TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

TẠP CHÍ Toán học & Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG

Số 588
Tháng 6 - 2026
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 63 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com



Được quét bằng CamScanner

THỂ LỆ CUỘC THI

OLYMPIC TOÁN TUỔI THƠ ONLINE TOÀN QUỐC

1. Mục đích: Tạo sân chơi trí tuệ bổ ích cho học sinh Tiểu học và Trung học cơ sở yêu thích môn Toán, thúc đẩy ứng dụng công nghệ thông tin và chuyển đổi số trong giáo dục.

2. Quy mô cuộc thi và đối tượng tham gia: Tổ chức trên phạm vi toàn quốc dành cho HS các lớp 4, 5, 6, 7, 8.

3. Hình thức thi: Tổ chức trên **hệ thống LMS** bằng máy tính, máy tính bảng, điện thoại thông minh có kết nối Internet. Thí sinh có thể đăng kí **theo trường hoặc cá nhân**.

4. Đề thi và thời gian làm bài

- Đề thi theo hình thức trắc nghiệm với khoảng 60% kiến thức cơ bản và khoảng 40% kiến thức nâng cao. Trong đề thi có kiến thức vận dụng thực tiễn.
- Thời gian làm bài: Lớp 4 - 7: 30 phút; Lớp 8: 35 phút.

5. Các vòng thi, điểm của bài thi

✿ **Vòng 1 - cấp trường:** Thi trực tuyến vào trung tuần tháng 5/2026. Thí sinh được thi tối đa **03 lần**, lấy điểm lần thi cao nhất. Lấy tối đa **60%** thí sinh có điểm cao nhất để vào vòng 2.

✿ **Vòng 2 - cấp tỉnh:** Thi trực tuyến 01 lần duy nhất vào trung tuần tháng 6/2026. Lấy tối đa **30%** thí sinh có điểm cao nhất để vào chung kết.

✿ **Vòng 3 - chung kết toàn quốc:** Thi trực tiếp trên máy tính tại Hà Nội vào đầu tháng 7/2026.

6. Cơ cấu giải thưởng: Giải thưởng tập thể và cá nhân cấp Tỉnh và cấp Toàn quốc. Thí sinh đoạt giải nhận: ***Giấy chứng nhận*** và ***Phần thưởng*** của Ban tổ chức (tiền và hiện vật).

7. Quy định về bản quyền và hình ảnh

- Bản quyền cuộc thi, toàn bộ đề thi, ngân hàng câu hỏi của cuộc thi thuộc bản quyền của Viện Nghiên cứu Sách và Học liệu Giáo dục - Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.
- Khi tham gia cuộc thi, thí sinh đồng ý để Ban tổ chức sử dụng hình ảnh, video và thông tin liên quan phục vụ mục đích truyền thông và giáo dục về cuộc thi.

8. Trách nhiệm các bên

- Ban tổ chức: Xây dựng kế hoạch, tổ chức các vòng thi nghiêm túc và công bằng, công bố kết quả và trao giấy chứng nhận, giải thưởng.
- Thí sinh: Tuân thủ đầy đủ các điều khoản trong Thể lệ này.

9. Điều khoản thi hành

- Thể lệ này áp dụng cho Cuộc thi **Olympic Toán Tuổi thơ Online toàn quốc**.
- Trong quá trình tổ chức, Ban tổ chức có quyền điều chỉnh thể lệ cho phù hợp với tình hình thực tế.

Ghi chú: Để tham gia, thí sinh truy cập trang web: **https://olympictuoitho.vn**

hoặc quét mã QR:

Được quét bằng CamScanner

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

DƯƠNG VĂN SƠN
(GV THPT Kim Liên, Nghệ An)

Trong đề thi học sinh giỏi và đề thi vào lớp 10 THPT chuyên có một nội dung khá quan trọng, đó là dạng toán giải các phương trình bậc cao. Bài viết này sẽ giúp các em học sinh THCS nói chung và các em học sinh lớp 9 nói riêng thành thạo hơn khi giải các bài toán thuộc dạng này.

1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

1.1. Định nghĩa. Phương trình bậc ba ẩn x là phương trình có dạng $ax^3+bx^2+cx+d=0$, trong đó a, b, c, d là các số thực cho trước và $a\neq 0$.

1.2. Một số cách giải thường dùng

1.2.1. *Cách 1. Đưa về phương trình tích*

(Sử dụng cách giải này khi tìm được ít nhất một nghiệm x_0 của đa thức $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$).

+ Tìm một nghiệm x_0 của phương trình:

$$ax^3+bx^2+cx+d=0.$$

+ Lấy ax^3+bx^2+cx+d chia cho $x-x_0$ được thương là $ax^2+b_1x+c_1$ (số dư là 0).

Ta cũng có thể tìm b_1, c_1 trong thương $ax^2+b_1x+c_1$ bằng lược đồ Hoorne như sau ("đầu rơi, nhân ngang, cộng chéo"):

	a	b	c	d
x_0	a	b_1	c_1	d_1

trong đó: $b_1=x_0a+b; c_1=x_0b_1+c; d_1=x_0c_1+d$.

+ Khi đó: $ax^3+bx^2+cx+d=0$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)(ax^2+b_1x+c_1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-x_0=0 \\ ax^2+b_1x+c_1=0 \end{array}\right.$$

+ Giải phương trình $ax^2+b_1x+c_1=0$ suy ra tập nghiệm của phương trình $ax^3+bx^2+cx+d=0$.

Thí dụ 1. *Giải phương trình:* $x^3-9x^2+23x-15=0$.

Phân tích. - Phương trình có tổng các hệ số: $a+b+c+d=0$ nên có một nghiệm $x_0=1$.

- Lấy $x^3-9x^2+23x-15$ chia cho $x-1$ được thương là $x^2-8x+15$.

Chú ý: Dùng lược đồ Hoorne như sau:

	1	−9	23	−15
1	1	−8	15	0

Lời giải. Ta có: $x^3-9x^2+23x-15=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-8x+15)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2-8x+15=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3. \\ x=5 \end{array}\right.$$

Vậy PT này có tập nghiệm là $S=\{1;3;5\}$.

1.2.2. ***Cách 2:*** *Có thể đưa về một trong hai dạng sau:*

- *Dạng 1:* $A^3=B^3\Leftrightarrow A=B$.

- *Dạng 2:* $A^3=m\Leftrightarrow A=\sqrt[3]{m}$.

Thí dụ 2. *Giải các phương trình sau:*

a) $x^3-3x^2+3x-3=0$.

b) $-4x^3+3x^2+3x+1=0$.

Lời giải. a) $x^3-3x^2+3x-3=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3=2\Leftrightarrow x-1=\sqrt[3]{2}\Leftrightarrow x=1+\sqrt[3]{2}.$$

Vậy PT này có tập nghiệm là $S=\left\{1+\sqrt[3]{2}\right\}$.

b) $-4x^3+3x^2+3x+1=0$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3=\left(\sqrt[3]{5}x\right)^3\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{5}x\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{5}-1}.$$

Vậy PT này có tập nghiệm là $S=\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{5}-1}\right\}$.

2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN

2.1. Định nghĩa. Phương trình bậc bốn ẩn x là phương trình có dạng: $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, trong đó a, b, c, d, e là các số thực cho trước và $a\neq 0$.

2.2. Một số cách giải thường dùng

2.2.1. *Cách 1. Đưa về phương trình tích*

(Sử dụng cách giải này khi tìm được ít nhất hai nghiệm x_1, x_2 của đa thức:

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e).$$

Được quét bằng CamScanner

+ Tìm một nghiệm x_1 của phương trình

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0.$$

+ Lấy $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ chia cho $x-x_1$ được thương là $ax^3+b_1x^2+c_1x+d_1$.

Tiếp tục làm tương tự trên ta được:

$$ax^3+b_1x^2+c_1x+d_1=0=(x-x_2)(ax^2+b_2x+c_2).$$

(*chú ý*: Ta cũng có thể tìm b_1,c_1,d_1,b_2,c_2 bằng lược đồ Hoorne).

+ Khi đó: $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$

$$\Leftrightarrow(x-x_1)(x-x_2)(ax^2+b_2x+c_2)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-x_1=0\\x-x_2=0\\ax^2+b_2x+c_2=0\end{array}\right.\quad.$$

+ Giải phương trình $ax^2+b_2x+c_2=0$ suy ra tập nghiệm của PT $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$.

Thí dụ 3. *Giải phương trình*

$$x^4+2x^3-2x^2-3x+2=0.$$

Phân tích. + PT có tổng các hệ số bằng 0 nên có một nghiệm $x_1=1$. Bằng cách thử trực tiếp, ta thấy trong các ước của 2 thì $x_2=-2$ cũng một là nghiệm của phương trình.

+ Lấy $f(x)=x^4+2x^3-2x^2-3x+2$ chia cho $x-1$ được thương là x^3+3x^2+x-2. Tiếp tục lấy x^3+3x^2+x-2 chia cho $x+2$ được thương là x^2+x-1.

Chú ý: Dùng lược đồ Hoorne ta có:

	1	2	−2	−3	2
1	1	3	1	−2	0
−2	1	1	−1	0	

$$\Rightarrow x^4+2x^3-2x^2-3x+2=(x-1)(x^3+3x^2+x-2)$$
$$=(x-1)(x+2)(x^2+x-1).$$

Lời giải. $x^4+2x^3-2x^2-3x+2=0$

$$\Leftrightarrow(x-1)(x+2)(x^2+x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\x+2=0\\x^2+x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1,x=-2,x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

PT có tập nghiệm là: $S=\left\{-2;1;\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

2.2.2. *Cách 2*: *Đặt ẩn phụ*

2.2.2.1. Đặt $t=g(x)$ chuyển phương trình bậc bốn ẩn x về phương trình bậc hai ẩn t.

Thí dụ 4. *Giải phương trình*

$$x^4+2x^3-2x^2-3x+2=0.$$

Lời giải. Ta có: $x^4+2x^3-2x^2-3x+2=0$

$$\Leftrightarrow(x^2+x)^2-3(x^2+x)+2=0\quad(1).$$

Đặt $t=x^2+x$, PT(1) trở thành:

$$t^2-3t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+x=2\\x^2+x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+x-2=0\\x^2+x-1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in\{-2;1\}\\x\in\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}\end{array}\right.$$

Vậy PT có tập nghiệm là $S=\left\{-2;1;\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Thí dụ 5. *Giải các phương trình sau:*

a) $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$ (1).

b) $4x^4-4x^3-12x^2+2x+1=0$ (2).

Lời giải. a) Xét hai trường hợp:

TH1: $x=0$. Khi đó PT(1) trở thành $1=0$ (vô lý)

$\Rightarrow x=0$ không là nghiệm của PT(1).

TH2: $x\neq0$. Khi đó: $(1)\Leftrightarrow x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0\ (*).$$

Đặt $t=x+\frac{1}{x}$, PT(*) trở thành: $t^2+2t-3=0$

$$\Leftrightarrow(t-1)(t+3)=0\text{ hay }\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\left(x+\frac{1}{x}+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(x^2-x+1)(x^2+3x+1)=0\Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy PT có tập nghiệm là $S=\left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2};\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

b) TH1: $x=0$ thì PT(2) trở thành $1=0$, vô lý

$\Rightarrow x=0$ không là nghiệm của PT(2).

TH2: $x\neq0$. Khi đó: $(2)\Leftrightarrow4x^2-4x-12+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$$\Leftrightarrow\left(2x-\frac{1}{x}\right)^2-2\left(2x-\frac{1}{x}\right)-8=0\quad(3).$$

Được quét bằng CamScanner

Đặt $t=2x-\frac{1}{x}$, PT(3) trở thành:

$$t^2-2t-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\t=-2\end{array}\right.$$

Với $t=4$ thì $2x-\frac{1}{x}=4\Leftrightarrow 2x^2-4x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$.

Với $t=-2$ thì $2x-\frac{1}{x}=-2\Leftrightarrow 2x^2+2x-1=0$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy PT có tập nghiệm là:

$$S=\left\{\frac{-1-\sqrt{3}}{2};\frac{2-\sqrt{6}}{2};\frac{-1+\sqrt{3}}{2};\frac{2+\sqrt{6}}{2}\right\}.$$

2.2.2.2. Đặt $t=g(x)$ hoặc đặt $a=g_1(x),b=g_2(x)$ chuyển phương trình bậc bốn ẩn x về phương trình hai ẩn x và t hoặc phương trình hai ẩn a và b rồi đưa về một trong các dạng sau:

Dạng 1. *$A^2=B^2$, rồi đưa về phương trình tích.*

Thí dụ 6. *Giải phương trình*

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)=3x^2.$$

Lời giải. Ta có: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)=3x^2$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+7x+6\right)\left(x^2+5x+6\right)=3x^2\ (1).$$

Đặt $t=x^2+6x+6$, PT(1) trở thành:

$$(t+x)(t-x)=3x^2\Leftrightarrow t^2=4x^2\Leftrightarrow(t+2x)(t-2x)=0$$

hay $\left(x^2+8x+6\right)\left(x^2+4x+6\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+8x+6=0\\x^2+4x+6=0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow x=-4\pm\sqrt{10}.$$

Vậy PT có tập nghiệm là $S=\left\{-4-\sqrt{10};-4+\sqrt{10}\right\}$.

Dạng 2. *$f(u)=f(v)$, rồi đưa về phương trình tích.*

Thí dụ 7. *Giải phương trình*

$$\left(x^2-2x-1\right)^2-4x^2-25x-5=0.$$

Lời giải. Ta có: $\left(x^2-2x-1\right)^2-4x^2-25x-5=0$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-2x-1\right)^2+5\left(x^2-2x-1\right)=(3x)^2+5(3x)\ (1).$$

Đặt $a=x^2-2x-1;b=3x$ thì PT(1) trở thành:

$$a^2+5a=b^2+5b\Leftrightarrow(a-b)(a+b+5)=0$$

hay $\left(x^2-5x-1\right)\left(x^2+x+4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-5x-1=0\\x^2+x+4=0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{29}}{2}.$$

Vậy PT có tập nghiệm là $S=\left\{\frac{5-\sqrt{29}}{2};\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right\}$.

Dạng 3. *Đưa về phương trình bậc hai có $\Delta=k^2$.*

Thí dụ 8. *Giải phương trình $x^4-3x^3+4x^2-x-3=0$.*

Lời giải. Ta có: $x^4-3x^3+4x^2-x-3=0$

$$\Leftrightarrow x^4+(2-3x)x^2+2x^2-x-3=0\ (1).$$

Đặt $t=x^2$ thì PT(1) trở thành:

$$t^2+(2-3x)t+2x^2-x-3=0\ (2).$$

Xét PT bậc hai ẩn t (x là tham số):

$$t^2+(2-3x)t+2x^2-x-3=0\ (3)\text{ có:}$$

$$\Delta=(2-3x)^2-4\left(2x^2-x-3\right)=(x-4)^2.$$

Do đó: $(3)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{3x-2+x-4}{2}=2x-3\\t=\frac{3x-2-x+4}{2}=x+1\end{array}\right.$.

Với $t=2x-3$ thì $x^2=2x-3\Leftrightarrow x^2-2x+3=0$

(PT này vô nghiệm).

Với $t=x+1$ thì $x^2=x+1\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Vậy PT có tập nghiệm là $S=\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Thí dụ 9. *Giải bất phương trình*

$$x^4-2\sqrt{2}x^2-x+2-\sqrt{2}=0.$$

Lời giải. Đặt $t=\sqrt{2}$, PT đã cho trở thành:

$$x^4-2tx^2-x+t^2-t=0\Leftrightarrow t^2-\left(2x^2+1\right)t+x^4-x=0.$$

Xét phương trình bậc hai ẩn t (x là tham số):

$$t^2-\left(2x^2+1\right)t+x^4-x=0\ (1)\text{ có:}$$

$$\Delta=\left(2x^2+1\right)^2-4\left(x^4-x\right)=(2x+1)^2.$$

Do đó: $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{2x^2+1+2x+1}{2}=x^2+x+1\\t=\frac{2x^2+1-2x-1}{2}=x^2-x\end{array}\right.$.

Với $t=x^2+x+1$ thì $\sqrt{2}=x^2+x+1\Leftrightarrow x^2+x+1-\sqrt{2}=0$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2}.$$

Được quét bằng CamScanner

Với $t=x^2-x$ thì $\sqrt{2}=x^2-x\Leftrightarrow x^2-x-\sqrt{2}=0$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}.$$

Vậy PT có tập nghiệm là:

$$S=\left\{\frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2};\frac{1\pm\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}\right\}.$$

Dạng 4. *Đưa về phương trình đẳng cấp rồi đưa về phương trình tích.*

Thí dụ 10. *Giải phương trình*

$$x^4+(x-1)(x^2-2x+2)=0.$$

Lời giải. $x^4+(x-1)(x^2-2x+2)=0$

$$\Leftrightarrow x^4+x^2(x-1)-2(x-1)^2=0 \quad (1).$$

Đặt $a=x^2;b=x-1$, PT(1) trở thành:

$$a^2+ab-2b^2=0\Leftrightarrow(a-b)(a+2b)=0$$

hay $(x^2-x+1)(x^2+2x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x+1=0\\x^2+2x-2=0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{3}.$$

Vậy PT có tập nghiệm là $S=\{-1-\sqrt{3};-1+\sqrt{3}\}$.

2.2.3. ***Cách 3.*** *Đưa về dạng:*

$$A^2+B^2=0\Leftrightarrow A=B=0$$

hoặc $A^2+B^2+k=0$ với $k\geq 0$.

Thí dụ 11. *Giải các phương trình sau:*

a) $x^4-4x+3=0$. b) $x^4-x+1=0$.

Lời giải. a) Ta có: $x^4-4x+3=0$

$$\Leftrightarrow x^4-2x^2+1+2(x^2-2x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow(x^2-1)^2+2(x-1)^2=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-1=0\\x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1.$$

Vậy PT có tập nghiệm là $S=\{1\}$.

b) Ta có: $x^4-x+1=0\Leftrightarrow x^4-x^2+\frac{1}{4}+x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=0$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=0.$$

Vì $\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$ với mọi x nên phương trình này vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC LỚN HƠN BỐN

3.1. Định nghĩa. Phương trình bậc lớn hơn bốn ẩn x là phương trình có dạng:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=0,$$

trong đó n là số tự nhiên lớn hơn 4, $a_n,a_{n-1},a_{n-2},\ldots,a_2,a_1,a_0$ là các số thực cho trước và $a_n\neq 0$.

3.2. Một số cách giải thường dùng

Phương trình bậc lớn hơn 4 cũng có một số cách giải tương tự phương trình bậc 4, ngoài ra cũng có thể dùng phương pháp đánh giá hai vế hoặc sử dụng tính đơn điệu của hàm số để giải.

3.3. Các thí dụ

Thí dụ 12. *Giải các phương trình sau:*

a) $x^6+x^4+2x^3+x^2=2(x+1)^3$.

b) $2x^5-5x^2+5x-2=0$.

c) $x^6-x^3-2x^2-4x-2=0$.

Lời giải. a) Ta có: $x^6+x^4+2x^3+x^2=2(x+1)^3$

$$\Leftrightarrow x^6+x^2(x+1)^2-2(x+1)^3=0 \quad (1).$$

Dễ thấy $x=0$ không thỏa mãn PT đã cho $\Rightarrow x\neq 0$.

Đặt $a=x^2,b=x+1$ $(a\neq 0)$, PT (1) trở thành:

$$a^3+ab^2-2b^3=0\Leftrightarrow 1+\frac{b^2}{a^2}-\frac{2b^3}{a^3}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{b}{a}-1\right)\left(\frac{-2b^2}{a^2}-\frac{b}{a}-1\right)=0\Leftrightarrow\frac{b}{a}=1$$

hay $\frac{x+1}{x^2}=1\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Vậy PT có tập nghiệm là $S=\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

b) $2x^5-5x^2+5x-2=0$ (1).

Xét hàm số $f(x)=2x^5-5x^2+5x-2$ trên $\mathbb{R}$. D thấy: Với $x_1,x_2\in\mathbb{R},x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Do đ hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó: $(1)\Leftrightarrow f(x)=f(1)\Leftrightarrow x=1$. Vậy PT đã ch có tập nghiệm là $S=\{1\}$.

c) Ta có: $x^6-x^3-2x^2-4x-2=0$

$$\Leftrightarrow x^6+x^2=(x+1)^3+x+1 \quad (*).$$

Được quét bằng CamScanner

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$. Dễ thấy: Với $t_1,t_2\in\mathbb{R}, t_1<t_2\Leftrightarrow f(t_1)<f(t_2)$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó: $(*)\Leftrightarrow f(x^2)=f(x+1)$

$\Leftrightarrow x^2=x+1\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Vậy PT có tập nghiệm là $S=\left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Thí dụ 13. *Giải các phương trình sau:*

a) $\left(x^3+3x^2\right)^3+28x^3-27x^2+15x=2$.

b) $\left(x^4-x+1\right)^2=2x^4+\dfrac{3x^2}{2}-x+\dfrac{21}{16}$.

Lời giải. a) Ta có: $\left(x^3+3x^2\right)^3+28x^3-27x^2+15x=2$

$\Leftrightarrow\left(x^3+3x^2\right)^3+x^3+3x=(1-3x)^3+1-3x$ (*).

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$. Dễ thấy: Với $t_1,t_2\in\mathbb{R}, t_1<t_2\Leftrightarrow f(t_1)<f(t_2)$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó: $(*)\Leftrightarrow f(x^3+3x^2)=f(1-3x)$

$\Leftrightarrow x^3+3x^2=1-3x\Leftrightarrow(x+1)^3=2\Leftrightarrow x=-1+\sqrt[3]{2}$.

Vậy PT đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{-1+\sqrt[3]{2}\right\}$.

b) Phương trình đã cho tương đương với

$\left(x^4-x+1\right)^2-\left(x^4-x+1\right)=\left(x^2+\dfrac{5}{4}\right)^2-\left(x^2+\dfrac{5}{4}\right)$ (**).

Ta có: $x^4-x+1=\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\ge\dfrac{1}{2}$

và $x^2+\dfrac{5}{4}\ge\dfrac{5}{4}$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-t$ trên $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. Dễ thấy: Với $t_1,t_2\in\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right), t_1<t_2\Leftrightarrow f(t_1)<f(t_2)$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. Do đó:

$(**)\Leftrightarrow f(x^4-x+1)=f\left(x^2+\dfrac{5}{4}\right)$

$\Leftrightarrow x^4-x+1=x^2+\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow x^4-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x^2+x+\dfrac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$.

