ}=0$ nên suy ra:

$\dfrac{-\sqrt{3}}{2}.\left(q-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(p-\dfrac{1}{2}\right).\dfrac{-1}{2}=0\Leftrightarrow \sqrt{3}q+p=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\left(\sqrt{3}-CQ\right)+(1-PB)=2$

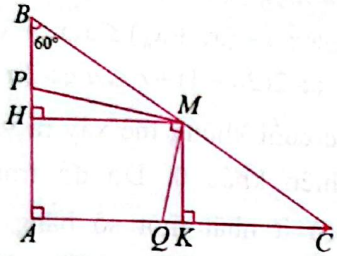
$\Leftrightarrow PB+\sqrt{3}CQ=2=BC$ (đpcm).

Cách 4. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên cạnh AB, AC.

Ta có: $\widehat{PMH}=90°-\widehat{HMQ}=\widehat{QMK}.$

Được quét bằng CamScanner

Chứng tỏ $\Delta PHM \backsim \Delta QKM$.



Suy ra $\dfrac{PH}{QK}=\dfrac{HM}{MK}=\dfrac{AC}{AB}=\tan 60°=\sqrt{3}$.

Từ đây suy ra:

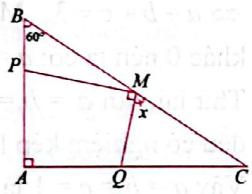
$$PH=\sqrt{3}QK \Leftrightarrow \frac{AB}{2}-BP=\sqrt{3}\left(QC-\frac{AC}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow BP+\sqrt{3}QC=\frac{1}{2}\left(AB+\sqrt{3}AC\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{BC}{2}+\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}BC}{2}\right)=BC \text{ (đpcm).}$$

Cách 5. Đặt $\widehat{CMQ}=x$ thì $\widehat{BMP}=90°-x$.

Theo định lý sin, ta có:



$$CQ=\frac{MC.\sin x}{\sin(150°-x)}=\frac{BC.\sin x}{2\sin(150°-x)};$$

$$BP=\frac{MB.\cos x}{\sin(30°+x)}=\frac{BC.\cos x}{2\sin(30°+x)}.$$

Khi đó suy ra:

$$BP+\sqrt{3}CQ=BC.\left[\frac{\cos x}{2\sin(30°+x)}+\frac{\sqrt{3}\sin x}{2\sin(150°-x)}\right].$$

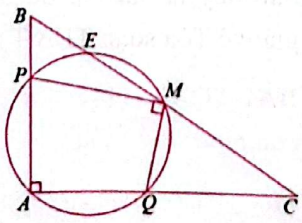
Để giải quyết trọn vẹn bài toán, ta chỉ cần chứng minh: $\dfrac{\cos x}{2\sin(30°+x)}+\dfrac{\sqrt{3}\sin x}{2\sin(150°-x)}=1$ (*).

Đẳng thức (*) đúng vì:

$$\text{VT(*)}=\frac{\cos x}{\cos x+\sqrt{3}\sin x}+\frac{\sqrt{3}\sin x}{\cos x+\sqrt{3}\sin x}=1=\text{VP(*)}.$$

Cách 6. Gọi E là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AQMP$ với cạnh BC (E khác M).

Khi đó theo tính chất phương tích ta có:



$$BP.BA=BE.BM=BE.\frac{BC}{2} \quad (1)$$

và $CQ.CA=CE.CM=CE.\dfrac{BC}{2}$ (2).

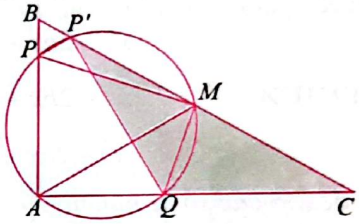
Từ (1), (2) suy ra:

$$BP.BA+CQ.CA=BE.\frac{BC}{2}+CE.\frac{BC}{2}$$

$$\Leftrightarrow BP.\frac{BC}{2}+CQ.\frac{\sqrt{3}BC}{2}=\left(BE+CE\right)\frac{BC}{2}$$

$$\Leftrightarrow BP+\sqrt{3}CQ=BC \text{ (đpcm).}$$

Cách 7. Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $APMQ$. Dựng điểm P' thuộc cạnh BC sao cho PP' song song với AM.