Vậy PT có tập nghiệm là $S=\left\{\dfrac{1-\sqrt{3}}{2};\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Thí dụ 14. *Giải phương trình:*

$3x^{2025}=x^2+x+1$ (1).

Lời giải. Ta có:

TH1: $x\le0\Rightarrow\begin{cases}\text{VT(1)}\le0\\ \text{VP(1)}>0\end{cases}\Rightarrow\text{VT(1)}\le0<\text{VP(1)}$.

(do $\text{VP(1)}=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$). Vậy PT vô nghiệm.

TH2: $x>0$. Ta có: $(1)\Leftrightarrow\dfrac{1}{x^{2023}}+\dfrac{1}{x^{2024}}+\dfrac{1}{x^{2025}}=3$ (2).

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^{2023}}+\dfrac{1}{x^{2024}}+\dfrac{1}{x^{2025}}$ trên $(0;+\infty)$. Dễ thấy:

Với $x_1,x_2\in(0;+\infty), x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Do đó:

$(2)\Leftrightarrow f(x)=f(1)\Leftrightarrow x=1$.

Trong trường hợp này PT(1) có nghiệm $x=1$.

Vậy PT(1) có tập nghiệm là $S=\{1\}$.

Chú ý: Nếu dùng kiến thức đạo hàm (ở bậc THPT) thì ta có thể chứng minh sự đồng biến (hoặc nghịch biến) của các hàm số ở các thí dụ 12, 13, 14 nhanh hơn. Chẳng hạn: Ở thí dụ 14.b) ta có:

$f'(x)=-\dfrac{2023}{x^{2024}}-\dfrac{2024}{x^{2025}}-\dfrac{2025}{x^{2026}}<0$ với $\forall x\in(0;+\infty)$.

Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Giải các phương trình sau

1. $x^4-2x^3+x-6=0$.
2. $x^4-4x^3+8x-12=0$.
3. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=9$.
4. $\left(x^2-3x+2\right)\left(x^2+7x+12\right)=24$.
5. $\left(x^2+3x+2\right)\left(x^2+7x+12\right)+x^2+5x=6$.
6. $(x+1)(x+2)^2(x+3)=56$.
7. $\left(x^2-3x+1\right)^2=2x-1$.
8. $x^4-10x^2-x+20=0$.
9. $\left(x^2+10x+8\right)^2=(8x+4)\left(x^2+8x+7\right)$.
10. $\left(2x^2-5x+2\right)^2=32\left(x^3-21x-20\right)$.

Được quét bằng CamScanner

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10
THPT CHUYÊN BẮC GIANG

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

1. D	2. D	3. B	4. B	5. C
6. D	7. C	8. A	9. C	10. B
11. A	12. B	13. A	14. D	15. C
16. D	17. B	18. C	19. A	20. A

PHẦN II. Tự luận.

Câu 1. a) *Rút gọn biểu thức*

$$P=\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}\right):\frac{x-1}{x^2+x+1}$$

với $x\ge 0$ *và* $x\ne 1$.

b) *Cho parabol* $(P): y=2x^2$ *và đường thẳng* $d: y=2x+m-1$, *với* m *là tham số. Tìm* m *để đường thẳng* d *cắt parabol* (P) *tại hai điểm phân biệt đối xứng với nhau qua đường thẳng* $2x+4y-2025=0$.

c) *Giải phương trình*

$$\sqrt{x^2-4}-\sqrt{4x^2+9x+2}=(15-3x)\sqrt{x+2}.$$

Lời giải. a) $P=\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}$. b) $m=506$.

c) Điều kiện xác định của phương trình:

$$\begin{cases}x^2-4\ge 0\\ 4x^2+9x+2\ge 0\\ x+2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x\ge 2\end{array}\right.$$

Nhận thấy $x=-2$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Với $x\ge 2$ ta có:

$$\sqrt{x^2-4}-\sqrt{4x^2+9x+2}=(15-3x)\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)(x+2)}-\sqrt{(4x+1)(x+2)}=(15-3x)\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x-2}-\sqrt{4x+1}=15-3x$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-6}{\sqrt{x-2}+2}+\frac{4(6-x)}{5+\sqrt{4x+1}}+3(x-6)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-6)\left[\frac{1}{\sqrt{x-2}+2}+\frac{11+3\sqrt{4x+1}}{5+\sqrt{4x+1}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x=6\ (\text{do}\ \frac{1}{\sqrt{x-2}+2}+\frac{11+3\sqrt{4x+1}}{5+\sqrt{4x+1}}>0,\ \forall x\ge 2).$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\{-2;6\}$.

Câu 2. a) *Tìm tất cả các cặp số nguyên* $(x;y)$ *thỏa mãn* $x^3y+xy^3+2x^2y^2-8x-8y+16=0$.

b) *Cho* $P(x)$ *là đa thức với các hệ số nguyên thỏa mãn:* $P(a)=22$, $P(b)=23$, $P(c)=24$, $P(d)=25$ *với* $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, $a<b<c<d$ *và* $a+b+c+d=26$. *Tính* $P(7)$.

c) *Tìm tất cả các số nguyên tố* q *sao cho tồn tại số nguyên dương* n *để* n^2+136q *là một lũy thừa với số mũ nguyên dương của 17.*

Lời giải. a) Ta có:

$$x^3y+xy^3+2x^2y^2-8x-8y+16=0$$

$$\Leftrightarrow(x+y)^2(1-xy)=(x+y-4)^2\ (1).$$

• Nếu $x+y=0$ thì (1) trở thành $0=16$ (vô lí).

• Nếu $x+y\ne 0$ thì $(1)\Leftrightarrow 1-xy=\left(1-\dfrac{4}{x+y}\right)^2$ (2).

Vì $x,y\in\mathbb{Z}$ nên từ (2) suy ra:

$$\frac{4}{x+y}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x+y\in\{-4;-2;-1;1;2;4\}.$$

Kiểm tra trực tiếp các trường hợp ta thu được các cặp nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình đã cho là: $(-4;2)$, $(2;-4)$, $(0;2)$, $(2;0)$.

b) Xét đa thức:

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0.$$

Ta có: $P(b)-P(a)=a_n\left(b^n-a^n\right)+$

$$+a_{n-1}\left(b^{n-1}-a^{n-1}\right)+\ldots+a_1(b-a)\vdots(b-a).$$

Do đó: $P(b)-P(a)\vdots(b-a)\Rightarrow 23-22\vdots(b-a)$

Được quét bằng CamScanner

$\Rightarrow 1 \vdots (b-a) \Rightarrow b-a=1 \Leftrightarrow b=a+1.$

Tương tự ta có: $c=b+1 \Rightarrow c=a+2;$

$d=c+1 \Rightarrow d=a+3.$

Khi đó ta có: $a+b+c+d=26$

$\Leftrightarrow a+a+1+a+2+a+3=26$

$\Leftrightarrow 4a+6=26 \Leftrightarrow a=5.$

Với $a=5$ thì $c=7$. Do đó $P(c)=P(7)=24.$

c) Giả sử q là số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu đề bài. Khi đó, sẽ tồn tại các số nguyên dương n, k sao cho $n^2+136q=17^k$ (1).

Do $n^2+136q>17$ nên $17^k>17$ suy ra $k\geq 2$.

Từ (1) suy ra $\left(n^2+136q\right) \vdots 17^2$ (2).

Vì $136q \vdots 17$ nên $n^2 \vdots 17$, mà 17 là số nguyên tố nên $n^2 \vdots 17^2$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $136q \vdots 17^2$. Do đó $q \vdots 17$ và q là số nguyên tố nên $q=17$.

Với $q=17$ tồn tại $n=51$ thỏa mãn :

$$n^2+136q=51^2+136.17=17^3.$$

Vậy $q=17$.

Câu 3. *Cho tam giác ABC vuông tại A. Các điểm E, F thay đổi lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho $EF \parallel BC$. Gọi D là giao điểm của BF và CE, H là hình chiếu vuông góc của D lên EF. Đường tròn (I) đường kính EF cắt BF tại M, cắt CE tại N (M khác F, N khác E).*

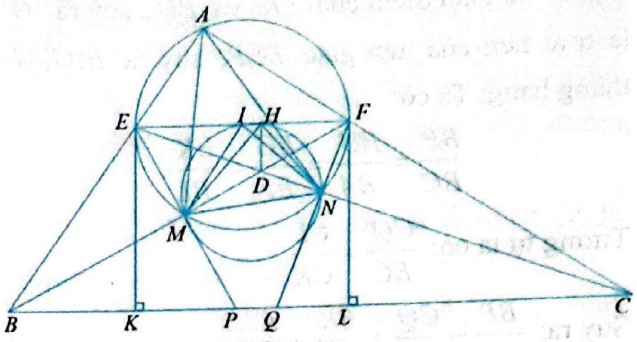
a) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN đi qua điểm I.

b) Gọi K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của E, F lên BC và P, Q tương ứng là giao điểm của EM, FN với BC. Chứng minh $\dfrac{BP\cdot BL}{CQ\cdot CK}$ không đổi khi E, F thay đổi.

c) Chứng minh nếu EL và FK cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn (I) thì EM và FN cắt nhau tại một điểm thuộc đường thẳng BC.

Lời giải.

a) Chứng minh $\widehat{MHN}=2\widehat{MAN}=\widehat{MIN}$, suy ra tứ giác $MIHN$ nội tiếp. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN đi qua điểm I.



b) Ta có: $\begin{cases}\Delta BMP \backsim \Delta BLF\,(\text{g.g})\\ \Delta BME \backsim \Delta BAF\,(\text{g.g})\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases}BM.BF=BP.BL\\ BM.BF=BA.BE\end{cases} \Rightarrow BP.BL=BA.BE \quad (1).$$

$$\begin{cases}\Delta CNQ \backsim \Delta CKE\,(\text{g.g})\\ \Delta CNF \backsim \Delta CAE\,(\text{g.g})\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}CN.CE=CQ.CK\\ CN.CE=CF.CA\end{cases}$$

$$\Rightarrow CQ\cdot CK=CF\cdot CA \quad (2).$$

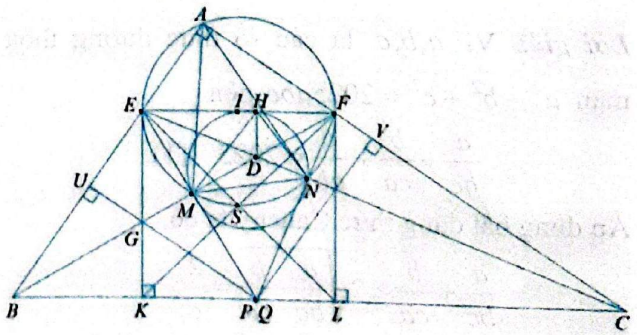
Mặt khác $EF \parallel BC$ nên $\dfrac{BE}{CF}=\dfrac{BA}{CA}$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$$\frac{BP\cdot BL}{CQ\cdot CK}=\frac{BE\cdot BA}{CF\cdot CA}$$

$$=\frac{BA}{CA}.\frac{BA}{CA}=\frac{AB^2}{AC^2}\text{ (cố định).}$$

c) Giả sử EL, FK cắt nhau tại S thuộc (I). Khi đó $\widehat{ESF}=90^\circ$ và $EFLK$ là hình vuông. Vẽ $PU\perp AB$, $QV\perp AC$.



Được quét bằng CamScanner

Đặt $EK = KL = LF = FE = x\ (x > 0)$.

Ta có: $\Delta BEK \backsim \Delta FCL$, suy ra:

$$\frac{BK}{FL} = \frac{EK}{CL} \Rightarrow BK.CL = EK.FL = x.x = x^2$$

$$\Rightarrow CL = \frac{x^2}{BK}.$$

Gọi G là giao điểm của EK và PU, suy ra G là trực tâm của tam giác BEP, suy ra B,G,M thẳng hàng. Ta có:

$$\frac{BP}{BC} = \frac{BU}{BA} = \frac{BG}{BF} = \frac{BK}{BL}.$$

Tương tự ta có: $\frac{CQ}{BC} = \frac{CL}{CK}$.

Suy ra: $\frac{BP}{BC} + \frac{CQ}{BC} = \frac{BK}{BL} + \frac{CL}{CK}$.

Lại có: $\frac{BK}{BL} + \frac{CL}{CK} = \frac{BK}{BK+x} + \frac{CL}{CL+x}$

$$= \frac{BK}{BK+x} + \frac{\frac{x^2}{BK}}{\frac{x^2}{BK}+x}$$

$$= \frac{BK}{BK+x} + \frac{x}{x+BK} = 1.$$

Suy ra $\frac{BP}{BC} + \frac{CQ}{BC} = 1 \Leftrightarrow BP + CQ = BC$.

Vậy P và Q trùng nhau hay EM và FN cắt nhau tại một điểm thuộc đường thẳng BC.

Câu 4. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2 = 2025abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$T = \frac{a}{3a^2+2b^2+c^2} + \frac{b}{3b^2+2c^2+a^2} + \frac{c}{3c^2+2a^2+b^2}.$$

Lời giải. Vì a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2 = 2025abc$ nên

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} = 2025 \quad (1).$$

Áp dung bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} \geq 2\sqrt{\frac{a}{bc}\cdot\frac{b}{ca}} = \frac{2}{c};$$

$$\frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq 2\sqrt{\frac{b}{ca}\cdot\frac{c}{ab}} = \frac{2}{a};$$

$$\frac{a}{bc} + \frac{c}{ab} \geq 2\sqrt{\frac{a}{bc}\cdot\frac{c}{ab}} = \frac{2}{b}.$$

Suy ra: $2\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right) \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 2025$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$3a^2+2b^2+c^2 = 2\left(a^2+b^2\right) + \left(a^2+c^2\right) \geq 4ab + 2ac$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3a^2+2b^2+c^2} \leq \frac{a}{4ab+2ac} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2b+c}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\left(\frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right)(2b+c) = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(b+b+c) \geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{b+b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}.\frac{1}{2b+c} \leq \frac{1}{18}\left(\frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Suy ra: $\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2} \leq \frac{1}{18}\left(\frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right)$.

Chứng minh tương tự, ta có:

$$\frac{b}{3b^2+2c^2+a^2} \leq \frac{1}{18}\left(\frac{2}{c} + \frac{1}{a}\right);$$

$$\frac{c}{3c^2+2a^2+b^2} \leq \frac{1}{18}\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Suy ra:

$$T \leq \frac{1}{6}.\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq \frac{1}{6}.2025 \Rightarrow T \leq \frac{675}{2}.$$

Đẳng thức $T = \frac{675}{2}$ xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{675}$.

Vậy giá trị lớn nhất của T là $\frac{675}{2}$, đạt được tại $a = b = c = \frac{1}{675}$.

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Giới thiệu

Được quét bằng CamScanner

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN TỈNH NINH BÌNH

Năm học 2026 - 2027

Môn thi: TOÁN (Chuyên) - **Thời gian làm bài:** *150 phút*

Bài 1. (2,0 *điểm*) 1) Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn $x+y+z=3$. Chứng minh

$$\frac{1}{3x+yz}+\frac{1}{3y+xz}+\frac{1}{3z+xy}=\frac{6}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

2) Xét đa thức $P(x)=x^3-mx+1$, với m là một số thực. Giả sử đa thức $P(x)$ có ba nghiệm thực là a,b,c.

a) Chứng minh $abc=-1$.

b)Tìm tất cả các giá trị của m để $a^6+b^6+c^6=19$.

Bài 2. (2,0 *điểm*) 1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}4x^3\left(y^2+1\right)+\sqrt{2x}-2=0\\ 2x^2y\left(1+\sqrt{y^2+3}\right)=x+\sqrt{3x^2+\dfrac{1}{4}}.\end{cases}$$

2) Một đoàn thiện nguyện dự định chở 48 tấn hàng để hưởng ứng phong trào "*Hướng về Miền Trung thân yêu*". Khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hoá tăng thêm 7 tấn so với dự định, do đó đoàn thiện nguyện phải bổ sung thêm 3 xe, lúc này mỗi xe chở ít hơn dự định 1 tấn hàng. Hỏi ban đầu, đoàn thiện nguyện dự định dùng bao nhiêu chiếc xe để chở hàng, biết các xe chở số tấn hàng bằng nhau?

Bài 3. (3,0 *điểm*) Cho tam giác ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$ đường kính BC. Lấy điểm H nằm trên đoạn thẳng OC (H không trùng với O và C). Đường thẳng đi qua H và vuông góc với đường thẳng BC cắt đường thẳng AC tại E và cắt đường thẳng AB tại F. Gọi D là giao điểm của đường thẳng BE với đường tròn $(O;R)$ (D không trùng với B). Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC. Tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O;R)$ cắt đường thẳng EF tại G.

1) Chứng minh ba điểm F, D, C thẳng hàng và tam giác FAD đồng dạng với tam giác FCB.

2) Chứng minh G là trung điểm của EF và tìm vị trí của điểm H trên đoạn thẳng OC sao cho $OI+4OH$ đạt giá trị nhỏ nhất.

3) Đường thẳng qua B song song với đường thẳng FC cắt đường thẳng CA tại S. Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng FH và AD. Chứng minh đường thẳng OS song song với đường thẳng CK.

Bài 4. (1,5 *điểm*) 1) Tìm tất cả các cặp $(x;y)$ nguyên dương thoả mãn

$$x^2-2y^2+2x-y-xy=21.$$

2) Cho 2026 số nguyên dương $a_1,a_2,\ldots,a_{2026}$. Chứng minh tồn tại hai số nguyên dương $x;y$ thoả mãn $y>1$ và $xy+a_i$ chia hết cho $x+a_i$ với mọi số nguyên dương i từ 1 đến 2026.

Bài 5. (0,75 *điểm*) Xét a, b, c là ba số thực dương thoả mãn $ab+bc+ca=3$.

1) Chứng minh $a+b+c\geq 3$.

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{(2a+b+c)^3}{b+c}+\frac{(2b+c+a)^3}{c+a}+\frac{(2c+a+b)^3}{a+b}.$$

Bài 6. (0,75 *điểm*) Có 8 "chú" mèo, mỗi "chú" được đặt tên là một dãy ký tự thuộc vào tập hợp $\{000;001;010;011;100;101;110;111\}$ sao cho không có hai "chú" mèo nào trùng tên. Hai "chú" mèo gọi là "*liên kết*" với nhau nếu trong dãy ký tự tên của chúng, có đúng một vị trí, mà hai ký tự tương ứng khác nhau (ví dụ: hai "chú" mèo 000 và 001 được gọi là liên kết với nhau, nhưng hai "chú" mèo 000 và 011 thì không được gọi là liên kết với nhau). Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất, sao cho trong k "chú" mèo phân biệt được chọn tuỳ ý từ 8 "chú" mèo trên, tồn tại 3 "chú" mèo mà một "chú" liên kết với hai "chú" kia.

TRẦN XUÂN ĐÁNG

(5/7/136 Phan Đình Phùng, phường Nam Định, tỉnh Ninh Bình)

Giới thiệu

Được quét bằng CamScanner

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 2
THỬ SỨC TRƯỚC KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2026

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

1. D	2. B	3. A	4. B	5. D	6. A
7. A	8. D	9. C	10. C	11. B	12. D

Câu 1. Ta có $u_5 = u_1.q^4 = -3.2^4 = -48$. Chọn D.

Câu 2. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $y' > 0$ với $x \in (-3;0)$ nên hàm số đồng biến trên $(-3;0)$. Chọn B.

Câu 3. Ta có một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n'}(3;-2;1)$ nên vectơ $\vec{n}(-3;2;-1) = -\vec{n'}$ cũng là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P). Chọn A.

Câu 4. Ta có: $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{3} + l2\pi \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + l2\pi \end{array}\right.$ $(k,l \in \mathbb{Z})$. Chọn B.

Câu 5. Ta có: $\lim\limits_{x\to -1^+} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^-} y = +\infty$ nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = -1$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} y = \lim\limits_{x\to +\infty} y = 3$ nên tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 3$. Chọn D.

Câu 6. Ta có: $3^{x+1} = 81 \Leftrightarrow 3^{x+1} = 3^4$

$\Leftrightarrow x + 1 = 4 \Leftrightarrow x = 3$. Chọn A.

Câu 7. Ta có $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{AD}$ nên

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Chọn A.

Câu 8. Ta có:

$$\int_{-1}^{2}\left[3f(x) - 4g(x)\right]dx = \int_{-1}^{2} 3f(x)dx - \int_{-1}^{2} 4g(x)dx$$

$$= 3\int_{-1}^{2} f(x)dx - 4\int_{-1}^{2} g(x)dx = -17.$$ Chọn D.

Câu 9. Ta có $SA \perp (ABC)$ nên hình chiếu của SB lên (ABC) là AB. Chọn C.

Câu 10. Bảng phân bố tần số ghép nhóm bao gồm cả tần số tích luỹ của mẫu số liệu như sau:

Nhóm	[0;20)	[20;40)	[40;60)	[60;80)	[80;100)
Tần số	7	8	12	10	8
Tần số tích luỹ	7	15	27	37	45

Ta có số phần tử của mẫu là $n = 45$; $\dfrac{n}{2} = 22,5$.

Ta thấy nhóm $[40;60)$ là nhóm đầu tiên có tần số tích luỹ lớn hơn hoặc bằng 22,5.

Nên $M_e = 40 + \dfrac{(22,5-15)}{12}.20 = 52,5$. Chọn C.

Câu 11. Ta có diện tích đáy bằng a^2.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên chiều cao khối chóp bằng SA và góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SCA}$, suy ra $\widehat{SCA} = 60°$.

Ta có: $AC = a\sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông SAC, ta có:

$SA = AC.\tan\widehat{SCA} = a\sqrt{2}.\tan 60° = a\sqrt{6}$.

Vậy thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

$V = \dfrac{1}{3}a^2.a\sqrt{6} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. Chọn B.

Câu 12. Nhìn vào đồ thị ta thấy $a > 0$ và $d > 0$ do đồ thị cắt trục Oy phía trên trục hoành.

Lại có $y' = 0$ có 2 nghiệm trái dấu nên a, c trái dấu, suy ra $c < 0$.

Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm, nghiệm dương lớn hơn trị tuyệt đối của nghiệm âm nên tổng 2 nghiệm đó dương, suy ra a, b trái dấu, suy ra $b < 0$. Chọn D.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1. a) Sai, b) Đúng, c) Sai, d) Đúng.

a) Tập xác định: $(0;+\infty)$.

Được quét bằng CamScanner

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là:

$$f'(x)=(x^2)'.\ln x+x^2(\ln x)'=2x\ln x+x.$$

c) Ta có:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x\ln x+x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin(0;+\infty)\\ x=e^{\frac{-1}{2}}\end{array}\right.$$

d) Ta có: $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=-\frac{2}{e^4}$; $f\left(e^{\frac{-1}{2}}\right)=\frac{-1}{2e}$;

$f(2e)=4e^2(1+\ln 2)$ nên suy ra:

$$\min_{\left[\frac{1}{e^2};2e\right]}f(x)=\frac{-1}{2e}.$$

Câu 2. a) Đúng, b) Sai, c) Sai, d) Đúng.

a) Ta có: $V'(t)=k.\sqrt{t}$.

b) Ta có: $V(t)=\int k.\sqrt{t}dt=\frac{2k}{3}.t\sqrt{t}+C$.

Mà $V(0)=50000\Rightarrow V(t)=\frac{2k}{3}.t\sqrt{t}+50000$.

c) Ta có: $V(4)=\frac{2k}{3}.4\sqrt{4}+50000=58000$

$\Rightarrow k=1500\Rightarrow V(t)=1000t\sqrt{t}+50000$.

Do đó suy ra: $V(16)=114000$ (lít).

d) Tại thời điểm 9 giờ, lượng dầu còn lại trong bể chứa là: $V(9)-9.500=72500$ (lít).

Câu 3. a) Đúng, b) Đúng, c) Đúng, d) Đúng.

a) Số học sinh thường xuyên sử dụng AI là 600, nên ta có: $P(A)=\frac{600}{1000}=0,6$.

Xác suất học sinh không thường xuyên sử dụng AI là $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,6=0,4$.

b) Tỉ lệ học sinh đạt loại giỏi trong nhóm thường xuyên sử dụng AI là 40%, nên $P(B\mid A)=0,4$.

c) Áp dụng công thức xác suất toàn phần, xác suất để một học sinh đạt loại giỏi là:

$$P(B)=P(A)\cdot P(B\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(B\mid\overline{A})$$
$$=0,6\cdot 0,4+0,4\cdot 0,2=0,24+0,08=0,32.$$

d) Ta cần tính xác suất một học sinh thường xuyên sử dụng AI với điều kiện học sinh đó đạt loại giỏi. Áp dụng công thức Bayes, ta có:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)\cdot P(B\mid A)}{P(B)}$$
$$=\frac{0,6\cdot 0,4}{0,32}=\frac{0,24}{0,32}=0,75.$$

Đổi sang phần trăm ta được: $0,75\cdot 100\%=75\%$.

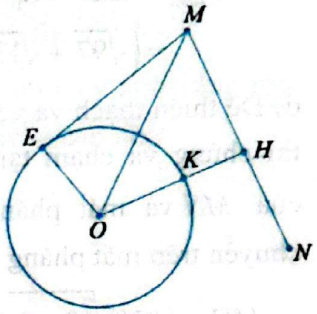
Câu 4. a) Đúng, b) Sai, c) Sai, d) Đúng.

a) Xét đường thẳng MN đi qua điểm $N(12;5;0)$ có vectơ chỉ phương:

$$\overrightarrow{MN}=(12;0;-12)=12(1;0;-1).$$

Phương trình tham số đường thẳng MN:

$$\begin{cases}x=12+t\\ y=5\\ z=-t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R}).$$



Gọi (P) là mặt phẳng qua O và vuông góc với MN, khi đó (P) có phương trình $x-z=0$.

Gọi H là giao điểm của MN và (P) ta có:

$$12+2t=0\Leftrightarrow t=-6\Rightarrow H(6;5;6).$$

Thiên thạch gần Trái Đất nhất khi thiên thạch đi qua H. Khoảng cách gần nhất của thiên thạch với Trái Đất là:

$$d=1000.OH-6400$$
$$=1000\sqrt{6^2+5^2+6^2}-6400\approx 3449\text{ (km)}.$$

b) Từ vị trí M thiên thạch đổi hướng lao xuống Trái Đất theo phương thẳng thì tại vị trí phương thẳng tiếp xúc với Trái Đất (phương thẳng là tiếp tuyến với Trái Đất) là quãng đường dài nhất bằng ME. Ta có tam giác OME vuông tại E, có:

$OE=6400$ km;

$OM=1000\sqrt{12^2+5^2}=13000$ (km).

Do đó quãng đường dài nhất là:

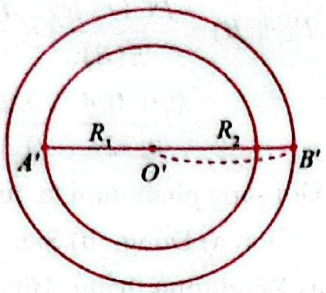
$$ME=\sqrt{OM^2-OE^2}$$
$$=\sqrt{13000^2-6400^2}\approx 11315\text{ (km)}.$$

c) Ta có mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MN là: $(P):x-z=0$

$\Rightarrow O,A,B\in(P)$.

Được quét bằng CamScanner

Do đó, các vệ tinh A, B nằm trong mặt phẳng (P) và nằm quay quanh các đường tròn tâm O có bán kính lần lượt là $R_1 = OA = \sqrt{97}$, $R_2 = OB = \sqrt{134}$. Khoảng cách giữa A, B lớn nhất khi A, O, B thẳng hàng. Do đó khoảng cách lớn nhất giữa hai vệ tinh là:



$$AB_{\max} = A'B' = R_1 + R_2$$
$$= \left(\sqrt{97} + \sqrt{134}\right)1000 \approx 21425 \text{ (km)}.$$

d) Để thiên thạch và vệ tinh A va chạm vào nhau thì chúng va chạm tại điểm $H(6;5;6)$ là giao của MN và mặt phẳng (P) vì vệ tinh A di chuyển trên mặt phẳng (P). Ta có:

$$MH = 1000\sqrt{(0-6)^2 + (5-5)^2 + (12-6)^2}$$
$$= 6000\sqrt{2} \text{ (km)}.$$

Thời gian để thiên thạch đi hết quãng đường MH là: $t_1 = \dfrac{MH}{v_1} = \dfrac{6000\sqrt{2}}{2\sqrt{2}.10^3} = 3$ (giờ).

Ta có O là trung điểm của AH nên quãng đường vệ tinh di chuyển từ A đến H bằng nửa chu vi đường tròn bán kính OA và bằng:

$$l = \pi.OA = 1000\pi\sqrt{97} \text{ (km)}.$$

Thời gian để vệ tinh di chuyển từ A đến H:

$$t_2 = \frac{l}{v_2} = \frac{1000\pi\sqrt{97}}{\frac{\pi\sqrt{97}}{3}.10^3} = 3 \text{ (giờ)}.$$

Suy ra $t_1 = t_2 = 3$ (giờ), do đó thiên thạch và vệ tinh A va chạm với nhau.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. *Đáp số*: 5.

Để dễ hình dung thông qua các yếu tố bài toán thực tế, ta sắp xếp lại thông tin và được một bài toán thuần $Oxyz$ như sau:

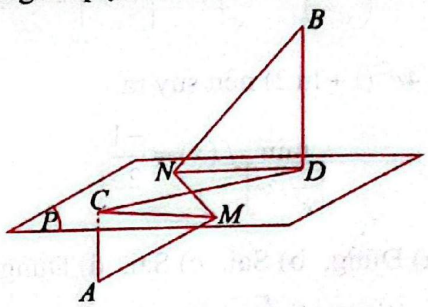
"Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;0)$ và $B(2;3;4)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu:

$$(S_1): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4$$

và $$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0.$$

Xét M, N là hai điểm bất kì thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MN = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$."

Khi đó ta giải quyết bài toán như sau:



Xét hệ $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $x = 0$ ((P) chính là mặt phẳng (Oyz)).

Gọi $O \equiv C(0;0;0)$ và $D(0;3;4)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(-1;0;0)$ và $B(2;3;4)$ trên mặt phẳng (P). Suy ra:

$$AC = 1, BD = 2, CD = 5.$$

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2},$$

ta có:

$$AM + BN = \sqrt{AC^2 + CM^2} + \sqrt{BD^2 + DN^2}$$
$$\geq \sqrt{(AC + BD)^2 + (CM + DN)^2} \geq \sqrt{9 + (CM + DN)^2}.$$

Lại có $CM + MN + ND \geq CD = 5$ nên suy ra:

$$CM + ND \geq 4.$$

Do đó $AM + BN \geq 5$.

Đẳng thức xảy ra khi C, M, N, D thẳng hàng theo thứ tự đó và $\dfrac{AC}{CM} = \dfrac{BD}{DN}$, tức là:

$$M\left(0; \frac{4}{5}; \frac{16}{15}\right) \text{ và } N\left(0; \frac{7}{5}; \frac{28}{15}\right).$$

Được quét bằng CamScanner

Vậy giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ bằng 5 khi

$$M\left(0;\frac{4}{5};\frac{16}{15}\right) \text{ và } N\left(0;\frac{7}{5};\frac{28}{15}\right).$$

Câu 2. *Đáp số*: 81.

Khi quay bảng một góc bằng 180° theo chiều kim đồng quanh tâm ta có:

• Các ô ở góc: $a_1 \to a_9$ và $a_3 \to a_7$ là ảnh của nhau qua phép quay.

• Các ô trên cạnh: $a_2 \to a_8$ và $a_6 \to a_4$ là ảnh của nhau qua phép quay, ô ở tâm a_5 thì giữ nguyên.

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Theo đề bài: Khi quay bảng, mọi ô tô màu xám sẽ ở vị trí trước đây của các ô tô màu hồng.

• Xét ô ở tâm a_5: Do a_5 giữ nguyên khi quay nên ô a_5 phải được tô bằng màu hồng.

Xét 4 ô ở góc a_1, a_3, a_9, a_7 theo điều kiện của bài toán thì hai ô đối xứng nhau qua ô ở tâm thì phải tô khác màu nên ta có 9 cách tô 4 ô ở 4 góc, do mỗi cặp ô đối diện nhau ta có thể tô khác màu nên có 2 cách và cùng màu hồng có 1 cách.

Tương tự ta cũng có 9 cách tô màu cho 4 ô trên các cạnh. Vậy có $1.9.9 = 81$ cách tô màu thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 3. *Đáp số*: 50.

Hàm doanh thu $R(x)$: Là tổng số tiền thu được khi bán x máy tính bảng.

$$R(x) = x \cdot p(x) = x(8600 - 10x) = 8600x - 10x^2$$

(nghìn đồng).

Xác định hàm tổng chi phí $T(x)$: Vì $c(x)$ là chi phí sản xuất trên mỗi đơn vị máy, nên tổng chi phí cho x máy là:

$$T(x) = x \cdot c(x) = x\left(x^2 - 4x + 500 + \frac{1000}{x}\right)$$

$$= x^3 - 4x^2 + 500x + 1000 \text{ (nghìn đồng).}$$

Ta có hàm lợi nhuận là: $f(x) = R(x) - T(x)$

$$= (8600x - 10x^2) - (x^3 - 4x^2 + 500x + 1000)$$

$$= -x^3 - 6x^2 + 8100x - 1000 \text{ (với } x > 0).$$

Suy ra: $f'(x) = -3x^2 - 12x + 8100$.

Giải phương trình: $f'(x) = 0$

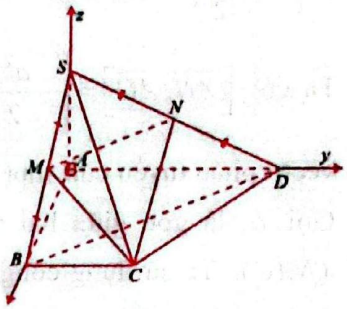
$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 2700 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 50 \text{ (thoả mãn)} \\ x = -54 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

x	0		50		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	$f_{\max}$	↘	

Dựa vào bảng biến thiên của hàm bậc ba có hệ số $a = -1 < 0$, ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ tại điểm cực đại $x = 50$.

Vậy công ty X nên bán ra 50 máy tính bảng mỗi tháng để lợi nhuận thu được là cao nhất.

Câu 4. *Đáp số*: 90°.



Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ có gốc toạ độ $A \equiv (0;0;0)$. Các trục Ax, Ay, Az lần lượt đi qua các điểm B, D, S.

Tọa độ các đỉnh đáy:

$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;2a;0)$.

Gọi chiều cao $h = SA$ suy ra $S(0;0;h)$ với $h > 0$.

Diện tích đáy $ABCD$ (hình thangvuông tại A và B):

$$S_{ABCD} = \frac{(AD + BC) \cdot AB}{2} = \frac{(2a + a) \cdot a}{2}$$

$$= \frac{3a^2}{2}.$$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SA$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2}{2} \cdot h = \frac{a^2 h}{2}.$$

Theo giả thiết $V = \frac{a^3}{2}$, ta có:

$$\frac{a^2 h}{2} = \frac{a^3}{2} \Rightarrow h = a.$$

Vậy tọa độ đỉnh S là $S(0;0;a)$.

Được quét bằng CamScanner

Vì M là trung điểm $SB \Rightarrow M\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right)$.

Vì N là trung điểm $SD \Rightarrow N\left(0;a;\frac{a}{2}\right)$.

Mặt phẳng (MAC) đi qua các điểm $A(0;0;0)$, $M\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2}\right)$, $C(a;a;0)$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right]=\left(-\frac{a^2}{2};\frac{a^2}{2};\frac{a^2}{2}\right)$.

Chọn một vectơ pháp tuyến của mp(MAC) là $\vec{n}_1=(-1;1;1)$.

Mặt phẳng (NAC) đi qua các điểm $A(0;0;0)$, $N\left(0;a;\frac{a}{2}\right)$, $C(a;a;0)$.

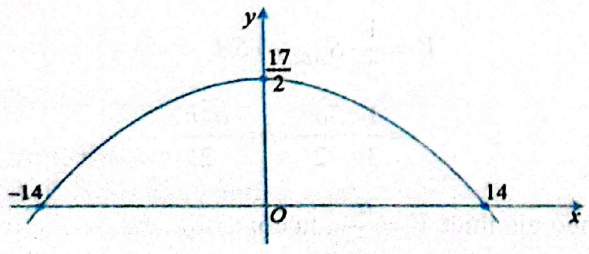
Ta có: $\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AC}\right]=\left(-\frac{a^2}{2};\frac{a^2}{2};-a^2\right)$. Chọn một vectơ pháp tuyến của mp(NAC) là $\vec{n}_2=(-1;1;-2)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (MAC) và (NAC). Ta sử dụng công thức tính góc giữa hai vectơ pháp tuyến:

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$$
$$=\frac{|(-1)(-1)+(1)(1)+(1)(-2)|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2}}=0.$$

Vì $\cos\alpha=0$ nên $\alpha=90°$. Số đo góc phẳng nhị diện $[M,AC,N]$ bằng $90°$.

Câu 5. *Đáp số*: 3390.



Ta thấy đồ thị hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ đi qua các điểm $(-14;0),(14;0)$ và $\left(0;\frac{17}{2}\right)$ nên ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases}(-14)^2a+(-14)b+c=0\\14^2a+14b+c=0\\0^2.a+0.b+c=\frac{17}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{17}{392}\\b=0\\c=\frac{17}{2}\end{cases}.$$

Vậy thể tích của quả bóng bầu dục trên là:

$$V=\pi\int_{-14}^{14}\left(-\frac{17}{392}x^2+\frac{17}{2}\right)^2dx$$
$$=\frac{16184}{15}\pi\approx3390\ (\text{cm}^3).$$

Câu 6. *Đáp số*: 273.

Gọi X là biến cố: "Hiệu số thu được là một số đối xứng có 4 chữ số".

Không gian mẫu $n(\Omega)=9^4-9=6552$.

Gọi số lớn nhất sau khi sắp xếp có dạng $\overline{abcd}$, suy ra số bé nhất có dạng $\overline{dcba}$.

Trường hợp 1: $b=c$.

Khi đó hiệu số của số lớn nhất và số nhỏ nhất có: Hàng đơn vị là $10+d-a$, hàng chục là 9, hàng trăm là 9, hàng nghìn là $a-d-1$. Do hiệu số là số đối xứng nên $2(a-d)=11$ (vô lý).

Trường hợp 2: $b>c$.

Khi đó hiệu số của số lớn nhất và số nhỏ nhất có: Hàng đơn vị là $10+d-a$, hàng chục là $9+c-b$, hàng trăm là $b-c-1$, hàng nghìn là $a-d$.

Do hiệu số là số đối xứng nên $a-d=b-c=5$ mà $a\ge b\ge c\ge d$, suy ra: $a=b;c=d$.

Ta có: $a=d+5$, suy ra: $1\le d+5\le9\Leftrightarrow1\le d\le4$.

Suy ra có 4 cặp $(d;a)$ thoả mãn là:

$$(1;6),\ (2;7),\ (3;8),\ (4;9).$$

Xét $d=1$, suy ra $a=6$, có 6 số có 4 chữ số gồm 2 chữ số 1 và 2 chữ số 6.

Tương tự cho ba cặp còn lại ta có $n(X)=24$.

Vậy $T=P(X)=\frac{24}{6552}$ suy ra $\frac{1}{T}=273$.

LƯƠNG MẠNH QUYỀN
(GV THPT chuyên Nguyễn Chí Thanh, Lâm Đồng)

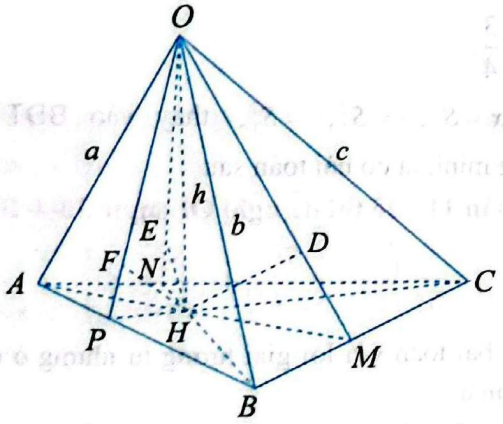
Được quét bằng CamScanner

KHAI THÁC MỘT TÍNH CHẤT CỦA TỨ DIỆN VUÔNG TRONG VIỆC XÂY DỰNG BÀI TẬP BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

PHẠM DUY KHÁNH - NGUYỄN THỊ THÙY LINH
(GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An)

Tứ diện vuông là một khái niệm quen thuộc trong hình học không gian. Ngoài việc áp dụng tính chất của nó vào giải toán thì việc khai thác sâu tính chất đó vào sáng tạo các bài toán mới là hết sức quan trọng. Trong bài viết này tác giả khai thác một tính chất của tứ diện vuông trong việc tìm ra bài toán mới. Điều đó thể hiện qua nội dung sau:

Cho tứ diện $OABC$ có OA,OB,OB đôi một vuông góc, đường cao OH. Đặt $OA=a, OB=b,$ $OC=c, OH=h$ và $S_{\Delta OAB}=S_1, S_{\Delta OBC}=S_2,$ $S_{\Delta OCA}=S_3, S_{\Delta ABC}=S_4$. Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$, V là thể tích khối chóp.



Bây giờ ta sẽ tìm các bài toán bất đẳng thức (BĐT) hình học liên quan đến các đại lượng đã nêu. Ta có đẳng thức quen thuộc sau:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$$

hay $$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{h^2}=3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{h}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 1. $\frac{\sqrt{3}}{h}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Áp dụng BĐT Schwarz ta có:

$$\frac{\sqrt{3}}{h}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}\Leftrightarrow a+b+c\ge 3\sqrt{3}h.$$

Bài toán 2. $a+b+c\ge 3\sqrt{3}h.$

Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp, đặt:

$$V_{IOAB}=V_1, V_{IOBC}=V_2, V_{IOCA}=V_3, V_{IABC}=V_4;$$

$$r=\frac{3V_1}{S_1}=\frac{3V_2}{S_2}=\frac{3V_3}{S_3}=\frac{3V_4}{S_4}=\frac{3V_1+3V_2+3V_3+3V_4}{S_1+S_2+S_3+S_4}$$

$$=\frac{3V}{S_1+S_2+S_3+S_4}\quad(1).$$

Mặt khác ta có: $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{abc}{h}\right)^2=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$$

$$\Leftrightarrow S_4^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2\quad(2).$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$S_4\ge\frac{S_1+S_2+S_3}{\sqrt{3}}.$$

Ta có bài toán

Bài toán 3. $S_4\ge\frac{S_1+S_2+S_3}{\sqrt{3}}$.

Áp dụng bài toán 3 vào đẳng thức (1) ta có:

$$r\ge\frac{3V}{\sqrt{3}S_4+S_4}\Leftrightarrow r\ge\frac{1}{\sqrt{3}+1}.\frac{3V}{S_4}=\frac{1}{\sqrt{3}+1}.h.$$

Bài toán 4. $r\ge\frac{1}{\sqrt{3}+1}.h.$

Lại áp dụng bài toán 3 vào vào đẳng thức (1) theo chiều ngược lại ta có:

$$r\le\frac{3V}{S_1+S_2+S_3+\frac{S_1+S_2+S_3}{\sqrt{3}}}$$

Được quét bằng CamScanner

$$= \frac{3\sqrt{3}V}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(S_1+S_2+S_3\right)}$$

$$= \frac{6\sqrt{3}V}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(2S_1+2S_2+2S_3\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}abc}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(ab+bc+ca\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r} \geq \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Ta có bài toán.