Vì $APP'M$ là hình thang cân nên P' cũng thuộc đường tròn (C).

Suy ra $\widehat{QP'M}=\widehat{QAM}=\widehat{QCM}=30°$.

Do đó $\Delta P'QC$ cân tại Q và $\widehat{P'QC}=120°$, suy ra $\widehat{BP'P}=60°$ hay $\Delta BPP'$ đều. Do đó: $BP=BP'$.

Mặt khác, theo định lí côsin, ta có:

$$P'C=\sqrt{P'Q^2+CQ^2-2PQ.CQ\cos 120°}=\sqrt{3}CQ.$$

Suy ra: $BC=BP'+P'C=BP+\sqrt{3}CQ$ (đpcm).

LA ĐẠI CƯƠNG
(GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị)

Nhận xét. Kỳ này bạn *Nguyễn Hùng Cường*, An Nhơn, **Gia Lai** đóng góp 2 cách giải giống với tác giả bài toán; bạn *Vũ Đức Duy*, phường Bình Lợi Trung, **TP. Hồ Chí Minh** đóng góp 1 cách giải mới bằng phương pháp hình học thuần tuý nên lời giải còn dài. Xin hoan nghênh các bạn.

KHÁNH BÌNH (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 109 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30/6/2026.

BÀI TOÁN 109. *Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$$

NGÔ VĂN THÁI
(*Hưng Yên*)

Được quét bằng CamScanner



BÀI TOÁN 115 (Olympic Bulgari, vòng 3, 1997). *Tìm tất cả các số tự nhiên a, b, c khác 0 sao cho các của các phương trình*

$$x^2 - 2ax + b = 0;$$

$$x^2 - 2bx + c = 0;$$

$$x^2 - 2cx + a = 0$$

đều là các số tự nhiên.

Lời giải. Gọi (x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_6) lần lượt là các nghiệm của phương trình thứ nhất, phương trình thứ hai, phương trình thứ ba và giả sử chúng đều là các số tự nhiên.

Giả sử $x_i \geq 2$, với mọi $i = 1, 2, \ldots, 6$. Khi đó ta có: $x_i + x_j \leq x_i x_j$ (*), $\forall i, j = 1,2,\ldots,6; i \neq j$. Thật vậy, do $x_i \geq 2, x_j \geq 2$ nên $(x_i - 2)(x_i - 2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow x_i x_i \geq 2(x_i + x_j) - 4.$$

Nhưng ta có: $2(x_i + x_j) - 4 \geq x_i + x_j \Leftrightarrow x_i + x_j \geq 4$.

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do $x_i \geq 2, x_j \geq 2$. Vậy (*) được chứng minh.

Từ (*) suy ra: $2a = x_1 + x_2 \leq x_1 x_2 = b;$

$$2b = x_3 + x_4 \leq x_3 x_4 = c;$$

$$2c = x_5 + x_6 \leq x_5 x_6 = a.$$

Suy ra: $2(a + b + c) \leq a + b + c \Leftrightarrow a + b + c = 0$.

Do a, b, c là các số tự nhiên khác 0 nên đẳng thức $a + b + c = 0$ không thể xảy ra. Vậy giả sử $x_i \geq 2$, với mọi $i = 1, 2, \ldots, 6$ là sai, suy ra trong các số x_i ($i = 1,2, \ldots, 6$) có ít nhất một số $x_i < 2$. Số x_i không thể bằng 0 vì nếu không do x_i là nghiệm của một trong ba phương trình đã cho nên một trong ba số a, b, c sẽ bằng 0. Điều này trái với giả thiết a, b, c khác 0. Do vậy $x_i = 1$. Không mất tính tổng quát giả sử $x_1 = 1$. Khi đó: $1 - 2a + b = 0$.