Bài toán 5 (TH&TT, T5.2019).

$$\frac{1}{r} \geq \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

BĐT trong bài toán 5 tương đương với

$$\frac{1}{r} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Áp dụng BĐT Schwarz ta có:

$$\frac{1}{r} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3\sqrt{3}}{a+b+c}.$$

Ta có bài toán

Bài toán 6 (TH&TT, 1998).

$$\frac{1}{r} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3\sqrt{3}}{a+b+c}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho vế phải BĐT trong bài toán 5 ta có:

$$\frac{1}{r} \geq \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}.\frac{9}{a+b+c} \Leftrightarrow a+b+c \geq 3\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)r.$$

Ta có bài toán

Bài toán 7. $a+b+c \geq 3\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)r.$

Ta có: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{h^2} \geq \frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}$, ta có bài toán

Bài toán 8. $\frac{2}{h^2} \geq \frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}.$

Áp dụng BĐT Cauchy cho vế phải của BĐT trong Bài toán 8 ta có:

$$\frac{2}{h^2} \geq \frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3} \geq \frac{9}{S_1+S_2+S_3} \Leftrightarrow \frac{h^2}{S_1+S_2+S_3} \leq \frac{2}{9}.$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 9 (Đề đề nghị Olympic 30-4-2010).

$$\frac{h^2}{S_1+S_2+S_3} \leq \frac{2}{9}.$$

Áp dụng BĐT trong bài toán 3 vào bài toán 8 ta có: $\frac{2}{9} \geq \frac{h^2}{\sqrt{3}S_4} \Leftrightarrow S_4 \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}h^2 \Leftrightarrow V \geq \frac{\sqrt{3}}{2}h^3.$

Ta có bài toán sau

Bài toán 10. $V \geq \frac{\sqrt{3}}{2}h^3.$

Từ đẳng thức (2) ta có thể sáng tạo ra các BĐT về S_1, S_2, S_3, S_4 thông qua các BĐT đại số, chẳng hạn ta có bài toán:

Cho $x, y, z > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{x}{2x+y+z}+\frac{y}{x+2y+x}+\frac{z}{x+y+2z} \leq \frac{3}{4},$$

thật vậy:

$$\text{VT} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z}+\frac{y}{y+x}+\frac{z}{z+x}+\frac{z}{z+y}\right)$$

$$= \frac{3}{4}.$$

Đặt $x = S_1^2, y = S_2^2, z = S_3^2$, thay vào BĐT vừa chứng minh ta có bài toán sau

Bài toán 11 (Đề thi đề nghị Olympic 30-4-2010).

$$\frac{S_1^2}{S_4^2+S_1^2}+\frac{S_2^2}{S_4^2+S_2^2}+\frac{S_3^2}{S_4^2+S_3^2} \leq \frac{3}{4}.$$

Ta có bài toán với lời giải tương tự nhưng ở dạng tổng quát:

Cho $x, y, z > 0, n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng:

$$\frac{xy}{(n+2)x+(n+1)y+nz}+\frac{yz}{(n+2)y+(n+1)z+nx}+\frac{zx}{(n+2)z+(n+1)x+ny} \leq \frac{x+y+z}{3(n+1)}.$$

Thật vậy:

$$\frac{xy}{(n+2)x+(n+1)y+nz} = \frac{xy}{n(x+y+z)+2x+y}$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^2}\left(\underbrace{\frac{xy}{x+y+z}+\ldots+\frac{xy}{x+y+z}}_{n}+\frac{xy}{2x+y}\right)$$

Được quét bằng CamScanner

$$=\frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{nxy}{x+y+z}+\frac{xy}{x+x+y}\right)$$

$$\le\frac{1}{(n+1)^2}\left[\frac{nxy}{x+y+z}+\frac{1}{9}\left(\frac{xy}{x}+\frac{xy}{x}+\frac{xy}{y}\right)\right]$$

$$=\frac{nxy}{(n+1)^2(x+y+z)}+\frac{2y+x}{9(n+1)^2}.$$

Tương tự cho các trường hợp còn lại ta có:

$$\text{VT}\le\frac{n(xy+yz+zx)}{(n+1)^2(x+y+z)}+\frac{x+y+z}{3(n+1)^2}$$

$$\le\frac{n(x+y+z)^2}{3(n+1)^2(x+y+z)}+\frac{x+y+z}{3(n+1)^2}$$

$$=\frac{x+y+z}{3(n+1)}\ \text{(đpcm)}.$$

Đặt $S_1^2=x,\ S_2^2=y,\ S_3^2=z$, suy ra $S_4^2=x+y+z$, ta có bài toán sau

Bài toán 12.

$$\frac{(S_1S_2)^2}{nS_4^2+2S_1^2+S_2^2}+\frac{(S_2S_3)^2}{nS_4^2+2S_2^2+S_3^2}+\frac{(S_3S_1)^2}{nS_4^2+2S_3^2+S_1^2}\le\frac{S_4^2}{3(n+1)}.$$

Dễ dàng thấy rằng ΔBON là tam giác vuông từ đó suy ra $\Delta OHN\sim\Delta BHO$ và ta có:

$$\frac{NH}{HO}=\frac{HO}{HB}\Leftrightarrow NH.HB=OH^2\Leftrightarrow\frac{1}{HN.HB}=\frac{1}{OH^2}.$$

Tương tự ta cũng có: $\frac{1}{HM.HA}=\frac{1}{OH^2}$,

$\frac{1}{HP.HC}=\frac{1}{OH^2}$. Do đó:

$$\frac{1}{HM.HA}+\frac{1}{HN.HB}+\frac{1}{HP.HC}=\frac{3}{OH^2}=\frac{3}{h^2}.$$

Ta có các đánh giá: $\frac{3}{h^2}\ge\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$

và $\frac{3}{h^2}\ge3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\right)$.

Ta có bài toán sau

Bài toán 13.

a) $\frac{1}{HM.HA}+\frac{1}{HN.HB}+\frac{1}{HP.HC}\ge\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$;

b) $\frac{1}{HM.HA}+\frac{1}{HN.HB}+\frac{1}{HP.HC}\ge\frac{3}{2}\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}\right)$.

Áp dụng bài toán 4 ta có:

$$r\ge\frac{1}{\sqrt{3}+1}.h\Leftrightarrow\frac{1}{h^2}\ge\frac{1}{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}.\frac{1}{r^2}.$$

Ta có bài toán

Bài toán 14.

$$\frac{1}{HM.HA}+\frac{1}{HN.HB}+\frac{1}{HP.HC}\ge\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)^2.\frac{1}{r^2}.$$

Ta có: $\frac{1}{MB.MC}=\frac{1}{OM^2}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

Tương tự: $\frac{1}{PA.PB}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$; $\frac{1}{NC.NA}=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}$.

Do đó: $\frac{1}{MB.MC}+\frac{1}{NC.NA}+\frac{1}{PA.PB}$

$$=2\left(\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}\right)=\frac{2}{OH^2}=\frac{2}{h^2}.$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 15.

a) $\frac{1}{MB.MC}+\frac{1}{NC.NA}+\frac{1}{PA.HB}\ge\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$.

b) $\frac{1}{MB.MC}+\frac{1}{NC.NA}+\frac{1}{PA.PB}\ge\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}$.

c) $\frac{1}{MB.MC}+\frac{1}{NC.NA}+\frac{1}{PA.PB}\ge\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2.\frac{1}{r^2}$.

Nếu gọi α,β,γ lần lượt là góc giữa các mặt bên $(OBC),(OCA),(OAB)$ với mặt phẳng đáy thì lúc đó ta có:

$$\sin^2\alpha=\frac{OH^2}{OM^2}=OH^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right);$$

$$\sin^2\beta=OH^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right);$$

$$\sin^2\gamma=OH^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

Từ đó suy ra: $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$

$$\Leftrightarrow\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Áp dụng Bunyakovsky ta có:

Được quét bằng CamScanner

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\sqrt{3}.$$

Mặt khác ta có: $\cos\alpha=\dfrac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta OBC}}=\dfrac{2S_{\Delta HBC}}{bc}$,

tương tự: $\cos\beta=\dfrac{2S_{\Delta HCA}}{ca}$, $\cos\gamma=\dfrac{2S_{\Delta HAB}}{ab}$.

Do đó: $\dfrac{2S_{\Delta HBC}}{bc}+\dfrac{2S_{\Delta HCA}}{ca}+\dfrac{2S_{\Delta HAB}}{ab}\le\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow aS_{\Delta HBC}+bS_{\Delta HCA}+cS_{\Delta HAB}\le\frac{\sqrt{3}}{2}abc.$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 16 (TH&TT, T3.2013).

$$aS_{\Delta HBC}+bS_{\Delta HCA}+cS_{\Delta HAB}\le\frac{\sqrt{3}}{2}abc.$$

Nếu gọi D,E,F lần lượt là hình chiếu của H lên các mặt phẳng $(OBC),(OCA),(OAB)$ lúc đó ta có: $HD=\dfrac{6V_{HOBC}}{bc},HE=\dfrac{6V_{HOCA}}{ca},HF=\dfrac{6V_{HOAB}}{ab}$.

Từ đó suy ra: $V_{HOAB}+V_{HOBC}+V_{HOCA}=V$.

Xét tích sau: $HD.HE.HF=\dfrac{6^3V_{HOAB}.V_{HOBC}.V_{HOCA}}{6^2V^2}$

$$\le\frac{2}{9}.\frac{\left(V_{HOAB}+V_{HOBC}+V_{HOCA}\right)^3}{V^2}=\frac{2}{9}V.$$

Ta có

Bài toán 17. $HD.HE.HF\le\dfrac{2}{9}V$.

Ta có $\Delta OFH\sim\Delta HFP$, từ đó ta có:

$$\frac{OF}{HF}=\frac{HF}{PF}\Leftrightarrow FO.FP=HF^2;$$

$$\frac{1}{FO.FP}=\frac{1}{FH^2}=\frac{1}{OH^2}+\frac{1}{HP^2}$$

$$=\frac{1}{OH^2}+\frac{\tan^2\gamma}{OH^2}=\frac{1}{\cos^2\gamma.OH^2}.$$

Tương tự: $\dfrac{1}{DO.DM}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha.OH^2}$;

$\dfrac{1}{EO.EN}=\dfrac{1}{\cos^2\beta.OH^2}$. Do đó:

$$\frac{1}{DO.DM}+\frac{1}{EO.EN}+\frac{1}{FO.FP}$$

$$=\frac{1}{OH^2}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}\right)$$

$$\ge\frac{9}{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}.\frac{1}{OH^2}=\frac{9}{OH^2}.$$

Hoàn toàn tương tự như các bài toán 14 và 15 ta có bài toán sau

Bài toán 18.

a) $\dfrac{1}{DO.DM}+\dfrac{1}{EO.EN}+\dfrac{1}{FO.FP}\ge3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2$;

b) $\dfrac{1}{DO.DM}+\dfrac{1}{EO.EN}+\dfrac{1}{FO.FP}\ge\dfrac{9}{2}\left(\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}\right)$.

c) $\dfrac{1}{DO.DM}+\dfrac{1}{EO.EN}+\dfrac{1}{FO.FP}\ge\left(\dfrac{3}{\sqrt{3}+1}\right)^2.\dfrac{1}{r^2}$.

Bài toán 19.

a) $\dfrac{1}{HD^2}+\dfrac{1}{HE^2}+\dfrac{1}{HF^2}\ge3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2$.

b) $\dfrac{1}{HD^2}+\dfrac{1}{HE^2}+\dfrac{1}{HF^2}\ge\dfrac{9}{2}\left(\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}\right)$.

c) $\dfrac{1}{HD^2}+\dfrac{1}{HE^2}+\dfrac{1}{HF^2}\ge\left(\dfrac{3}{\sqrt{3}+1}\right)^2.\dfrac{1}{r^2}$.

Ta có: $HD=\dfrac{6V_{HOBC}}{bc}\Leftrightarrow\dfrac{1}{HD}=\dfrac{bc}{6V_{HOBC}}$.

Tương tự: $\dfrac{1}{HE}=\dfrac{ca}{6V_{HOCA}},\dfrac{1}{HF}=\dfrac{ab}{6V_{HOAB}}$. Suy ra:

$$\frac{1}{HD}+\frac{1}{HE}+\frac{1}{HF}=\frac{ab}{6V_{HOAB}}+\frac{bc}{6V_{HOBC}}+\frac{ca}{6V_{HOCA}}\ (*).$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho vế phải của (*) ta có:

$$\frac{1}{HD}+\frac{1}{HE}+\frac{1}{HF}\ge\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{V_{HOAB}.V_{HOBC}.V_{HOCA}}}$$

$$\ge\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{6^2V^2}{V^3}}=\frac{3\sqrt[3]{36}}{2\sqrt[3]{V}}.$$

Ta có bài toán

Bài toán 20. $\dfrac{1}{HD}+\dfrac{1}{HE}+\dfrac{1}{HF}\ge\dfrac{3\sqrt[3]{36}}{2\sqrt[3]{V}}$.

Áp dụng BĐT Schwarzt cho vế phải của (*) ta có:

$$\frac{1}{HD}+\frac{1}{HE}+\frac{1}{HF}\ge\frac{\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)^2}{6\left(V_{HOAB}+V_{HOBC}+V_{HOCA}\right)}$$

$$\ge\frac{3\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}{abc}=3\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\right).$$

Được quét bằng CamScanner

Ta có bài toán sau là kết quả làm chặt bài toán 20 trên

Bài toán 21.

$$\frac{1}{HD}+\frac{1}{HE}+\frac{1}{HF}\ge 3\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\right).$$

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta có: $R=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2\sin C}=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{2\sin A}=\dfrac{\sqrt{c^2+a^2}}{2\sin B}$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}}{2\sin A+2\sin B+2\sin C}$$

$$\ge\frac{a+b+c}{\sqrt{2}(\sin A+\sin B+\sin C)}\ge\frac{\sqrt{6}(a+b+c)}{9}.$$

Ta có bài toán

Bài toán 22. $R\ge\dfrac{\sqrt{6}(a+b+c)}{9}$.

Áp dụng bài toán 7: $a+b+c\ge 3\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)r$, ta có bài toán:

Bài toán 23. $R\ge\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)r$.

Lại có: $R=\dfrac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)}}{4S_4}$

$$=\frac{h.\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)}}{12V}$$

$$=\frac{h.\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)}}{2abc}\ge\sqrt{2}h$$

$\Leftrightarrow h\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}R$. Ta có bài toán

Bài toán 24 (TH&TT, T3.2011). $h\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}R$.

Gọi R_1 là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ lúc đó ta dễ thấy: $R_1=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$;

$$S_4=\frac{3V}{h}=\frac{1}{2}abc.\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2};$$

$$r=\frac{3V}{S_1+S_2+S_3+S_4}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}abc}{\frac{1}{2}(ab+bc+ca)+\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$

$$=\frac{abc}{ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}.$$

Áp dụng các BĐT:

$$\frac{ab+bc+ca}{\sqrt{3}}\le\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$ và

$$abc=\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}\right)^3\le\left(\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\right)^3$$

$$\le\frac{(ab+bc+ca)\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{3\sqrt{3}},$$ ta có:

$$r\le\frac{\frac{(ab+bc+ca)\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{3\sqrt{3}}}{ab+bc+ca+\frac{ab+bc+ca}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{1}{3\left(\sqrt{3}+1\right)}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$\Leftrightarrow R_1\ge\dfrac{3\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}r$. Ta có bài toán

Bài toán 25. $R_1\ge\dfrac{3\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}r$.

Áp dụng bài toán 4: $r\ge\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}.h$, ta có: $R_1\ge\dfrac{3}{2}h$.

Ta có bài toán sau:

Bài toán 26. $R_1\ge\dfrac{3}{2}h$.

BÀI TẬP

Cho tứ diện $OABC$ có OA,OB,OB đôi một vuông góc, đường cao OH. Đặt $OA=a$, $OB=b,OC=c,OH=h$. Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$.

1) Chứng minh: $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{h}$.

2) Hãy xây dựng các bài toán bất đẳng thức hình học từ đẳng thức trên.

Được quét bằng CamScanner



CÁC LỚP THCS

Bài T1/588 (Lớp 6). Đặt ƯCLN(a, b) = d, BCNN(a, b) = m với $a,b\in\mathbb{N}^*$ thỏa mãn $(a-b)d=m$. Chứng minh rằng $m(m+2027)$ chia hết cho 12.

NGUYỄN NGỌC HÙNG
(GV THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Hà Tĩnh)

Bài T2/588 (Lớp 7). Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao. M là trung điểm của HC. Vẽ HN vuông góc với AM tại N. Chứng minh rằng $\widehat{MAC}=\widehat{HNB}$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/588. Cho $x>y>1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x+\sqrt{y+\sqrt{x+\sqrt{y}}}}>\sqrt{y+\sqrt{x+\sqrt{y+\sqrt{x}}}}.$$

NGUYỄN VĂN CẢNH
(GV THCS Long Hậu, xã Cần Giuộc, Tây Ninh)

Bài T4/588. Cho tam giác ABC nhọn có $AB<AC$, ba đường cao AD, BE, CF; EF cắt AD tại I. Trên đoạn DC lấy điểm K sao cho $DK=BD$. AK cắt BE tại Q. Chứng minh IQ song song với BC.

BÙI VĂN CHI
(Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T5/588. Cho phương trình $x^2+x-1=0$ và x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình ($x_1<x_2$). Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức

$$B=\sqrt{x_1^8+10x_1+13}+2x_1+x_2.$$

TẠ MINH HIẾU
(GV THCS Yên Lạc, Yên Lạc, Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/588. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2+y^2+y=5\\ x^3+y^3+6xy=8\end{cases}.$$

ĐÀO VĂN TRUNG
(GV THPT Huỳnh Thúc Kháng, Nghệ An)

Bài T7/588. Tính tích phân sau

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x(\sin x-\cos x)^{2026}}{(\sin x+\cos x)^{2028}}dx.$$

THÂN VĂN DỰ
(GV THPT Lạng Giang số 1, Bắc Giang)

Bài T8/588. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có $AB=2a$, $SA=\frac{\sqrt{138}}{3}a$, M là điểm thay đổi trong không gian. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=MA+MB+MC+MD+MS$ theo a.

NGUYỄN QUANG NAM
(GV THPT Quỳ Hợp 2, Nghệ An)

Bài T9/588. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $x_1=3$ và $x_{n+1}=x_n^3-3x_n$. Tính giá trị của $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_{n-1}^3x_{n+1}^3}{x_n^{10}}$.

LA ĐẠI CƯƠNG
(GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/588. Tìm tất cả các đa thức $P\in\mathbb{R}[x]$ thỏa mãn $P(x^n)=(x^n+1)P(x)$ với $n\in\mathbb{N},n\geq 2$.

NGUYỄN ĐỨC TƯỜNG
(Pleiku)

Bài T11/588. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(2y+f(xy))+2x=f(x)f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}^+.$$

HỒ THANH LAI
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định)

Bài T12/588. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$. Tia BA cắt tia CD tại E, tia DA cắt tia CB tại F. Gọi K, L lần lượt là trực tâm tam giác EBD, FBD; I, J lần lượt là tâm đường tròn Euler của tam giác EBD,

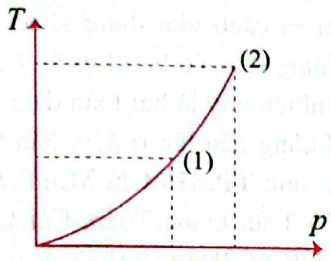
Được quét bằng CamScanner

FBD. DK cắt AB tại P. BL cắt AD tại Q. Chứng minh KL, PQ, EF, IJ đồng quy.

Chú thích: tâm đường tròn Euler của tam giác XYZ là tâm đường tròn đi qua ba trung điểm ba cạnh của tam giác.

NGUYỄN VĂN LINH
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài L1/588. Một lượng khí lí tưởng lưỡng nguyên tử thực hiện một quá trình biến đổi trạng thái trên hệ toạ độ (T, p), quá trình này được biểu diễn bằng đoạn (1) – (2) của một parabol mà đỉnh của nó trùng với gốc toạ độ như hình dưới.



Biết nội năng của n mol khí lưỡng nguyên tử được tính theo công thức $U=\frac{5}{2}nRT$. Gọi ΔU là độ biến thiên nội năng của khí và A là độ lớn công do khí thực hiện. Tỉ số $\frac{\Delta U}{A}$ bằng bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/588. Một electron chuyển động trong một từ trường đều có cảm ứng từ $B = 0{,}91$ T. Tại thời điểm ban đầu electron ở điểm O và vận tốc của nó vuông góc $\vec{B}$. Tìm khoảng cách từ O đến electron tại thời điểm $t=\frac{25}{12}.10^{-12}$ s. Biết khối lượng của electron là $m_e=9{,}1.10^{-31}$ kg, điện tích $e=-1{,}6.10^{-19}$ C và vận tốc $v=4.10^6$ m/s.

THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/588 (Grade 1). Let $\gcd(a, b) = d$ and $\text{lcm}(a, b) = m$, where $a,b\in\mathbb{N}^*$ satisfying $(a-b)d=m$. Prove that $m(m+2027)$ is divisible by 12.

Problem T2/588 (Grade 7). Let ABC be a right triangle with $\widehat{A}=90^0$ and let AH be the altitude. Let M be the midpoint of HC. Draw $HN\perp AM$ at N. Prove that $\widehat{MAC}=\widehat{HNB}$.

Problem T3/588. Let $x > y > 1$. Prove that

$$\sqrt{x+\sqrt{y+\sqrt{x+\sqrt{y}}}} > \sqrt{y+\sqrt{x+\sqrt{y+\sqrt{x}}}}.$$

Problem T4/588. Let ABC be an acute triangle with $AB < AC$. Let AD, BE and CF be the altitudes of the triangle. Let EF intersect AD at I. On segment DC, take a point K such that $DK = BD$. Let AK intersect BE at Q. Prove that $IQ \parallel BC$.

Problem T5/588. Given the equation $x^2+x-1=0$ and let x_1, x_2 be its roots with $x_1 < x_2$. Without solving the equation, calculate the value of the expression $B=\sqrt{x_1^8+10x_1+13}+2x_1+x_2$.

Problem T6/588. Solve the following system of equations $\begin{cases}x^2+y^2+y=5\\x^3+y^3+6xy=8\end{cases}$.

FOR HIGH SCHOOL

Problem T7/588. Evaluate the following integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x(\sin x-\cos x)^{2026}}{(\sin x+\cos x)^{2028}}dx.$$

Problem T8/588. Let $S.ABCD$ be a regular pyramid with $AB = 2a$, $SA=\frac{\sqrt{138}}{3}a$, . Let M be a variable point in space. Find the minimum value of the expression $T=MA+MB+MC+MD+MS$ in terms of a.

Problem T9/588. Let (x_n) be a sequence satisfying conditions $x_1=3$ and $x_{n+1}=x_n^3-3x_n$. Find the value of $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_{n-1}^3x_{n+1}^3}{x_n^{10}}$.