Nếu $x_i \geq 2$ với mọi $i = 3, 4, 5, 6$ thì theo (*) ta có:

$2(b + c) = (x_3 + x_4) + (x_5 + x_6) \leq x_3 x_4 + x_5 x_6 = c + a$

$\Leftrightarrow 2b + c \leq a \Leftrightarrow 2(2a - 1) + c \leq a \Leftrightarrow 3a + c \leq 2$.

Bất đẳng thức cuối không thể xảy ra vì a, b, c là các số tự nhiên khác 0. Do đó trong các số x_3, x_4, x_5, x_6 có ít nhất một số bằng 1. Giả sử $x_3 = 1$. Khi đó ta có: $1 - 2b + c = 0$.

Bây giờ giả sử $x_5 \geq 2$ và $x_6 \geq 2$. Theo (*) ta có:

$$2c = x_5 + x_6 \leq x_5 x_6 = a$$

$\Leftrightarrow 2(2b - 1) \leq a \Leftrightarrow 4b - 2 \leq a \Leftrightarrow 4(2a - 1) - 2 \leq a$

$\Leftrightarrow 7a \leq 6$. Bất đẳng thức cuối này không đúng do b là số tự nhiên khác 0. Vậy trong hai số x_5 và x_6 có ít nhất một số bằng 1. Giả sử $x_5 = 1$. Khi đó:

$$\Leftrightarrow 1 - 2c + a = 0.$$

Đến đây ta có:

$$0 = (1 - 2a + b) + (1 - 2b + c) + (1 - 2c + a)$$

$\Leftrightarrow a + b + c = 3$. Mà a, b, c là các số tự nhiên khác 0 nên ta có: $a = b = c = 1$.

Thử lại, với $a = b = c = 1$ ta thấy ba phương trình đều có nghiệm kép là số tự nhiên $x = 1$.

Vậy $a = b = c = 1$ là các số tự nhiên cần tìm.

Nhận xét. Các bạn tham gia giải bài này đều sử dụng điều kiện biệt số Δ' phải là số chính phương để có nhưng đánh giá để tìm a, b, c. Lời giải trên dài hơn nhưng đây là một cách nhìn khác để giải bài toán này. Xin hoan nghênh các bạn: *Vũ Tuấn Minh*, 9A, THCS Lý Nam Đế, xã vạn Xuân, **Phú Thọ**; *Phùng Quang Minh*, THCS Trần Mai Ninh, phường Hạc Thành, **Thanh Hóa**; *Vũ Đức Duy*, phường Bình Lợi Trung, **TP. Hồ Chí Minh**, *Nguyễn Hùng Cường*, phường An Nhơn, **Gia lai** đã có lời giải đúng cho bài toán này.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

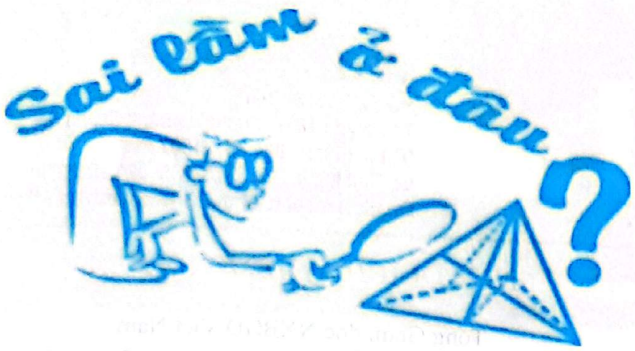
Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30/6/2026.

BÀI TOÁN 117. *Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình:*

$$x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 + \ldots + (x+7)^3 = y^3.$$

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

Được quét bằng CamScanner



GIẢI ĐÁP: AI SAI, AI ĐÚNG ?

(Đề đăng trên TH&TT số 583, tháng 1 năm 2026)

Phân tích sai lầm: Đây là bài toán mà học sinh rất dễ mắc sai lầm.

Học sinh 1 mới đưa ra điều kiện xác định của $\log_6\frac{x^2+x}{x+4}$ và chọn đáp án D nên sai.