(Xem tiếp trang 30)

Được quét bằng CamScanner



Bài T1/584 (Lớp 6). *Cho 340 số tự nhiên 1; 3; 5; 7; ...; 677; 679. Hãy tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho lấy n số phân biệt từ 340 số này luôn tìm được hai số a, b sao cho a + b + 2024 là số chính phương?*

Lời giải. Giả sử lấy n số phân biệt từ 340 số 1; 3; 5; 7;...; 677; 679 ta tìm được hai số lẻ a, b mà $a < b$ để $a + b + 2024$ là số chính phương, gọi số đó là c^2. Nói riêng với $b = 679$ cũng thỏa mãn, còn $a \geq 1$, lúc đó có:

$$c^2 = 2024 + 679 + a \geq 2024 + 680 = 2704 = 52^2.$$

Ta luôn tìm được cặp số lẻ a, b phân biệt thỏa mãn $a + b = 680$ trong dãy số 1; 3; 5; 7;...; 677; 679, đó là 170 cặp số dạng {1; 679}, {3; 677}, {5; 675}, {7; 673}, {9; 671},...,{337; 343}, {339; 341}.

Nếu lấy hai số a; b trong tập hợp gồm 170 số là 1; 677; 5; 673; 9; ...; 337; 341 thì do mỗi số trong tập hợp này đều chia cho 4 dư 1, do đó $a + b$ chia cho 4 dư 2, suy ra $a + b + 2024$ chia cho 4 dư 2, nên $a + b + 2024$ không thể là số chính phương.

Nếu lấy 171 số thì chắc chắn có hai số thuộc cùng một cặp số nêu trên, lúc đó $a + b = 680$ nên

$$a + b + 2024 = 2024 + 680 = 2704 = 52^2$$

là số chính phương. Vậy số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho khi lấy n số phân biệt từ 340 số 1; 3; 5;...; 677; 679 ta tìm được hai số lẻ a, b mà $a + b + 2024$ là số chính phương, đó là $n = 171$.

Nhận xét. Chỉ có một bạn giải được bài này là *Trương Đình Quốc Anh*, 7E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/584. *Tìm các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn $x^3 = 3^y + 2194$.*

Lời giải. Đặt $x^3 = 3^y + 2194$ (1). Khi đó ta có các trường hợp sau:

- $y = 0 \Rightarrow x^3 = 3^0 + 2194 \Leftrightarrow x^3 = 2195$. Không tồn tại số tự nhiên x thoả mãn.
- $y = 1 \Rightarrow x^3 = 3^1 + 2194 \Leftrightarrow x^3 = 2197 \Leftrightarrow x^3 = 13^3$ $\Leftrightarrow x = 13$ (thoả mãn).
- $y \geq 2 \Rightarrow x^3 = 3^y + 2194 = 9.3^{y-2} + 243.9 + 7$.

Suy ra $3^y + 2194$ chia cho 9 dư 7; mà x^3 chia cho 9 dư 0 hoặc 1 hoặc 8. Điều này vô lí. Vậy phương trình đã cho chỉ có một nghiệm tự nhiên là $(x; y) = (13; 1)$.

Nhận xét. Một số bạn gửi bài đến Toà soạn có lời giải tốt và giống với cách giải trên của tác giả. Ngoài ra có bạn đưa ra cách giải đúng khác, nhưng trình bày hơi dài dòng. Có các bạn lớp 8, 9 cũng gửi bài tham gia, tuy nhiên đây là bài toán dành cho các bạn lớp 6, 7 nên không nêu tên ở đây. Xin tuyên dương các bạn có tên sau: **TP. Hồ Chí Minh:** *Đào Phương Thy*, 6^7, THCS Trần Quốc Toản, Cát Lái; **Hà Nội:** *Phạm Quốc Vinh*, 6C2B Lý, THCS Archimedes, Yên Hoà; **Nghệ An:** *Trương Đình Quốc Anh*, *Đinh Trí Dũng*, 7E; *Nguyễn Tất Trí Dũng*, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Hà Vy*, *Đinh Trần Bảo Khánh*, *Đặng Văn Hoàng*, *Nguyễn Việt Anh*, 7A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, Quốc tế Song ngữ cấp 2,3 GIBS, TP. Graz.

TRẦN THỊ KIM THANH

Bài T3/584. *Cho dãy số: 1, 2, ..., 9n, trong đó n là số nguyên dương lớn hơn 1. Hãy chia dãy đó thành 9 nhóm sao cho mỗi nhóm có đúng n số hạng có tổng bằng nhau.*

Lời giải. Ta có: $1 + 2 + 3 + ... + 9n = \dfrac{9n(9n+1)}{2}$.

Vì chia dãy số đó thành 9 nhóm sao cho mỗi nhóm có đúng n số hạng có tổng bằng nhau nên mỗi nhóm có tổng là: $S = \dfrac{9n(9n+1)}{2} : 9 = \dfrac{n(9n+1)}{2}$.

Ta chỉ ra cách chia dãy số đã cho thành 9 nhóm như sau:

- TH1: $n = 2k$, với k là số nguyên dương.

Ta chia $18k$ số 1, 2, 3, ..., $9k$, $9k + 1$, ..., $18k - 1$, $18k$ thành $9k$ bộ số và mỗi bộ có 2 số như sau:

$$(1; 18k), (2; 18k - 1), \ldots (9k; 9k + 1).$$

Ta có: $1 + 9.2k = 2 + (9.2k - 1) = 3 + (9.2k - 2)$
$= \ldots = 9k + (9k + 1) = 18k + 1 = 9n + 1.$

Được quét bằng CamScanner

Ta chia $9k$ bộ số trên thành 9 nhóm tùy ý, mỗi nhóm có k bộ số ở trên, khi đó mỗi nhóm có $2k$ số hạng hay mỗi nhóm có n số hạng và đều có tổng bằng $k(9n+1)=\dfrac{n(9n+1)}{2}$.

• TH2: n là số lẻ. Khi đó n lẻ và $n\geq 3$.

+ Xét $n=3$, khi đó có 27 số là 1, 2, 3, …, 27 được chia thành 9 nhóm số, mỗi nhóm có 3 số có tổng bằng $\dfrac{3(9.3+1)}{2}=42$ như sau:

$1+14+27=2+15+25=3+16+23$
$=4+17+21=5+18+19=6+10+26$
$=7+11+24=8+12+22=9+13+20.$

+ Xét $n>3$, khi đó ta chia $9n$ số 1, 2, 3, …, $9n$ thành hai nhóm:

- Nhóm 1: có 27 số là 1, 2, 3, …, 27 được chia thành 9 nhóm số như trên.

- Nhóm 2: có $9n-27$ số là 28, 29, …, $9n$. Vì n lẻ lớn hơn 3 nên $n-3$ là số chẵn lớn hơn 0.

Đặt $n-3=2m$, với m là số nguyên dương thì $9n-27=9(n-3)=18m$. Ta chia $18m$ số 28, 29,…, $9m+27$, $9m+28$, …., $18m+27$ thành $9m$ nhóm, mỗi nhóm 2 số hạng như sau:

$(28; 18m+27), (29; 18m+26), \ldots,$
$(9m+27; 9m+28).$

Ta có $28+18m+27=29+18m+26=\ldots.$
$=9m+27+9m+28=18m+55$
$=9(n-3)+55=9n+28.$

Ta chia $9m$ nhóm số trên thành 9 nhóm tùy ý, mỗi nhóm có m bộ số ở trên, khi đó mỗi nhóm có $2m$ số hạng hay mỗi nhóm có $n-3$ số hạng và đều có tổng bằng $\dfrac{(9n+28)(n-3)}{2}$.

Lúc này ta ghép một bộ số ở nhóm 1 và một bộ số ở nhóm 2 để tạo thành một nhóm có $3+n-3=n$ số hạng và có tổng bằng

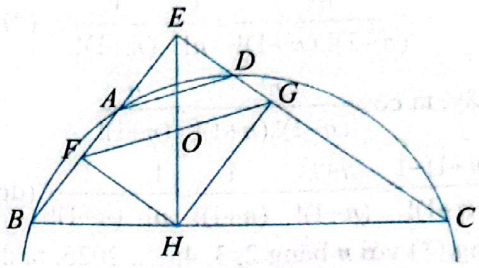
$$\frac{(9n+28)(n-3)}{2}+42=\frac{9n^2-27n+28n-84+84}{2}$$
$$=\frac{n(9n+1)}{2}.$$

Nhận xét. Có không nhiều bạn đọc đã gửi bài giải đến tòa soạn. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt hơn cả: **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc; **Nghệ An:** *Đặng Văn Hoàng*, 7A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Bá Đức Anh*, 8A,TH& THCS Lương Chí, Tĩnh Gia.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG

Bài T4/584. *Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có $\hat{B}+\hat{C}=90^0$ và $AD^3=AB.BC.CD$. Chứng minh rằng đường tròn đường kính AD tiếp xúc với đường thẳng BC.*

Lời giải.



Gọi E là giao điểm của BA và CD. Từ giả thiết ta có $\widehat{BEC}=90^0$. Hạ $EH\perp BC$ tại H, $HF\perp BE$ tại F, $HG\perp CE$ tại G.Ta sẽ chứng minh $A\equiv F$ và $D\equiv G$. Thật vậy, nếu $A\neq F$, không giảm tính tổng quát, giả sử F nằm giữa A, B. Trường hợp còn lại hoàn toàn tương tự.

Dễ thấy $HGEF$ là hình chữ nhật, ta có:

$$\widehat{EFG}=\widehat{BEH}=\widehat{BCE} \quad (1).$$

Mặt khác, do tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên

$$\widehat{EAD}=\widehat{BCE} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EFG}=\widehat{EAD}$, do đó $AD\,//\,FG$.

Do F nằm giữa A, B nên G nằm giữa C, D, từ đó:

$$BF<BA,\ CG<CD,\ AD<FG.$$

Áp dụng các hệ thức trong tam giác vuông ta có:

$$EH^4=BH^2.CH^2=BF.BE.CG.CE$$
$$=BF.CG.EH.BC.$$

Dẫn tới $EH^3=BF.CG.BC$, mà $EH=FG$, suy ra:

$$AD^3<FG^3=BF.CG.BC<BA.CD.BC=AD^3.$$

Mâu thuẫn trên là do ta giả sử F nằm giữa A, B.

Vậy $A\equiv F$ và $D\equiv G$. Từ đó hiển nhiên đường tròn đường kính AD tiếp xúc với BC tại H.

Nhận xét. Chỉ có bạn *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc, **Lâm Đồng** cho lời giải tốt, ngoài ra có bạn *Andrea Fanchini*, Cantù, **Italy** cho lời giải bằng cách sử dụng tọa độ trọng tâm (barycentric coordinates).

NGUYỄN THANH HỒNG

Được quét bằng CamScanner

Bài T5/584. *Đặt*

$$S=\frac{2!}{1!.3!}+\frac{3!}{2!.4!}+\frac{4!}{3!.5!}+\ldots+\frac{2025!}{2024!.2026!}.$$

Chứng minh rằng phương trình $x^2-x+S^2=0$ *có hai nghiệm* x_1, x_2 *khác* $\frac{1}{2}$ *và* $0<x_1<x_2<1$.

Lời giải. Trước hết, chứng minh rằng: *Với n là số tự nhiên lớn hơn 1 thì*

$$\frac{n!}{(n-1)!.(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!} \quad (*).$$

Thật vậy, ta có: $\frac{n!}{(n-1)!.(n+1)!}=\frac{n}{(n+1)!}$

$=\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}=\frac{n+1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$ (đpcm).

Áp dụng (*) với n bằng 2, 3, 4, …, 2025, ta được:

$$S=\frac{2!}{1!.3!}+\frac{3!}{2!.4!}+\frac{4!}{3!.5!}+\ldots+\frac{2025!}{2024!.2026!}$$

$$=\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2025!}-\frac{1}{2026!}\right)$$

$$=\frac{1}{2!}-\frac{1}{2026!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2026!}.$$

Suy ra: $0<S<\frac{1}{2}\Rightarrow 0<S^2<\frac{1}{4}$.

Cách 1. PT $x^2-x+S^2=0$ (**) có $\Delta=1-4S^2$.

Vì $0<S^2<\frac{1}{4}$ nên $\Delta>0$ (1). Do đó PT(**) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2, giả sử $x_1<x_2$ (2). Theo hệ thức Viète, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1x_2=S^2\end{cases}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra: $0<x_1<x_2<1; x_1<\frac{1}{2}; x_2>\frac{1}{2}$.

Vậy PT $x^2-x+S^2=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 khác $\frac{1}{2}$ và $0<x_1<x_2<1$.

Cách 2. Ta có: $x^2-x+S^2=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-S^2$.

Do $0<S^2<\frac{1}{4}$ nên $0<\frac{1}{4}-S^2<\frac{1}{4}$.

Đặt $\frac{1}{4}-S^2=a^2$ $\left(0<a<\frac{1}{2}\right)$, ta có: $x^2-x+S^2=0$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-S^2\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}-a\right)\left(x-\frac{1}{2}+a\right)=0.$$

PT(**) có hai nghiệm phân biệt $x_1=\frac{1}{2}-a$ và $x_2=\frac{1}{2}+a$ thoả mãn $0<x_1<\frac{1}{2}<x_2<1$ (đpcm).

Nhận xét. Mấu chốt để giải bài toán là phát hiện và chứng minh đẳng thức (*). Sau đó đối với học sinh lớp 9 đã học định lí Viète thì giải theo cách 1, còn với học sinh lớp 8 giải theo cách 2. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Nguyễn Thanh Mai, Vũ Tuấn Minh.* 9A, THCS Lý Nam Đế, Vạn Xuân; **Hải Phòng:** *Ngô Minh Duy,* 8A1, THCS Hồng Bàng; **Nghệ An:** *Đặng Ngọc Minh,* 8C, THCS Đặng Thai Mai; **Thanh Hoá:** *Mai Thiện Ân,* 9B, THCS Chu Văn An, Nga Sơn; **Hà Tĩnh:** *Lê Thị Thanh Bình,* 8A3, THCS Lê Văn Thiêm, Thành Sen; **Vĩnh Long:** *Đoàn Minh Phúc,* 9/1, THCS Nguyễn Khuyến, Tân Nghĩa; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt,* 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc; **TP. Hồ Chí Minh:** *Xuân Nhi,* 8/7, THCS Phạm Văn Chiên, Gò Vấp; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng,* 3B, Trường Quốc tế song ngữ cấp II, III GIBS, TP. Graz.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/584. *Tìm ba nghiệm số thực đúng của phương trình* $x^3-3u^2x+u^3=0$ (1) *với u là số thực khác 0 cho trước.*

Cách giải (của tất cả các bạn). Vì $u\neq 0$ nên ta có:

$$(1)\Leftrightarrow\left(\frac{x}{u}\right)^3-3\left(\frac{x}{u}\right)+1=0 \quad (2).$$

Đặt $t=\frac{x}{u}$. Khi ấy (2) trở thành $t^3-3t+1=0$ (3).

Xét $y=f(t)=t^3-3t+1$. Ta có:

$$y'=f'(t)=3t^2-3=0\Leftrightarrow t=\pm 1.$$

Vậy $y_{\max}=y(-1)=3=y(2)$ và $y_{\min}=y(1)=-1=y(-2)$. Vậy (3) có 3 nghiệm phân biệt $-2<t_3<0<t_2<t_3<2$ (hình vẽ dưới).

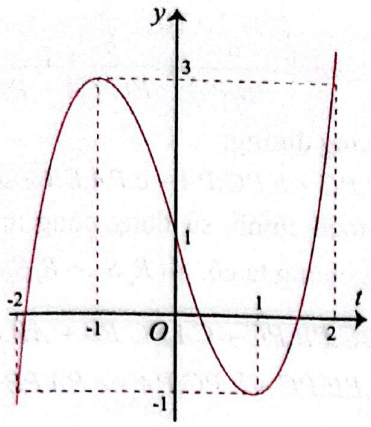
Đặt $t=2\cos\alpha$. Khi ấy (3) trở thành:

$$8\cos^3\alpha-6\cos\alpha+1=0\Leftrightarrow 4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\cos 3\alpha=\cos\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow 3\alpha=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$$

$$\Leftrightarrow\alpha=\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3} \quad (4).$$

Được quét bằng CamScanner



Với $t = 2\cos\alpha$ thì

$$t_1 = 2\cos\frac{2\pi}{9};\ t_2 = 2\cos\frac{8\pi}{9};\ t_3 = 2\cos\frac{14\pi}{9};$$

$$x_1 = t_1 u = 2u\cos\frac{2\pi}{9};\ x_2 = t_2 u = 2u\cos\frac{8\pi}{9};$$

$$x_3 = t_3 u = 2u\cos\frac{14\pi}{9}.$$

Nhận xét. Bài này tương đối dễ nên nhiều bạn tham gia giải và giải đúng. Tuy nhiên có bạn không đáp số dưới dạng lượng giác mà chỉ tính gần đúng (không đẹp về mặt toán học). Hoặc có bạn không vẽ đồ thị (dễ dàng vẽ trên GeoGebra) để nhận xét $-2 < t_3 < 0 < t_2 < t_3 < 2$ và chọn nghiệm cho đúng (có bạn ra đáp số 3 nghiệm dương).

An Giang: *Huỳnh Đức Chi*, 10T1, THPT chuyên Thủ Khoa Nghĩa; **Đà Nẵng:** *Lê Nguyễn Khánh Triều*, 12/5, THPT Thái Phiên; **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, 9A1, THCS Linh Đàm, Phường Hoàng Liệt; *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 11A3, THPT Hoàng Mai; **Hà Tĩnh:** *Đặng Sĩ Phước Đức*, 10 Toán 1, *Nguyễn Tùng Duy*, *Lê Minh Mạnh*, *Nguyễn Viết Thế Tài*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, *Đỗ Quang Anh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Lào Cai:** *Trần Tiến Đạt*, 10 Toán, THPT chuyên Lào Cai; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc; **Quảng Trị:** *Hoàng Hà Uyên Nhi*, *Nguyễn Trần Bảo Ngọc*, 10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Tây Ninh:** *Thi Tiến Thành*, 11T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Bá Đức Anh*, 8A, THCS Lương Chí, Tĩnh Gia; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Ngọc Gia Hân*, 10E2, THPT Lê Thánh Tông; **Vĩnh Long:** *Lê Duy Minh*, *Thái Minh Phúc*, *Nguyễn Thanh Trúc*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm. Và 2 bạn không ghi tên.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T7/584. *Tìm giá trị của tham số m để phương trình* $3^{(x-1)^2} + 3^{(x-3)^2} = mx(4-x)$ *có nghiệm duy nhất.*

Lời giải. Ký hiệu: $3^{(x-1)^2} + 3^{(x-3)^2} = x(4-x)m$ (1).

Điều kiện cần: Giả sử x_0 là một nghiệm của PT(1). Khi đó: $3^{(1-x_0)^2} + 3^{(3-x_0)^2} = x_0(4-x_0)m$. Thay x_0 bởi $4-x_0$ vào PT(1) ta có:

$$3^{(4-x_0-1)^2} + 3^{(4-x_0-3)^2} = (4-x_0)x_0 m$$

$$\Leftrightarrow 3^{(3-x_0)^2} + 3^{(1-x_0)^2} = (4-x_0)x_0 m.$$

Do đó nếu x_0 là một nghiệm của PT(1) thì $4-x_0$ cũng là nghiệm của PT(1). Vậy để (1) có nghiệm duy nhất thì $x_0 = 4-x_0 \Leftrightarrow x_0 = 2$. Thay $x_0 = 2$ vào (1) ta được:

$$3^{(2-1)^2} + 3^{(2-3)^2} = 2(4-2)m \Leftrightarrow 6 = 4m \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}.$$

Điều kiện đủ: Với $m = \frac{3}{2}$ thì PT(1) trở thành:

$$3^{(x-1)^2} + 3^{(x-3)^2} = \frac{3}{2}x(4-x) \quad (2).$$

Theo BĐT Cauchy ta có:

$$3^{(x-1)^2} + 3^{(x-3)^2} \ge 2\sqrt{3^{(x-1)^2}.3^{(x-3)^2}} = 2\sqrt{3^{(x-1)^2+(x-3)^2}}$$

$$= 2\sqrt{3^{2(x-2)^2+2}} \ge 2\sqrt{3^2} = 6.$$

Kết hợp với (2) ta có: $\frac{3}{2}x(4-x) \ge 6 \Leftrightarrow x(4-x) \ge 4$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \le 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \le 0 \Rightarrow x = 2.$$

Vậy với $m = \frac{3}{2}$ thì PT(1) có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Kết luận: Để PT(1) có nghiệm duy nhất thì $m = \frac{3}{2}$.

Nhận xét. 1) Thực chất bài toán tìm điều kiện của tham số để phương trình thỏa mãn điều kiện nào đó chính là bài toán điều kiện cần và đủ: điều kiện cần là giả thiết phương trình thỏa mãn điều kiện, ta tìm giá trị tham số; điều kiện đủ là với giá trị tham số tìm được kiểm tra lại phương trình có thỏa mãn điều kiện không! Một số bạn làm thiếu điều kiện đủ cần chú ý tới loại toán này.

2) Ngoài cách giải trên, một số bạn đưa ra một số cách giải khác như dùng phương pháp hàm số,

Được quét bằng CamScanner

phương pháp tam thức bậc hai, … cũng cho kết quả đúng.