Học sinh 2 đưa ra điều kiện xác định của $\log_6\frac{x^2+x}{x+4}$ và $\log_{\frac{2025}{2026}}(\log_6\frac{x^2+x}{x+4})$ đúng, nhưng chưa giải bất phương trình mà đã chọn đáp án C nên sai.

Học sinh 3 không tìm điều kiện xác định và đưa ra lời giải bất phương trình và sai ở bước biến đổi:

$$\log_{\frac{2025}{2026}}(\log_6\frac{x^2+x}{x+4})<\log_{\frac{2025}{2026}}1 \Leftrightarrow \log_6\frac{x^2+x}{x+4}<1,$$

chọn đáp án A nên sai.

Như vậy không có bạn nào đưa ra kết quả đúng cả.

Lời giải đúng như sau:

Điều kiện: $\begin{cases}\frac{x^2+x}{x+4}>0\\ \log_6\frac{x^2+x}{x+4}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x^2+x}{x+4}>0\\ \frac{x^2+x}{x+4}>1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2+x}{x+4}>1\Leftrightarrow\frac{x^2-4}{x+4}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4<x<-2\\ x>2\end{array}\right.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\log_{\frac{2025}{2026}}(\log_6\frac{x^2+x}{x+4})<\log_{\frac{2025}{2026}}1$$

$$\Leftrightarrow\log_6\frac{x^2+x}{x+4}>1\Leftrightarrow\log_6\frac{x^2+x}{x+4}>\log_6 6$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2+x}{x+4}>6\Leftrightarrow\frac{x^2-5x-24}{x+4}>0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4<x<-3\\ x>8\end{array}\right.$$

So với điều kiện ta suy ra: $\left[\begin{array}{l}-4<x<-3\\ x>8\end{array}\right.$

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$S=(-4;-3)\cup(8;+\infty).$$

Như vậy đáp án đúng là đáp án **B**.

Nhận xét. Các bạn: *Nguyễn Hùng Cường*, phường An Nhơn, **Gia Lai**, *Vũ Đức Duy*, phường Bình Lợi Trung, **TP. Hồ Chí Minh** và bạn *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên** đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng. Xin hoan nghênh các bạn.

KIHIVI

LỜI GIẢI ĐÃ ĐÚNG CHƯA?



Trong giờ bài tập giải phương trình vô tỷ thầy giáo cho bài toán:

Giải phương trình

$$\sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2.$$

Một học sinh lên bảng và giải như sau:

Điều kiện:

$$\begin{cases}x-\sqrt{x^2-1}\ge 0\\ x+\sqrt{x^2-1}\ge 0\\ x^2-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\sqrt{x^2-1}\\ x\ge-\sqrt{x^2-1}\\ x\le-1;x\ge 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\ge x^2-1\\ x\in\mathbb{R}\\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1.$$

Ta có: $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}.\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=1.$

Đặt $\sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}}=t>0$. Suy ra:

$$\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{t^2}.$$

(Xem tiếp trang 14)

Được quét bằng CamScanner

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 587 (5.2026)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
NGUYỄN TIẾN THANH
Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam
PHẠM VĨNH THÁI
Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD
LÊ HỒNG SƠN

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

***Tổng biên tập*: NGUYỄN HỮU BẮC** ***Thư kí Tòa soạn*: VÕ THỊ HỒNG THU**

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* TRẦN HỮU NAM, *TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Vũ Hồng Phong – Sử dụng phương pháp thế để giải phương trình.

4 Hướng dẫn giải đề thi thử vào lớp 10 THPT chuyên, năm học 2026 – 2027.

7 Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Bắc Giang, năm học 2025 – 2026.

10 **Thử sức trước kỳ thi THPTQG 2026**
Hướng dẫn giải đề số 1 – Đề số 2.

19 **Diễn đàn dạy học Toán**
Đinh Nguyễn Đông Triều – Sử dụng kiến thức biến hình để giải một số bài toán ứng dụng tích phân.

22 **Đề ra kỳ này** *Problems in This Issue*
T1/587, ..., T12/587, L1/587, L2/587.

25 **Giải bài kì trước**
Solutions to Previous Problems
T1/583, ..., T12/583, L1/583, L2/583

35 **Phương pháp giải toán**
Trịnh Ba – Một số bài toán max – min liên quan đến khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng trong hệ trục tọa độ *Oxyz*.

41 **Bạn đọc tìm tòi**
Nguyễn Minh Hà – Tương tự trong không gian của bài toán phẳng.

43 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 128 – Bài dịch số 126.

44 **Nhiều cách giải cho một bài toán** – Giải bài toán 107 – Đề bài toán 109.

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay** – Giải bài toán 115. Đề bài toán 117.

47 **Sai lầm ở đâu?**

***Biên tập*:** KIM THANH, NHƯ HOÀNG
***Trị sự, phát hành*:** TRẦN THỊ MINH HIỀN
***Mĩ thuật*:** QUỐC HIỆP, THANH LONG
***Thiết kế, chế bản*:** MINH HÒA

Được quét bằng CamScanner

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BẢNG GIÁ

SÁCH GIÁO KHOA LỚP 11

NĂM HỌC 2026 - 2027

Chuẩn mực
Khoa học
Hiện đại

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)
1	Ngữ văn 11, tập một	19.800
2	Ngữ văn 11, tập hai	16.100
3	Toán 11, tập một	16.200
4	Toán 11, tập hai	13.900
5	Vật lí 11	14.600
6	Hóa học 11	19.300
7	Sinh học 11	23.100
8	Lịch sử 11	12.100
9	Địa lí 11	20.900
10	Âm nhạc 11	15.000
11	Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 11	18.600
12	Giáo dục thể chất 11 – Bóng đá	13.000
13	Giáo dục thể chất 11 – Bóng chuyền	8.500
14	Giáo dục thể chất 11 – Bóng rổ	11.000
15	Giáo dục thể chất 11 – Cầu lông	13.000
16	Công nghệ 11 – Cơ khí	18.700
17	Công nghệ 11 – Chăn nuôi	18.000
18	Tin học 11 - Định hướng Tin học ứng dụng	19.000
19	Tin học 11 - Định hướng Khoa học máy tính	20.000
20	Mĩ thuật 11 – Thiết kế mĩ thuật đa phương tiện	6.000
21	Mĩ thuật 11 – Thiết kế đồ hoạ	6.000
22	Mĩ thuật 11 – Thiết kế thời trang	7.000
23	Mĩ thuật 11 – Thiết kế mĩ thuật Sân khấu, Điện ảnh	6.000
24	Mĩ thuật 11 – Lí luận và Lịch sử mĩ thuật	6.000
25	Mĩ thuật 11 – Điêu khắc	6.000
26	Mĩ thuật 11 – Kiến trúc	6.000
27	Mĩ thuật 11 – Hội hoạ	6.000
28	Mĩ thuật 11 – Đồ hoạ (tranh in)	6.000
29	Mĩ thuật 11 – Thiết kế công nghiệp	6.000
30	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 11	9.000
31	Giáo dục Quốc phòng và An ninh 11	9.500

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)
1	Chuyên đề học tập Ngữ văn 11	11.900
2	Chuyên đề học tập Toán 11	9.900
3	Chuyên đề học tập Vật lí 11	7.800
4	Chuyên đề học tập Hoá học 11	7.300
5	Chuyên đề học tập Sinh học 11	9.000
6	Chuyên đề học tập Lịch sử 11	8.000
7	Chuyên đề học tập Địa lí 11	8.400
8	Chuyên đề học tập Âm nhạc 11	9.000
9	Chuyên đề học tập Mĩ thuật 11	10.000
10	Chuyên đề học tập Tin học 11 – Định hướng Khoa học máy tính	13.000
11	Chuyên đề học tập Tin học 11 – Định hướng Tin học ứng dụng	14.000
12	Chuyên đề học tập Công nghệ 11 – Cơ khí	10.000
13	Chuyên đề học tập Công nghệ 11 – Chăn nuôi	10.000
14	Chuyên đề học tập Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 11	10.000