3) Các bạn sau có lời giải đúng: **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Phú Thọ:** *Vũ Tuấn Minh*, 9A, THCS Lý Nam Đế, Vạn Xuân; **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, 9A1, THCS Linh Đàm, phường Hoàng Liệt; **Thanh Hóa:** *Mai Thiện Ân*, 9B, THCS Chu Văn An, Nga Sơn; **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, xã Hùng Châu, *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 11A3, THPT Hoàng Mai; **Hà Tĩnh:** *Bùi Tùng Lâm*, *Lê Minh Mạnh*, 11 Toán 1, *Phan Việt Lê Huy*, 11 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Hoàng Hà Uyên Nhi*, 10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Thanh Hậu*, 10A1, *Bùi Khánh Thi*, 10E1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Trường Duy*, 9/5, THCS Mỹ Hóa, phường Bến Tre, *Lê Duy Minh*, *Nguyễn Thanh Trúc*, *Thái Minh Phúc*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

TRẦN HỮU NAM

Bài T8/584. *Cho tam giác ABC với $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ và P là một điểm bất kỳ bên trong tam giác. Kí hiệu R_a, R_b, R_c và S_a, S_b, S_c tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp và diện tích của các tam giác BPC, CPA, APB. Chứng minh rằng*

$$R_aS_a + R_bS_b + R_cS_c \ge \frac{abc}{4}.$$

Lời giải. Cách 1. Xuất phát từ một điều hiển nhiên là $\left(x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC}\right)^2 \ge 0$, khai triển ra ta được:

$$x^2PA^2 + y^2PB^2 + z^2PC^2 + 2xy\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} + 2yz\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC} + 2zx\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA} \ge 0.$$

Chú ý rằng: $2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} = PA^2 + PB^2 - AB^2$,

$$2\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC} = PB^2 + PC^2 - BC^2,$$

$$2\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA} = PC^2 + PA^2 - CA^2.$$

Do đó: $(x+y+z)\left(xPA^2 + yPB^2 + zPC^2\right) \ge a^2yz + b^2zx + c^2xy.$

Từ đây ta cho: $x = \frac{a}{PA}, y = \frac{b}{PB}, z = \frac{c}{PC}$ thì thu được: $\left(\frac{a}{PA} + \frac{b}{PB} + \frac{c}{PC}\right)(a.PA + b.PB + c.PC) \ge abc\left(\frac{a}{PB.PC} + \frac{b}{PC.PA} + \frac{c}{PA.PB}\right).$

Điều này tương đương:

$$a.PB.PC + b.PC.PA + c.PA.PB \ge abc.$$

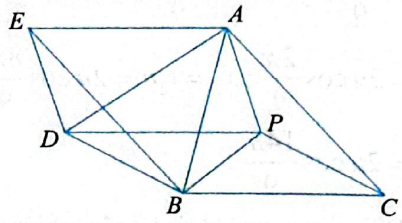
Trở lại bài toán chính, sử dụng công thức cơ bản về diện tích, chúng ta có: $4\left(R_aS_a + R_bS_b + R_cS_c\right)$

$$= BC.PB.PC + CA.PC.PA + AB.PA.PB$$

$$= a.PB.PC + b.PC.PA + c.PA.PB \ge abc$$

như yêu cầu.

Cách 2 (dựa theo bạn *Vũ Duy Mạnh*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**)



Bất đẳng thức cần chứng minh hoàn toàn có thể đưa trở lại về dạng:

$$PB.PC.BC + PC.PA.AC + PA.PB.AB \ge AB.BC.CA.$$

Vẽ các hình bình hành $PCBD$ và $APDE$. Như vậy $ACBE$ cũng là hình bình hành.

Áp dụng bất đẳng thức Ptolemy cho tứ giác $ABDE$ ta có: $AB.DE + BD.AE \ge AD.BE$

$$\Leftrightarrow AB.PA + PC.BC \ge AD.CA \quad (1).$$

Tương tự, đối với tứ giác $APBD$:

$$AD.PB + PA.DB \ge AB.DP$$

$$\Leftrightarrow AD.PB + PA.PC \ge AB.BC \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$PA.PB.AB + PB.PC.BC + PC.PA.CA \ge AD.CA.PB + PC.PA.CA = CA(AD.PB + PC.PA) \ge AB.BC.CA.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ các tứ giác $ABDE$ và $APBD$ nội tiếp $\Leftrightarrow$ P là trực tâm tam giác ABC. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Lời giải 1 là của tác giả bài toán, lời giải 2 là một cách chứng minh rất gọn gàng, chỉ sử dụng bất đẳng thức Ptolemy quen thuộc. Ngoài ra Tòa soạn cũng nhận được một số hướng giải khác, trong đó một số bạn sử dụng phép nghịch đảo hoặc số phức. Ngoài bạn *Mạnh*, các bạn sau đây cũng có lời giải tốt: **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 11A3, THPT Hoàng Mai; **Quảng Trị:** *Hoàng Hà Uyên Nhi*, 10T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Hưng**

Được quét bằng CamScanner

Yên: *Trần Gia Phú*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Thanh Hậu*, 10A1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Tùng Duy, Nguyễn Viết Thế Tài*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh.

NGUYỄN VĂN LINH

Bài T9/584. *Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn*

$$x^2+y^2+z^2=\frac{3}{4}(xy+yz+zx+1).$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(x^3+y^3+z^3)(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3)$.

Lời giải. Ta có:

$$|P|=|(x^3+y^3)(y^3+z^3)(z^3+x^3)+x^3y^3z^3|$$
$$\le|(x^3+y^3)(y^3+z^3)(z^3+x^3)|+|x^3y^3z^3|$$

và $|(x^3+y^3)(y^3+z^3)(z^3+x^3)|$

$$=|(x+y)(y+z)(z+x)|\times$$
$$\times(x^2+y^2-xy)(y^2+z^2-yz)(z^2+x^2-zx).$$

Từ giả thiết suy ra:

$$x^2+y^2+z^2=\frac{3}{4}(xy+yz+zx+1)\le\frac{3}{4}(x^2+y^2+z^2+1)$$

hay $x^2+y^2+z^2\le3$.

Do đó: $3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\le x^2+y^2+z^2\le3$.

Suy ra: $x^2y^2z^2\le1$ hay $|xyz|\le1$ (1).

Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có:

$$(|x+y|+|y+z|+|z+x|)^2\le3[(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2]$$
$$=6(x^2+y^2+z^2)+6(xy+yz+zx)\le36.$$

Suy ra: $|x+y|+|y+z|+|z+x|\le6$.

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$|(x+y)(y+z)(z+x)|\le\left(\frac{|x+y|+|y+z|+|z+x|}{3}\right)^3\le8\ (2).$$

Mặt khác cũng từ giả thiết ta có:

$$2x^2+2y^2+2z^2-xy-yz-zx$$
$$=3-(x-y)^2-(y-z)^2-(z-x)^2\le3.$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$(x^2+y^2-xy)(y^2+z^2-yz)(z^2+x^2-zx)$$
$$\le\left(\frac{2x^2+2y^2+2z^2-xy-yz-zx}{3}\right)^3\le1\ (3).$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$$|P|\le8+1=9 \text{ hay } -9\le P\le9.$$

Với $x=y=z=1$ thì $P=9$.

Với $x=y=z=-1$ thì $P=-9$.

Vậy $\max P=9$ và $\min P=-9$.

Nhận xét. Đây là một bài toán khó nên có rất ít bạn gửi lời giải về tòa soạn. Điểm mấu chốt của bài toán là việc chuyển từ biểu thức P về biểu thức $(x^3+y^3)(y^3+z^3)(z^3+x^3)+x^3y^3z^3$ để đánh giá bằng cách sử dụng hằng đẳng thức và giả thiết đã cho. Việc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong bài toán này là tương đương với nhau, vì vậy ta chỉ cần đánh giá $|P|$. Chỉ có duy nhất một bạn giải đúng nhưng quên ghi tên và địa chỉ.

HOÀNG NGỌC MINH

Bài T10/584. *Cho dãy số $(a_n), n=0,1,2,...$ thỏa mãn $a_0\ge2; a_{n+1}=a_n^2-a_n+1, \forall n\ge0$.*

a) *Đặt $S_n=\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_n}, \forall n\ge0$. Chứng minh rằng dãy (S_n) có giới hạn hữu hạn khi n dần đến vô cùng và tính giới hạn đó.*

b) *Chứng minh rằng*

$$\log_{a_0}(a_n-1).\log_{a_1}(a_n-1)...\log_{a_{n-1}}(a_n-1)\ge n^n, \forall n\ge1.$$

Lời giải (theo đa số các bạn).

a) Từ dãy đã cho ta có:

$$a_{n+1}=a_n+(a_n-1)^2\ge a_n, \forall n.$$

Do đó (a_n) là dãy không giảm. Nếu dãy (a_n) bị chặn trên thì tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$ (l hữu hạn). Mà $a_n\ge2$ với mọi n nên $l\ge2$. Mặt khác, từ $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$, ta cho $n\to\infty$ thì thu được $l=l^2-l+1$. Dẫn đến $l=1$. Thế nhưng điều này mâu thuẫn với $l\ge2$. Chứng tỏ dãy (a_n) không bị chặn trên. Nói cách khác là $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$. Tiếp theo, ta sẽ biến đổi dãy đã cho như sau:

$$a_{n+1}-1=a_n(a_n-1).$$

Lấy nghịch đảo hai vế ta được:

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n(a_n-1)}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_n}$$

hay $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}$. Từ đây suy ra:

Được quét bằng CamScanner

$$S_n=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{a_i-1}-\frac{1}{a_{i+1}-1}\right)=\frac{1}{a_0-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}.$$

Do đó: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_0-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}\right)=\frac{1}{a_0-1}$.

b) Từ phần trước chúng ta có: $a_n=\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}$.

Suy ra:

$$a_0a_1\ldots a_{n-1}=\frac{a_1-1}{a_0-1}.\frac{a_2-1}{a_1-1}\ldots\frac{a_n-1}{a_{n-1}-1}=\frac{a_n-1}{a_0-1}.$$

Lấy lôgarit hai vế:

$$\log(a_n-1)=\log a_0+\log a_1+\ldots$$
$$+\log a_{n-1}+\log(a_0-1)$$
$$\geq\log a_0+\log a_1+\ldots+\log a_{n-1}$$
$$\geq n\sqrt[n]{\log a_0.\log a_1\ldots\log a_{n-1}}.$$

Hệ quả là: $\frac{\left(\log(a_n-1)\right)^n}{\log a_0.\log a_1\ldots\log a_{n-1}}\geq n^n$.

Điều này tương đương với kết quả cần chứng minh.

Nhận xét. Đây là bài toán dãy số dạng cơ bản. Một số bạn lập luận rằng $a_{n+1}\geq a_n,\forall n$ đã đi đến kết luận dãy số (a_n) tăng là chưa chính xác, đúng phải là dãy (a_n) không giảm. Một số bạn chứng minh ý thứ hai bằng phương pháp quy nạp nên lời giải hơi dài và phức tạp. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, Hùng Châu; **Hà Tĩnh:** *Lê Minh Mạnh, Ngô Bùi Anh Khoa*, 11T1, *Phan Viết Lê Huy*, 11T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Lào Cai:** *Trần Tiến Đạt*, 10T, THPT chuyên Lào Cai; **Đà Nẵng:** *Lê Nguyễn Khánh Triều*, 12/5, THPT Thái Phiên; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc; **Hưng Yên:** *Đỗ Quang Anh*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Vĩnh Long:** *Lê Hoàng Khang, Lê Duy Minh, Nguyễn Thanh Trúc*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Tây Ninh:** *Trần Lê Trọng Phúc*, 11T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu, *Võ Tiến Phát*, THPT Nguyễn Thông; **An Giang:** *Nguyễn Hoài Nhanh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt.

NGUYỄN VIỆT HÙNG

Bài T11/584. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:*

$$f(x-f(y)-y)=3f(x),\forall x,y\in\mathbb{R}\ (1).$$

Lời giải (theo đa số các bạn). Giả sử $f(t)$ thỏa mãn (1). Thay $y=x$ vào (1) ta được:

$$f(-f(x))=3f(x),\forall x\in\mathbb{R}\ (2).$$

Thay y bởi $-f(y)$ vào (1), ta được:

$$f(x-f(-f(y))+f(y))=3f(x),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Kết hợp với (2) ta thu được:

$$f(x-3f(y)+f(y))=3f(x),\forall x,y\in\mathbb{R}$$

hay $$f(x-2f(y))=3f(x),\forall x,y\in\mathbb{R}\ (3).$$

Thay tiếp x bởi $x-2f(y)$, ta thu được:

$$f(x-4f(y))=3f(x-2f(y)),\forall x,y\in\mathbb{R}$$

hay $f(x-4f(y))=9f(x),\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Tương tự, thay tiếp x bởi $x-2f(y)$, ta thu được:

$$f(x-6f(y))=27f(x),\forall x,y\in\mathbb{R}\ (4).$$

Từ (3) thay y bởi $-f(y)$ và sử dụng (2), ta được:

$$f(x-6f(y))=3f(x),\forall x,y\in\mathbb{R}\ (5).$$

Từ (4) và (5) suy ra:

$$27f(x)=3f(x),\forall x\in\mathbb{R}\text{ hay }f(x)\equiv0.$$

Thử lại, ta thấy hàm số $f(t)\equiv0$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

Nhận xét. 1) Đây là dạng toán đơn giản và cơ bản về phương trình hàm trong lớp hàm hợp với cặp biến tự do nên có nhiều bạn tham gia giải. Đa số các bạn đều giải theo cách trên và các biến đổi tương tự đề quy về hàm tuần hoàn và giới nội. Theo cách giải trên, số 3 ở vế phải có thể thay bằng một số tùy ý khác 1, ta vẫn thu được kết quả như trên.

2) Các bạn sau đây có lời giải đúng: **An Giang:** *Huỳnh Đức Chí*, 10T1, THPT chuyên Thủ Khoa Nghĩa; **Bình Phước:** *Hồ Dương Đức Đạt*, THPT chuyên Bình Long; **Hà Tĩnh:** *Đặng Sỹ Phước Đức, Bùi Tùng Lâm*, 110T1 THPT chuyên Hà Tĩnh; **Tây Ninh:** *Vũ Tiến Phát*, 11T1, *Huỳnh Phan Kim Ngân*, CT2, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Vĩnh Long:** *Duy Minh*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/584. *Cho tam giác nhọn ABC. Điểm M thay đổi trong tam giác. H, K, L theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên BC, CA, AB. Tìm quỹ tích những điểm M sao cho:*

$$BH+CK+AL=CH+AK+BL.$$

Lời giải. Ta cần có một bổ đề.

Được quét bằng CamScanner

Bổ đề. *Cho điểm O cố định, vectơ $\vec{a}\neq\vec{0}$ xác định và số thực k không đổi. Khi đó quỹ tích những điểm M sao cho $\overrightarrow{OM}.\vec{a}=k$ là một đường thẳng.*

Bổ đề trên rất quen thuộc (xem ví dụ 6.18, trang 65, *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề phần hình học*, NXBGD Việt Nam năm 2022).

Gọi $\vec{e_a}=\dfrac{\overrightarrow{BC}}{BC};\vec{e_b}=\dfrac{\overrightarrow{CA}}{CA};\vec{e_c}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB}$ theo thứ tự là vectơ định hướng của các đường thẳng BC, CA, AB; X, Y, Z theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB.

Vậy, chú ý rằng OX, OY, OZ theo thứ tự vuông góc với $\vec{e_a},\vec{e_b},\vec{e_c}$, các điều kiện sau tương đương:

1) $BH+CK+AL=CH+AK+BL$

2) $\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{AL}=-\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{BL}$

3) $\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BL}=0$

4) $\overrightarrow{BM}.\vec{e_a}+\overrightarrow{CM}.\vec{e_b}+\overrightarrow{AM}.\vec{e_c}+\overrightarrow{CM}.\vec{e_a}+\overrightarrow{AM}.\vec{e_b}+\overrightarrow{BM}.\vec{e_c}=0$

5) $\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\right).\vec{e_a}+\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AM}\right).\vec{e_b}+\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\right).\vec{e_c}=0$

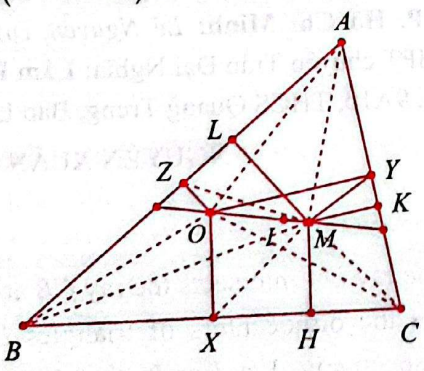
6) $\overrightarrow{XM}.\vec{e_a}+\overrightarrow{YM}.\vec{e_b}+\overrightarrow{ZM}.\vec{e_c}=0$

7) $\left(\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{OM}\right).\vec{e_a}+\left(\overrightarrow{YO}+\overrightarrow{OM}\right).\vec{e_b}+\left(\overrightarrow{ZO}+\overrightarrow{OM}\right).\vec{e_c}=0$

8) $\overrightarrow{XO}.\vec{e_a}+\overrightarrow{OM}.\vec{e_a}+\overrightarrow{YO}.\vec{e_b}+\overrightarrow{OM}.\vec{e_b}+\overrightarrow{ZO}.\vec{e_c}+\overrightarrow{OM}.\vec{e_c}=0$

9) $0+\overrightarrow{OM}.\vec{e_a}+0+\overrightarrow{OM}.\vec{e_b}+0+\overrightarrow{OM}.\vec{e_c}=0$

10) $\overrightarrow{OM}.\left(\vec{e_a}+\vec{e_b}+\vec{e_c}\right)=0$



Có hai trường hợp xảy ra.

• TH1: Tam giác ABC đều. Dễ thấy $\vec{e_a}+\vec{e_b}+\vec{e_c}=\vec{0}$. Do đó $\overrightarrow{OM}.\left(\vec{e_a}+\vec{e_b}+\vec{e_c}\right)=0$ với mọi điểm M nằm trong tam giác ABC. Vậy quỹ tích những điểm M thỏa mãn điều kiện đề bài là miền trong tam giác ABC.

• TH2: Tam giác ABC không đều. Dễ thấy $\vec{e_a}+\vec{e_b}+\vec{e_c}\neq\vec{0}$. Theo bổ đề trên, quỹ tích những điểm M thỏa mãn điều kiện đề bài là giao của miền trong tam giác ABC và một đường thẳng (1)

Gọi O, I theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp; P, Q theo thứ tự là giao của OI và biên của tam giác ABC (2).

Đương nhiên O, I thỏa mãn điều kiện đề bài (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra quỹ tích những điểm M theo mãn điều kiện đề bài là đoạn PQ.

Chú ý. Có thể mở rộng bài toán bằng cách thay giả thiết $BH+CK+AL=CH+AK+BL$ bởi giải thiết $BH+CK+AL-CH-AK-BL=m$ (m là một số cho trước).

Nhận xét. 1) Bài toán này không khó, nó là bài toán điển hình về định lí hình chiếu, nhưng chỉ có 4 bạn tham gia giải, lời giải của cả 5 bạn quá dài, thậm chí 2 bạn phải dùng phương pháp tọa độ.

2) Xin nêu tên cả 5 bạn: **Hưng Yên:** *Đỗ Quang Anh*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** *Vũ Duy Mạnh*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn; **Hà Tĩnh:** *Bùi Tùng Lâm*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đà Nẵng:** *Lê Nguyễn Khánh Triều*, 12/5, THPT Thái Phiên; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, THCS Quang Trung, Bảo Lộc.

3) Hoan nghênh em *Hồ Đại Việt*, học sinh lớp 9 mà đã cố gắng giải bài toán này, tuy nhiên lời giải của em chưa kết luận được cụ thể: khi tam giác ABC không đều, quỹ tích các điểm M thỏa mãn điều kiện đề bài là phần đoạn thẳng OI nằm trong tam giác ABC.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/584. *Một xi-lanh cách nhiệt được đặt thẳng đứng, chứa một lượng khí lí tưởng. Xi-lanh được đậy kín bằng một pít-tông mỏng, dẫn nhiệt tốt, có khối lượng M và diện tích S. Ban đầu, hệ đang ở trạng thái cân bằng, pít-tông cách đáy xi-lanh một đoạn h_0 và nhiệt độ của khí là T_0. Áp suất khí quyển bên ngoài là p_0. Giả sử pít-tông bị kẹt không thể di chuyển. Nếu nhiệt độ khối khí tăng lên một lượng Δt thì áp suất của khối khí sẽ tăng thêm một lượng Δp. Biểu thức Δp phụ thuộc nhiệt độ ban đầu T_0 như thế nào?*

Lời giải. Ban đầu: pít-tông cân bằng, áp suất khí trong xilanh: $p_1=p_0-\dfrac{Mg}{S}$; thể tích khí $V_1=Sh_0$; nhiệt độ T_0.

Được quét bằng CamScanner

Trạng thái khí sau khi tăng nhiệt độ:

$$V = \text{hằng số} = Sh_0;\ T_2 = T_0 + \Delta t.$$

Ta có: $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow p_2 = \frac{p_1 T_2}{T_1} = \left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right).\frac{T_0 + \Delta t}{T_0}$

$$= \left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right)\left(1 + \frac{\Delta t}{T_0}\right).$$

Độ tăng áp suất:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right)\left(1 + \frac{\Delta t}{T_0}\right) - p_0 + \frac{Mg}{S}$$

$$= \left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right).\frac{\Delta t}{T_0}.$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: **Đồng Tháp:** *Thành Ngô Bảo Long, Phạm Tùng Lâm*, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diệu; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Lê Khánh Hà, Trương Khánh Toàn*, 11 Lý, *Đặng Văn Lê Mạnh*, 11 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Lê Nguyễn Tuyết Minh*, 8A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/584. *Một khung dây hình chữ nhật có điện trở 0,02 Ω, chiều dài 2 dm, chiều rộng 1,14 dm. Khung dây đặt trong từ trường đều có vectơ $\vec{B}$ vuông góc với mặt phẳng khung, với $B = 0,1$ T. Người ta uốn nhanh khung dây nói trên thành một vòng dây hình tròn ngay trong từ trường đều nói trên. Điện lượng di chuyển trong khung bằng bao nhiêu mC? (Kết quả làm tròn đến phần nguyên).*

Lời giải. Ta có suất điện động cảm ứng:

$$|e_c| = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = B\left|\frac{\Delta S}{\Delta t}\right| \quad (1)$$

Lại có chu vi của khung dây hình chữ nhật và vòng dây hình tròn là bằng nhau:

$$C_{\text{tròn}} = C_{\text{chữ nhật}} \Leftrightarrow 2\pi r = 2(2+1,14) \Rightarrow r = \frac{3,14}{\pi}\ (\text{dm}).$$

Độ biến thiên diện tích: $\Delta S = S_{\text{tròn}} - S_{\text{chữ nhật}}$

$$\Rightarrow \Delta S = \pi\left(\frac{3,14}{\pi}.0,1\right)^2 - 2.1,14.0,1^2.$$

Dòng điện cảm ứng xuất hiện trong khung:

$$i_c = \frac{e_c}{R} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow \Delta q = i_c \Delta t = \frac{e_c}{R}.\Delta t \quad (2).$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$\Delta q = i_c \Delta t = \frac{e_c}{R}.\Delta t = \frac{B\left|\frac{\Delta S}{\Delta t}\right|}{R}.\Delta t = B.\frac{\Delta S}{R}$$

$$= 0,1\pi.\frac{0,1\pi\left(\frac{3,14}{\pi}.0,1\right)^2 - 2.1,14.0,1^2}{0,02}$$

$$\approx 0,043\,\text{C} = 43\,\text{mC}.$$

Nhận xét. Các bạn sau đã có lời giải đúng: **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, *Trần Mai Anh*, 11 Lý, THPT chuyên Hưng Yên; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Phúc Thịnh, Phạm Tùng Lâm, Thành Ngô Bảo Long*, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Lê Khánh Hà*, 11 Lý, THPT chuyên Hà Tĩnh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Lê Nguyễn Tuyết Minh*, 8A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc.