SÁCH GIÁO KHOA TIẾNG ANH

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)
1	**Tiếng Anh 11 Global Success** (hợp tác xuất bản với Pearson Education - Tổng Chủ biên Hoàng Văn Vân)	32.500



Được quét bằng CamScanner

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BẢNG GIÁ

SÁCH GIÁO KHOA LỚP 12

NĂM HỌC 2026 - 2027

Chuẩn mực
Khoa học
Hiện đại

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)
1	Ngữ văn 12, tập một	20.300
2	Ngữ văn 12, tập hai	17.100
3	Toán 12, tập một	12.500
4	Toán 12, tập hai	11.700
5	Vật lí 12	15.200
6	Hóa học 12	17.900
7	Sinh học 12	24.100
8	Lịch sử 12	13.900
9	Địa lí 12	21.700
10	Âm nhạc 12	13.000
11	Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 12	17.700
12	Giáo dục thể chất 12 – Bóng đá	15.000
13	Giáo dục thể chất 12 – Bóng chuyền	10.200
14	Giáo dục thể chất 12 – Cầu lông	11.100
15	Giáo dục thể chất 12 – Bóng rổ	13.000
16	Công nghệ 12 – Lâm nghiệp – Thuỷ sản	20.000
17	Công nghệ 12 – Công nghệ Điện – Điện tử	19.800
18	Tin học 12 – Định hướng Khoa học máy tính	22.000
19	Tin học 12 – Định hướng Tin học ứng dụng	19.500
20	Mĩ thuật 12 – Đồ hoạ (tranh in)	6.000
21	Mĩ thuật 12 – Hội hoạ	6.000
22	Mĩ thuật 12 – Thiết kế công nghiệp	6.000
23	Mĩ thuật 12 – Thiết kế mĩ thuật đa phương tiện	6.000
24	Mĩ thuật 12 – Thiết kế mĩ thuật Sân khấu, Điện ảnh	6.000
25	Mĩ thuật 12 – Thiết kế thời trang	6.000
26	Mĩ thuật 12 – Thiết kế đồ hoạ	6.000
27	Mĩ thuật 12 – Lí luận và Lịch sử mĩ thuật	6.000
28	Mĩ thuật 12 – Điêu khắc	6.000
29	Mĩ thuật 12 – Kiến trúc	6.000
30	Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 12	12.100
31	Giáo dục Quốc phòng và An ninh 12	11.000

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)
1	Chuyên đề học tập Ngữ văn 12	11.900
2	Chuyên đề học tập Toán 12	8.800
3	Chuyên đề học tập Vật lí 12	8.900
4	Chuyên đề học tập Hóa học 12	7.000
5	Chuyên đề học tập Sinh học 12	11.000
6	Chuyên đề học tập Lịch sử 12	8.000
7	Chuyên đề học tập Địa lí 12	7.900
8	Chuyên đề học tập Âm nhạc 12	8.000
9	Chuyên đề học tập Mĩ thuật 12	11.000
10	Chuyên đề học tập Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 12	8.000
11	Chuyên đề học tập Tin học 12 – Định hướng Khoa học máy tính	16.000
12	Chuyên đề học tập Tin học 12 – Định hướng Tin học ứng dụng	16.800
13	Chuyên đề học tập Công nghệ 12 – Công nghệ Lâm nghiệp – Thủy sản	9.000
14	Chuyên đề học tập Công nghệ 12 – Công nghệ Điện – Điện tử	9.000

SÁCH GIÁO KHOA TIẾNG ANH

TT	Tên sách	Giá bìa (đồng/cuốn)
1	**Tiếng Anh 12 Global Success** (hợp tác xuất bản với Pearson Education - Tổng Chủ biên Hoàng Văn Vân)	37.900



LƯU Ý

Phục vụ năm học 2026-2027, NXBGDVN áp dụng mức giá bìa theo bảng giá này thống nhất trong toàn quốc.

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT5M26
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2026

Giá: 22.000 đồng
Hai mươi hai nghìn đồng

Được quét bằng CamScanner