NGUYỄN XUÂN QUANG

****

PROBLEMS . . .

(Tiếp theo trang 21)

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/588. Find all polynomials $P \in \mathbb{R}[x]$ satisfying condition $P(x^n) = (x^n + 1)P(x)$, where $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Problem T11/588. Find all functions $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisfying the following condition:

$$f(2y + f(xy)) + 2x = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Problem T12/588. Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral. The ray BA intersects the ray CD at E, and the ray DA intersects the ray CB at F. Let K and L be the orthocenters of triangles EBD and FBD, respectively. Let I and J be the centers of the Euler circles (nine-point circles) of triangles EBD and FBD, respectively. Let DK intersect AB at P, and let BL intersect AD at Q. Prove that the lines KL, PQ, EF, and IJ are concurrent.

Note: The Euler circle (nine-point circle) of triangle XYZ is the circle passing through the midpoints of the three sides of the triangle.

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hanoi*)

Được quét bằng CamScanner



MỘT SỐ GỢI Ý XÁC ĐỊNH SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA DÃY SỐ THƯỜNG GẶP ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

NGUYỄN ANH VŨ
(GV THPT chuyên Chu Văn An, Gia Lai)

Cấp số cộng (CSC), cấp số nhân (CSN) là hai dãy số đặc biệt, việc xác định số hạng tổng quát của hai dãy số này đã được trình bày trong Chương trình Toán THPT. Thực tế, trong các kỳ thi học sinh giỏi các cấp, các kì thi Olympic 30/4, … thì các bài toán về dãy số cho dưới dạng truy hồi nhưng không là CSC, CSN có yêu cầu cần xác định số hạng tổng quát thì việc xác định số hạng tổng quát không hề dễ. Thông thường, việc xác định số hạng tổng quát của một dãy số người ta dùng các công cụ vượt khỏi chương trình phổ thông hoặc đưa ra các kết quả số hạng tổng quát, rồi chứng minh quy nạp, điều này không tự nhiên. Với mong muốn, trên cơ sở kiến thức mà đối tượng học sinh phổ thông được học, bằng các phép biến đổi cơ bản, ta cũng dễ dàng tìm được số hạng tổng quát của dãy số. Chúng tôi hy vọng bài viết này sẽ cung cấp cho bạn đọc một số gợi ý xác định số hạng tổng quát của một số dãy số thường gặp trong các kỳ thi.

1.1. CẤP SỐ CỘNG (CSC)

a) **Định nghĩa:** (u_n) là CSC $\Leftrightarrow u_{n+1}=u_n+d, \forall n\geq 1$, trong đó d là số không đổi.

b) **Số hạng tổng quát:** (u_n) là CSC có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát của dãy là $u_n=u_1+(n-1)d, \forall n\geq 1$.

Chứng minh: Ta có: $u_{n+1}=u_n+d, \forall n\geq 1$. Do đó:

$$u_n=u_{n-1}+d=u_{n-2}+2d=\ldots=u_1+(n-1)d.$$

Vậy $u_n=u_1+(n-1)d$, $(n\geq 1)$.

c) **Tổng n số hạng đầu tiên:** Nếu (u_n) là CSC có số hạng đầu u_1 và công sai d thì

$$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=nu_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{n(u_1+u_n)}{2}.$$

1.2. CẤP SỐ NHÂN (CSN)

a) **Định nghĩa:** (u_n) là CSN $\Leftrightarrow u_{n+1}=u_n.q, \forall n\geq 1$, trong đó q là số không đổi.

b) **Số hạng tổng quát:** (u_n) là CSN có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát của dãy là $u_n=u_1.q^{n-1}, \forall n\geq 1$..

Chứng minh: Ta có: $u_{n+1}=u_n.q, \forall n\geq 1$

$$\Rightarrow u_n=u_{n-1}.q=u_{n-2}.q^2=\ldots=u_1.q^{n-1}.$$

Vậy $u_n=u_1.q^{n-1}$, $\forall n\geq 1$.

c) **Tổng n số hạng đầu tiên:** Nếu (u_n) là CSN có số hạng đầu u_1 và công bội $q\neq 1$ thì

$$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=u_1\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Nhận xét. Cách chứng minh số hạng tổng quát của CSC, CSN ở trên có ý nghĩa định hướng tư duy trong bài toán xác định số hạng tổng quát ở THPT.

1.3. MỘT SỐ KẾT QUẢ CÓ Ý NGHĨA GỢI Ý

Kết quả 1: *Nếu dãy số (u_n) thoả mãn $u_{n+1}=au_n+b$, $\forall n\geq 1$, trong đó a, b là hằng số, $a\neq 1$ thì $u_n=v_n-\frac{b}{a-1}$, $n=1,2,\ldots$ với (v_n) là CSN có số hạng đầu $v_1=u_1+\frac{b}{a-1}$, công bội a và*

$$v_n=\left(u_1+\frac{b}{a-1}\right)a^{n-1},\ \forall n=1,2,\ldots.$$

Đặc biệt $a=1$ thì (u_n) là CSC công sai b và $b=0$ thì (u_n) là CSN công bội a.

Chứng minh: Đặt $v_n=u_n+\frac{b}{a-1}$, $n=1,2,\ldots$

$\Rightarrow u_n=v_n-\frac{b}{a-1}$. Khi đó: $u_{n+1}=au_n+b, \forall n\geq 1$

Được quét bằng CamScanner

$\Leftrightarrow v_{n+1}-\frac{b}{a-1}=a\left(v_n-\frac{b}{a-1}\right)+b$

$\Leftrightarrow v_{n+1}=av_n-\frac{ab}{a-1}+\frac{b}{a-1}+b\Leftrightarrow v_{n+1}=av_n,\forall n\geq 1$

$\Rightarrow (v_n)$ là CSN có $v_1=u_1+\frac{b}{a-1}$ và công bội a.

Nhận xét. 1) Từ biểu thức truy hồi $u_{n+1}=au_n+b,\forall n\geq 1$ ta mong muốn không còn số b, nên muốn tịnh tiến u_n đến v_n sao cho $v_{n+1}=av_n,\forall n\geq 1$. Do đó, ta đặt $v_n=u_n+\alpha$ và đồng nhất thức ta tìm được $\alpha=\frac{b}{a-1}$.

2) Dãy số dạng trên là dãy số tổng quát của CSC và CSN.

THÍ DỤ ÁP DỤNG

Thí dụ 1.1. *Cho dãy số (u_n) xác định như sau:*

$$\begin{cases}u_1=2\\ u_{n+1}=3u_n+1\ \forall n\geq 1\end{cases}.$$

Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Lời giải. Theo kết quả 1, ta có $\frac{b}{a-1}=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}$. Đặt $v_n=u_n+\frac{1}{2},\forall n=1,2,...$ Khi đó: $v_1=\frac{5}{2}, u_n=v_n-\frac{1}{2}$.

Ta có: $u_{n+1}=3u_n+1\Leftrightarrow v_{n+1}-\frac{1}{2}=3\left(v_n-\frac{1}{2}\right)+1$

$\Leftrightarrow v_{n+1}=3v_n\Rightarrow (v_n)$ là CSN có số hạng đầu $v_1=\frac{5}{2}$

và công bội $q=3\Rightarrow v_n=\frac{5}{2}.3^{n-1}\Rightarrow u_n=\frac{5}{2}.3^{n-1}-\frac{1}{2}$.

Vậy $u_n=\frac{5}{2}.3^{n-1}-\frac{1}{2}, n=1,2,...$

Thí dụ 1.2. *Cho dãy số (u_n) xác định như sau* $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=\frac{u_n}{u_n+2}\ (n\in\mathbb{N}^*)\end{cases}$*. Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy.*

Lời giải. Ta có $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=\frac{u_n}{u_n+2}\ (n\in\mathbb{N}^*)\end{cases}\Rightarrow u_n\neq 0,\forall n\geq 1$.

Khi đó: $u_{n+1}=\frac{u_n}{u_n+2}\Leftrightarrow\frac{1}{u_{n+1}}=2\frac{1}{u_n}+1$.

Đặt $x_n=\frac{1}{u_n}, n=1,2,...$, ta có:

$$x_1=1,\ x_{n+1}=2x_n+1,\forall n=1,2,...$$

Theo kết quả 1, ta có: $x_n=v_n-\frac{b}{a-1}=v_n-1$

$n=1,2,...$, với $v_n=\left(x_1+\frac{b}{a-1}\right)2^{n-1}=2^n,\forall n=1,2,...$

Khi đó: $x_n=2^n-1\Rightarrow u_n=\frac{1}{2^n-1},\forall n=1,2,...$ Vậy số hạng tổng quát của dãy số là $u_n=\frac{1}{2^n-1}\ \forall n=1,2,...$

Thí dụ 1.3 (HSG lớp 11, Quảng Bình, vòng 2, năm học 2014-2015). *Cho dãy số (u_n) xác định như sau:* $\begin{cases}u_1=3\\ u_{n+1}=\frac{2n}{n+1}u_n-\frac{1}{n+1},\ (n\in\mathbb{N}^*)\end{cases}$.

a) Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy.

b) Tìm n để nu_n là số chính phương.

Lời giải. a) Ta có:

$$u_{n+1}=\frac{2n}{n+1}u_n-\frac{1}{n+1}\Leftrightarrow (n+1)u_{n+1}=2nu_n-1.$$

Đặt $v_n=nu_n,\forall n\geq 1$, ta có: $v_1=3$ và $v_{n+1}=2v_n-1$.

Theo kết quả 1 ta có: $v_n=w_n-\frac{b}{a-1}$, với $\frac{b}{a-1}=-1$

và $w_n=\left(v_1+\frac{b}{a-1}\right)a^{n-1}=(3-1)2^{n-1}=2^n, n=1,2,...$

$\Rightarrow v_n=2^n+1, n=1,2,...$. Vậy $u_n=\frac{2^n+1}{n}, n=1,2,...$

b) Ta có: $nu_n=2^n+1$; nu_n là số chính phương khi và chỉ khi tồn tại số nguyên dương m sao cho

$$2^n+1=m^2\Leftrightarrow (m-1)(m+1)=2^n\ (1).$$

Từ (1) suy ra tồn tại hai số tự nhiên h, k sao cho

$$\begin{cases}m+1=2^h\\ m-1=2^k\end{cases}\Rightarrow 2^h-1=2^k+1\Leftrightarrow 2^h=2^k+2$$

$$\Leftrightarrow 2^{h-1}=2^{k-1}+1\Leftrightarrow\begin{cases}k-1=0\\ h-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=1\\ h=2\end{cases}$$

$\Rightarrow m=3\Rightarrow n=3$.

Vậy nu_n là số chính phương khi $n=3$.

Được quét bằng CamScanner

Thí dụ 1.4 (HSG lớp 11, Bình Định, năm học 2015-2016). *Cho dãy số (u_n) xác định như sau*

$$\begin{cases} u_1=10 \\ (6-u_n)(16+u_{n+1})=96 \ (n\in\mathbb{N}^*) \end{cases}.$$

a) *Tìm số hạng tổng quát u_n và tính $\lim u_n$.*

b) *Tính tổng* $S=\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+...+\dfrac{1}{u_{2016}}$.

Lời giải. Ta có:

$(6-u_n)(16+u_{n+1})=96\Leftrightarrow 6u_{n+1}-16u_n=u_nu_{n+1}$ (1).

Nếu tồn tại k sao cho $u_k=0$ thì từ (1) suy ra: $u_{k-1}=0\Rightarrow...\Rightarrow u_1=0$, mâu thuẫn với $u_1=10$. Do đó $u_n\neq 0, \forall n\geq 1$. Khi đó:

$$(1)\Leftrightarrow \frac{6}{u_n}-\frac{16}{u_{n+1}}=1\Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}}=\frac{3}{8}.\frac{1}{u_n}-\frac{1}{16}.$$

Đặt $v_n=\dfrac{1}{u_n}$, ta có: $v_1=\dfrac{1}{10}, v_{n+1}=\dfrac{3}{8}v_n-\dfrac{1}{16}$. Theo kết quả 1 ta có: $v_n=w_n-\dfrac{b}{a-1}$ với

$$w_n=\left(v_1+\frac{b}{a-1}\right)a^{n-1}=\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right)\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}=\frac{1}{5}\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1},$$

$$n=1,2,...\Rightarrow v_n=\frac{1}{5}\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}-\frac{1}{10}, n=1,2,....$$

Vậy $u_n=\dfrac{10}{2\left(\dfrac{3}{8}\right)^{n-1}-1}, n=1,2,...$

Ta có: $\lim u_n=\lim\dfrac{10}{2\left(\dfrac{3}{8}\right)^{n-1}-1}=-10.$

b) Ta có: $S_n=\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+...+\dfrac{1}{u_n}=v_1+v_2+...+v_n$

$$=\frac{1}{5}\left(1+\frac{3}{8}+\left(\frac{3}{8}\right)^2+...+\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}\right)-n\frac{1}{10}=\frac{8}{25}\left(1-\left(\frac{3}{8}\right)^n\right)-\frac{n}{10}$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+...+\frac{1}{u_{2016}}=\frac{8}{25}\left(1-\left(\frac{3}{8}\right)^{2016}\right)-\frac{2016}{10}.$$

Thí dụ 1.5. *Cho dãy số (u_n) xác định như sau*

$\begin{cases} u_1=2016 \\ u_{n+1}=\dfrac{1+u_n}{2+u_n} \ (n\in\mathbb{N}^*) \end{cases}$. *Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy.*

Phân tích. Ta có:

$$u_{n+1}=\frac{1+u_n}{2+u_n}\Leftrightarrow u_{n+1}(2+u_n)=1+u_n$$

$$\Leftrightarrow u_n.u_{n+1}+2u_{n+1}-u_n-1=0.$$

Ta mong muốn đạt được đẳng thức (1) ở thí dụ 1.4, do đó, ta biến đổi: $u_n.u_{n+1}+2u_{n+1}-u_n-1$

$=(u_n+\alpha).(u_{n+1}+\alpha)+a(u_{n+1}+\alpha)+b(u_n+\alpha), \forall n\geq 1.$

Đồng nhất thức ta được: $\begin{cases} a+\alpha=2 \\ b+\alpha=-1 \\ \alpha^2+\alpha(a+b)=-1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \alpha^2+\alpha(1-2\alpha)=-1\Leftrightarrow -\alpha^2+\alpha+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Ta chọn: $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow a=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, b=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}.$

Lời giải. Ta có: $u_{n+1}=\dfrac{1+u_n}{2+u_n}\Leftrightarrow u_{n+1}(2+u_n)=1+u_n$

$\Leftrightarrow u_n.u_{n+1}+2u_{n+1}-u_n-1=0$

$$\Leftrightarrow \left(u_n+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).\left(u_{n+1}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\left(u_{n+1}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\left(u_n+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2}.\frac{1}{u_n+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}.\frac{1}{u_{n+1}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}.\frac{1}{u_n+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Đặt $v_n=\dfrac{1}{u_n+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}, \forall n=1,2,...$ Ta có:

$$v_1=\frac{1}{2016+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{2}{4033+\sqrt{5}}, v_{n+1}=\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}.v_n+\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Theo kết quả 1, ta có $v_n=w_n-\dfrac{b}{a-1}$ với

$$w_n=\left(v_1+\frac{b}{a-1}\right)a^{n-1}=\left(\frac{2}{4033+\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right)^{n-1}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{5}-4033}{5+4033\sqrt{5}}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right)^{n-1}, n=1,2,...$$

Được quét bằng CamScanner

$\Rightarrow v_n=\left(\frac{\sqrt{5}-4033}{5+4033\sqrt{5}}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right)^{n-1}+\frac{1}{\sqrt{5}}$. Vậy:

$u_n=\frac{(5+4033\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^{n-1}}{(\sqrt{5}-4033)(3-\sqrt{5})^{n-1}+(\sqrt{5}+4033)(3+\sqrt{5})^{n-1}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Thí dụ 1.6 (Olympic 30/04/2003). *Cho dãy số* (u_n) *được xác định bởi* $\begin{cases}u_1=\sqrt{3}\\ u_{n+1}=\frac{u_n+\sqrt{2}-1}{1+(1-\sqrt{2})u_n}\end{cases}(n\in\mathbb{N}^*)$. *Tìm số hạng* u_{2003}.

Phân tích. Ta có: $u_{n+1}=\frac{u_n+\sqrt{2}-1}{1+(1-\sqrt{2})u_n}$

$\Leftrightarrow u_{n+1}u_n-(\sqrt{2}+1)u_{n+1}+(\sqrt{2}+1)u_n+1=0$ (2).

Ta muốn đạt được đẳng thức (1) ở thí dụ 1.4, do đó ta biến đổi: $u_{n+1}u_n-(\sqrt{2}+1)u_{n+1}+(\sqrt{2}+1)u_n+1$

$=(u_{n+1}+\alpha)(u_n+\alpha)+a(u_{n+1}+\alpha)+b(u_n+\alpha),\forall n\ge 1.$

Đồng nhất thức ta được:

$\begin{cases}a+\alpha=-(\sqrt{2}+1)\\ b+\alpha=\sqrt{2}+1\\ \alpha^2+\alpha(a+b)=1\end{cases}\Rightarrow\alpha^2+\alpha(-2\alpha)=1\Leftrightarrow\alpha^2=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=i\\ \alpha=-i\end{array}\right.$.

Chọn $\alpha=i\Rightarrow a=-(\sqrt{2}+1)-i,\ b=(\sqrt{2}+1)-i.$

Lời giải. Ta có: $u_{n+1}=\frac{u_n+\sqrt{2}-1}{1+(1-\sqrt{2})u_n}$

$\Leftrightarrow u_{n+1}u_n-(\sqrt{2}+1)u_{n+1}+(\sqrt{2}+1)u_n+1=0$

$\Leftrightarrow(u_{n+1}+i)(u_n+i)-(\sqrt{2}+1+i)(u_{n+1}+i)$

$+(\sqrt{2}+1-i)(u_n+i)=0,\forall n\ge 1$

$\Leftrightarrow\frac{1}{u_{n+1}+i}=\frac{\sqrt{2}+1+i}{\sqrt{2}+1-i}\frac{1}{u_n+i}-\frac{1}{\sqrt{2}+1-i},\forall n\ge 1.$

Đặt $v_n=\frac{1}{u_n+i},\forall n\ge 1$, ta có: $v_1=\frac{1}{\sqrt{3}+i}$ và

$\Leftrightarrow v_{n+1}=\frac{\sqrt{2}+1+i}{\sqrt{2}+1-i}v_n-\frac{1}{\sqrt{2}+1-i},\forall n\ge 1$. Theo kết quả 1, ta có: $\frac{b}{a-1}=\frac{1}{2}i$ và $v_n=w_n-\frac{1}{2}i,\forall n\ge 1$, trong đó

$w_n=\left(v_1+\frac{b}{a-1}\right)a^{n-1}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}+i}+\frac{1}{2}i\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}+1+i}{\sqrt{2}+1-i}\right)^{n-1}$

$=\frac{\sqrt{3}+i}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}+1+i}{\sqrt{2}+1-i}\right)^{n-1}\Rightarrow v_n=\frac{\sqrt{3}+i}{4}\left(\frac{\sqrt{2}+1+i}{\sqrt{2}+1-i}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}i$

$=\frac{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{2}+1+i)^{n-1}-2i(\sqrt{2}+1-i)^{n-1}}{4(\sqrt{2}+1+i)^{n-1}}$

$\Rightarrow u_n=\frac{4(\sqrt{2}+1-i)^{n-1}}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{2}+1+i)^{n-1}-2i(\sqrt{2}+1-i)^{n-1}}-i$

$=\frac{4(\sqrt{2}+1-i)^{n-1}-i[(\sqrt{3}+i)(\sqrt{2}+1+i)^{n-1}-2i(\sqrt{2}+1-i)^{n-1}]}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{2}+1+i)^{n-1}-2i(\sqrt{2}+1-i)^{n-1}}$

$=\frac{i[2(\sqrt{2}+1+i)^{n-1}+(1-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}+1+i)^{n-1}]}{2(\sqrt{2}+1+i)^{n-1}-(1-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}+1+i)^{n-1}}$.

Ta có: $\sqrt{2}+1+i=\sqrt{4+2\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}i\right)$

$=\sqrt{4+2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}i\right)$

và $\sqrt{2}+1-i=\sqrt{4+2\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}-\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}i\right)$

$=\sqrt{4+2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}i\right)$.

Áp dụng công thức Moirve, ta có:

$u_n=\frac{i\left[2\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{8}-\sin\frac{(n-1)\pi}{8}i\right)+(1-\sqrt{3}i)\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{8}+\sin\frac{(n-1)\pi}{8}i\right)\right]}{2\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{8}-\sin\frac{(n-1)\pi}{8}i\right)-(1-\sqrt{3}i)\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{8}+\sin\frac{(n-1)\pi}{8}i\right)}$

$=\frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{8}+\sqrt{3}\cos\frac{(n-1)\pi}{8}}{\cos\frac{(n-1)\pi}{8}-\sqrt{3}\sin\frac{(n-1)\pi}{8}}=\frac{\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{8}+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{8}+\frac{\pi}{3}\right)}$

$=\tan\left(\frac{(n-1)\pi}{8}+\frac{\pi}{3}\right)$. Vậy $u_n=\tan\left(\frac{(n-1)\pi}{8}+\frac{\pi}{3}\right),\forall n\ge 1.$

Do đó: $u_{2003}=\tan\left(\frac{2002\pi}{8}+\frac{\pi}{3}\right)=-(2+\sqrt{3}).$

Nhận xét. Ngoài cách giải trên (sử dụng kết quả 1) ta có thể giải bài này như sau: Dễ tính được $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$. Từ đó: $u_{n+1}=\frac{u_n+\tan\frac{\pi}{8}}{1-u_n\tan\frac{\pi}{8}}$ (*). Do $u_1=\sqrt{3}$ và (*), bằng quy nạp ta chứng minh được

$$u_n=\tan\left[\frac{\pi}{3}+\frac{(n-1)\pi}{8}\right]$$

$$\Rightarrow u_{2003}=\tan\left[\frac{\pi}{3}+\frac{2002\pi}{8}\right]=\tan\left[\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right]=-(2+\sqrt{3}).$$

Được quét bằng CamScanner

Thí dụ 1.7. *Cho dãy số (u_n) được xác định bởi* $\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{5u_n-4}{u_n+1} \ (n\in\mathbb{N}^*) \end{cases}$. *Tìm số hạng* u_{2016}.

Phân tích. Ta có: $u_{n+1}=\dfrac{5u_n-4}{u_n+1}$

$\Leftrightarrow u_{n+1}(u_n+1)=5u_n-4\Leftrightarrow u_n.u_{n+1}+u_{n+1}-5u_n+4=0.$

Ta muốn đạt được đẳng thức (1) ở thí dụ 1.4, do đó, ta biến đổi: $u_n.u_{n+1}+u_{n+1}-5u_n+4$

$=(u_n+\alpha).(u_{n+1}+\alpha)+a(u_{n+1}+\alpha)+b(u_n+\alpha), \forall n\geq 1.$

Đồng nhất thức ta được: $\begin{cases} a+\alpha=1 \\ b+\alpha=-5 \\ \alpha^2+\alpha(a+b)=4 \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha^2+\alpha(-4-2\alpha)=4\Leftrightarrow \alpha^2+4\alpha+4=0\Leftrightarrow \alpha=-2$

$\Rightarrow a=3, b=-3.$

Lời giải. Ta có: $u_{n+1}=\dfrac{5u_n-4}{u_n+1}$

$\Leftrightarrow u_{n+1}(u_n+1)=5u_n-4\Leftrightarrow u_n.u_{n+1}+u_{n+1}-5u_n+4=0$

$\Leftrightarrow (u_n-2).(u_{n+1}-2)+3(u_{n+1}-2)-3(u_n-2)=0$ (*).

Từ (*) ta suy ra $u_n\neq 2, \forall n$, vì nếu $\exists u_k=2$ thì từ (*) suy ra: $u_{k-1}=2\Rightarrow ...\Rightarrow u_1=2$, trái với giả thiết.

Do đó: $1+\dfrac{3}{u_n-2}-\dfrac{3}{u_{n+1}-2}=0\Leftrightarrow \dfrac{1}{u_{n+1}-2}=\dfrac{1}{u_n-2}+\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{u_n-2}=\dfrac{1}{u_1-2}+(n-1)\dfrac{1}{3}=\dfrac{n+2}{3}.$

Vậy $u_n=\dfrac{2n+7}{n+2}, \forall n\geq 1\Rightarrow u_{2016}=\dfrac{4039}{2018}.$

Nhận xét. Các thí dụ 1.2, 1.5, 1.6 và 1.7 là các trường hợp có thể gặp của dãy số cho dưới dạng truy hồi $\begin{cases} u_1=\alpha \\ u_{n+1}=\dfrac{au_n+b}{cu_n+d} \ (n\in\mathbb{N}^*) \end{cases}$.

Kết quả 2. *Cho dãy số (u_n) thoả mãn $u_{n+1}=au_n+x_n, \forall n\geq 1$, trong đó a là hằng số và x_n là hàm số theo biến n. Ta có số hạng tổng quát của dãy (u_n) là $u_n=c.a^n+v_n.a^n, \forall n=1,2,...$ trong đó $v_n=v_1+\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{x_1}{a}+\dfrac{x_2}{a^2}+...+\dfrac{x_{n-1}}{a^{n-1}}\right). \forall n=2,3,...$ và v_1, c là hằng số sẽ được xác định dựa vào giả thiết của bài toán.*

Chứng minh. Đặt $u_n=c.a^n+v_n.a^n, \forall n=1,2,...$ trong đó c là hằng số và (v_n) là dãy số được xác định sao cho (u_n) thoả mãn yêu cầu bài toán. Khi đó, ta có $u_{n+1}=au_n+x_n, \forall n\geq 1$

$\Leftrightarrow c.a^{n+1}+v_{n+1}.a^{n+1}=a(c.a^n+v_n.a^n)+x_n$

$\Leftrightarrow v_{n+1}=v_n+\dfrac{x_n}{a^{n+1}}, \forall n=1,2,...$

Suy ra: $v_2=v_1+\dfrac{x_1}{a^2}, v_3=v_2+\dfrac{x_2}{a^3}, ..., v_n=v_{n-1}+\dfrac{x_{n-1}}{a^n}$

$\Rightarrow v_n=v_1+\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{x_1}{a}+\dfrac{x_2}{a^2}+...+\dfrac{x_{n-1}}{a^{n-1}}\right), \forall n=2,3,...,$ ở đây hai số c và v_1 được xác định dựa vào giả thiết của bài toán. Vậy $u_n=c.a^n+v_n.a^n, \forall n=1,2,...$ trong đó c là hằng số và (v_n) là dãy số đã được xác định như trên.

Nhận xét. 1) Nếu $a=1$ thì việc xác định u_n giống như xác định v_n ở trên (*loại này thường gặp nhiều trong các kì thi học sinh giỏi, Olympic 30/04, ...*).

2) Nếu (x_n) là CSN có số hạng đầu là x_1 và công bội q, $q\neq a$ thì $u_n=v_n-\dfrac{1}{a-q}.x_n$, $n=1,2,...$ với (v_n) là CSN có công bội a.

Chứng minh. Đặt $v_n=u_n+\dfrac{1}{a-q}x_n, \ n=1,2,...$

$\Rightarrow u_n=v_n-\dfrac{1}{a-q}x_n.$ Khi đó, ta có: $u_{n+1}=au_n+x_n$

$\Leftrightarrow v_{n+1}-\dfrac{1}{a-q}.x_{n+1}=a\left(v_n-\dfrac{1}{a-q}x_n\right)+x_n$

$\Leftrightarrow v_{n+1}=av_n-\dfrac{a}{a-q}.x_n+\dfrac{1}{a-q}.x_{n+1}+x_n$

$\Leftrightarrow v_{n+1}=av_n-\dfrac{a}{a-q}.x_n+\dfrac{q}{a-q}.x_n+x_n\Leftrightarrow v_{n+1}=av_n$

$\Rightarrow (v_n)$ là CSN có $v_1=u_1+\dfrac{x_1}{a-q}$ và công bội a

hay $v_n=\left(u_1+\dfrac{x_1}{a-q}\right)a^{n-1}, \forall n=1,2,...$

3) Nếu (x_n) là CSN có số hạng đầu là x_1 và công bội a thì ta có thể xác định số hạng tổng quát của

Được quét bằng CamScanner

dãy số (u_n) thoả mãn $u_{n+1}=au_n+x_n, \forall n\geq 1$ như sau: Ta có: $u_{n+1}=au_n+x_1.a^{n-1}$

$\Rightarrow u_n=au_{n-1}+x_1.a^{n-2}=a\left(au_{n-2}+x_1a^{n-3}\right)+x_1a^{n-2}$

$=a^2u_{n-2}+2x_1a^{n-2}=...=a^{n-1}u_1+(n-1)x_1a^{n-2}.$

Vậy $u_n=a^{n-1}u_1+(n-1)x_1a^{n-2}, \forall n=1,2,...$

CÁC VÍ DỤ ÁP DỤNG

Thí dụ 2.1. *Cho dãy số (u_n) được xác định bởi* $\begin{cases}u_1=5\\ u_{n+1}=3u_n-2^n \ (n\in\mathbb{N}^*)\end{cases}$. *Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy.*

Lời giải. Theo kết quả 2, ta có $a=3$, $x_n=-2^n$, do đó: $v_n=v_1+\frac{1}{a}\left(\frac{x_1}{a}+\frac{x_2}{a^2}+...+\frac{x_{n-1}}{a^{n-1}}\right)$

$=v_1+\frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}+\frac{-2^2}{3^2}+...+\frac{-2^{n-1}}{3^{n-1}}\right)=v_1-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3^2}+...+\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}\right)$

$=v_1-\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)=v_1-\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^n, \forall n=1,2,3,...$ và

$u_n=c.a^n+v_n.a^n=c.3^n+\left(v_1-\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)3^n$

$=(c+v_1-\frac{2}{3})3^n+2^n \ \forall n=1,2,...$

Với $u_1=5\Rightarrow(c+v_1-\frac{2}{3})3^1+2^1=5\Leftrightarrow c+v_1-\frac{2}{3}=1.$

Vậy $u_n=3^n+2^n, \forall n=1,2,...$

Thí dụ 2.2. *Cho dãy số (u_n) được xác định bởi* $\begin{cases}u_1=4\\ u_{n+1}=u_n+2n+3 \ (n\in\mathbb{N}^*)\end{cases}$. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì u_n là số chính phương.*

Lời giải. Theo kết quả 2 trường hợp $a=1$, ta có:

$u_{n+1}=u_n+2n+3\Rightarrow u_2=u_1+5, u_3=u_2+7, u_4=u_3+9, ...,$

$u_n=u_{n-1}+2n+1.$

Cộng vế theo vế $n-1$ đẳng thức trên ta được:

$u_n=u_1+5+7+...+2n+1=4+(3+5+...+2n+1)-3=(n+1)^2.$

Vậy $u_n=(n+1)^2$ là số chính phương với mọi n.

Thí dụ 2.3 (Olympic Toán Sinh viên, 2013). *Cho dãy số (x_n) như sau: $x_1=a$ và $(n+1)^2x_{n+1}=n^2x_n+2n+1, \forall n=1,2,...$ Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.*

Lời giải. Ta đặt $y_n=n^2x_n, \forall n=1,2,...$ Ta có: $y_1=a$ và $y_{n+1}=y_n+2n+1\Rightarrow y_2=y_1+3, y_3=y_2+5,$

$y_4=u_3+7,...,y_n=y_{n-1}+2n-1.$

Cộng vế theo vế $n-1$ đẳng thức trên ta được:

$y_n=y_1+3+5+...+2n-1=a+3+5+...+2n-1$

$=a+\frac{3+2n-1}{2}(n-1)=a+n^2-1$

$\Rightarrow x_n=\frac{y_n}{n^2}=\frac{n^2+a-1}{n^2}, \forall n=1,2,...$ Do đó:

$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+a-1}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a-1}{n^2}\right)=1.$

Thí dụ 2.4 (Olympic Toán Sinh viên Toàn quốc, 2004). *Cho dãy số (x_n) như sau: $x_1=0$ và $x_{n+1}=\frac{x_n}{2004}+(-1)^{n+1}, \forall n=1,2,...$ Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n^2$.*

Lời giải. Ta đặt $y_n=-(-1)^n, \forall n=1,2,...$ Khi đó:

$$x_{n+1}=\frac{x_n}{2004}+y_n, \forall n=1,2,...$$

Ta có (y_n) là cấp số nhân có $y_1=1$ và công bội $q=-1$. Theo nhận xét 2 của kết quả 2, ta có:

$x_n=v_n-\frac{1}{a-q}.y_n=\left(x_1+\frac{y_1}{a-q}\right)a^{n-1}-\frac{1}{a-q}.y_n$

$=\frac{1}{\frac{1}{2004}+1}\left(\frac{1}{2004}\right)^{n-1}+\frac{1}{\frac{1}{2004}+1}.(-1)^n$

$=\frac{2004}{2005}\left(\frac{1}{2004}\right)^{n-1}+\frac{2004}{2005}.(-1)^n=\frac{2004+(-2004)^n}{2005.2004^{n-1}}$

$\Rightarrow x_n^2=\left(\frac{2004}{2005}\left(\frac{1}{2004}\right)^{n-1}+\frac{2004}{2005}.(-1)^n\right)^2$

$=\frac{2004^2}{2005^2}\left(\frac{1}{2004}\right)^{2n-2}-2.\frac{2004^2}{2005^2}.\left(-\frac{1}{2004}\right)^{n-1}+\frac{2004^2}{2005^2}.$

Suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n^2=\left(\frac{2004}{2005}\right)^2.$

Thí dụ 2.5 (Olympic Toán Sinh viên Toàn quốc, 2012). *Cho dãy số (a_n) thoả mãn điều kiện*

$$a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n-\frac{2}{n}, a_1=\alpha, n=1,2,...$$

Tìm α để dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn.

Lời giải. Ta có:

Được quét bằng CamScanner

$$a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n-\frac{2}{n}\Leftrightarrow\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}-\frac{2}{n(n+1)},n=1,2,...$$

Đặt $u_n=\frac{a_n}{n},n=1,2,...$, ta có:

$$u_1=\alpha,u_{n+1}=u_n-2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),n=1,2,...$$

$$\Rightarrow u_2=u_1-2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right),u_3=u_2-2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right),...,$$

$$u_n=u_{n-1}-2\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right).$$

Cộng $n-1$ đẳng thức trên ta có:

$$u_n=u_1-2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n}\right)=\alpha-\frac{2(n-1)}{n}\Rightarrow a_n=(\alpha-2)n+2.$$

Do đó, dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi $\alpha-2=0\Leftrightarrow\alpha=2$.

Kết quả 3. *Nếu dãy số (u_n) thoả mãn*

$$u_1=\alpha,u_2=\beta,u_{n+2}-(a+b)u_{n+1}+abu_n=0,\forall n\geq 1,$$

trong đó a, b là hằng số và $a\neq b$ (kể cả a, b là số phức) thì ta có thể xác định số hạng tổng quát của nó như sau: Ta có: $u_{n+2}-(a+b)u_{n+1}+abu_n=0$

$$\Leftrightarrow u_{n+2}-bu_{n+1}=a(u_{n+1}-bu_n).$$

Đặt $v_n=u_{n+1}-bu_n,n=1,2,...,$ khi đó ta có:

$v_1=\beta-b\alpha,v_{n+1}=av_n,n=1,2,...$ *suy ra* (v_n) *là CSN và* $v_n=(\beta-b\alpha)a^{n-1},\forall n=1,2,...$

Đến đây, ta có: $u_1=\alpha,u_{n+1}=bu_n+v_n,n=1,2,...,$ *theo nhận xét 2 của kết quả 2 ta xác định được:*

$$u_n=\frac{\beta-\alpha a}{b-a}b^{n-1}-\frac{\beta-\alpha b}{b-a}a^{n-1},n=1,2,...$$

Nhận xét. Nếu $a=b$ thì xác định số hạng tổng quát của dãy (u_n) thoả mãn $u_1=\alpha,u_{n+1}=bu_n+v_n$ với $v_n=(\beta-b\alpha)a^{n-1},\forall n=1,2,...$ như ở nhận xét 3 của kết quả 2. Và ta xác định được:

$$u_n=\alpha.a^{n-1}+(n-1)(\beta-\alpha.a)a^{n-2},\forall n=1,2,...$$

CÁC VÍ DỤ ÁP DỤNG

Thí dụ 3.1. *Cho dãy số (u_n) xác định như sau* $\begin{cases}u_1=u_2=1\\u_{n+2}=u_{n+1}+u_n,n\geq 1\end{cases}$ *(dãy Fibonacci). Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy.*

Phân tích. Ta có:

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n\Leftrightarrow u_{n+2}-u_{n+1}-u_n=0.$$

Ta muốn đưa đẳng thức $u_{n+2}-u_{n+1}-u_n=0$ về dạng $u_{n+2}-(a+b)u_{n+1}+abu_n=0$. Do đó:

$$u_{n+2}-u_{n+1}-u_n=u_{n+2}-(a+b)u_{n+1}+abu_n,\forall n\geq 1$$

$\Rightarrow\begin{cases}a+b=1\\a.b=-1\end{cases}$. Suy ra a, b là nghiệm của phương trình: $t^2-t-1=0\Leftrightarrow t=\frac{1-\sqrt{5}}{2},t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ta chọn $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2},b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải. Ta có:

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n\Leftrightarrow u_{n+2}-u_{n+1}-u_n=0$$

$$\Leftrightarrow u_{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)u_{n+1}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}.\frac{1+\sqrt{5}}{2}u_n=0.$$

Theo kết quả 3, với $\alpha=1,\beta=1,$ $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2},b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ta xác định được:

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],\forall n=1,2,...$$

Thí dụ 3.2. *Cho dãy số (u_n) được xác định bởi* $\begin{cases}u_1=u_2=1\\u_{n+2}=2u_{n+1}-2u_n,n\geq 1\end{cases}$. *Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy.*

Phân tích. Ta có:

$$u_{n+2}=2u_{n+1}-2u_n\Leftrightarrow u_{n+2}-2u_{n+1}+2u_n=0.$$

Ta muốn đưa đẳng thức $u_{n+2}-2u_{n+1}+2u_n=0$ về dạng $u_{n+2}-(a+b)u_{n+1}+abu_n=0$. Do đó:

$$u_{n+2}-2u_{n+1}+2u_n=u_{n+2}-(a+b)u_{n+1}+abu_n,\forall n\geq 1$$

$\Rightarrow\begin{cases}a+b=2\\a.b=2\end{cases}$. Suy ra a, b là nghiệm của phương trình: $t^2-2t+2=0\Leftrightarrow t=1-i,t=1+i$. Ta chọn: $a=1-i,b=1+i$. Khi đó, ta có thể giải như sau

Lời giải.: Ta có:

$$u_{n+2}=2u_{n+1}-2u_n\Leftrightarrow u_{n+2}-2u_{n+1}+2u_n=0$$

$$\Leftrightarrow u_{n+2}-(1-i+1+i)u_{n+1}+(1-i)(1+i)u_n=0,\forall n\geq 1.$$

Theo kết quả 3, với $\alpha=1,\beta=1$, $a=1-i,b=1+i$, ta xác định được: $u_n=\frac{1}{2}\left[(1+i)^{n-1}+(1-i)^{n-1}\right]$

$$=(\sqrt{2})^{n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{4},\forall n=1,2,...$$

Được quét bằng CamScanner

Thí dụ 3.3. *Cho dãy số (x_n) được xác định bởi:*

$$\begin{cases} x_0=0 \\ x_{n+1}=5x_n+\sqrt{24x_n^2+1} \end{cases}.$$

a) *Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số đều là số nguyên.*

b) *Tìm số hạng tổng quát của dãy số.*

Lời giải. a) Từ

$$x_{n+1}=5x_n+\sqrt{24x_n^2+1}\Rightarrow x_{n+1}^2-10x_{n+1}x_n+x_n^2-1=0 \ (1)$$

thay n bởi $n-1$ ta được:

$$x_{n-1}^2-10x_{n-1}x_n+x_n^2-1=0 \quad (2).$$

Từ (1) và (2), suy ra x_{n+1}, x_{n-1} là nghiệm của phương trình $t^2-10x_n t+x_n^2-1=0$. Khi đó, theo định lí Viète ta có $x_{n+1}+x_{n-1}=10x_n$. Từ đây suy ra tất cả số hạng của dãy đều là số nguyên.

b) Ta có: $x_{n+1}+x_{n-1}=10x_n \Leftrightarrow x_{n+1}-10x_n+x_{n-1}=0$

$$\Leftrightarrow x_{n+1}-(5-2\sqrt{6}+5+2\sqrt{6})x_n +(5-2\sqrt{6}).(5+2\sqrt{6})x_{n-1}=0.$$

Ta có: $x_0=0=\alpha$, $x_2=1=\beta, a=5-2\sqrt{6}, b=5+2\sqrt{6}$.

Theo kết quả 3 ta xác định được:

$$x_n=\frac{1}{4\sqrt{6}}\left((5+2\sqrt{6})^n-(5-2\sqrt{6})^n\right), n=0,1,...$$

Thí dụ 3.4 (HSG Bungari, 2000). *Cho dãy số (x_n) được xác định bởi:* $\begin{cases} x_1=1, x_2=a \\ x_{n+2}=\sqrt[3]{x_{n+1}^2.x_n} \ \forall n\geq 1 \end{cases}$, *$a$ là hằng số dương. Chứng minh dãy số (x_n) hội tụ và tính giới hạn của dãy.*

Lời giải. Dễ thấy $x_n>0, \forall n\geq 1$. Khi đó:

$$x_{n+2}=\sqrt[3]{x_{n+1}^2.x_n}\Leftrightarrow x_{n+2}=\left(x_{n+1}^2.x_n\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \ln x_{n+2}=\frac{2}{3}\ln x_{n+1}+\frac{1}{3}\ln x_n$$

$$\Leftrightarrow \ln x_{n+2}-\frac{2}{3}\ln x_{n+1}-\frac{1}{3}\ln x_n=0.$$

Đặt $u_n=\ln x_n \ \forall n\geq 1$, ta có:

$$u_1=0, u_2=\ln a, u_{n+2}-\frac{2}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n=0.$$

Ta có: $u_{n+2}-\frac{2}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n=0$

$$\Leftrightarrow u_{n+2}-\left(1-\frac{1}{3}\right)u_{n+1}+\left(1.\frac{-1}{3}\right)u_n=0.$$

Theo kết quả 3, ta xác định được:

$$u_n=\frac{9}{4}.\ln a.\left(\frac{-1}{3}\right)^n+\frac{3}{4}\ln a, \ \forall n\geq 1.$$

Vậy $x_n=e^{\frac{9}{4}.\ln a.\left(\frac{-1}{3}\right)^n+\frac{3}{4}\ln a}$, $\forall n\geq 1$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a^{\frac{3}{4}}$.

Kết quả 4. *Nếu dãy số (u_n) thoả mãn $u_{n+1}=x_n u_n+y_n, \forall n\geq 1$, trong đó x_n, y_n là các hàm số theo biến n, $x_n\neq 0, \forall n$ thì $u_n=z_n.x_1.x_2...x_{n-1}$, $\forall n\geq 2$, trong đó (z_n) là dãy số thoả mãn*

$$z_{n+1}-z_n=\frac{y_n}{x_1.x_2...x_n}, \forall n=1,2,....$$

Chứng minh. Đặt $u_n=z_n.x_1.x_2...x_{n-1}, \forall n=2,3,...$, khi đó ta có: $u_{n+1}=x_n u_n+y_n$

$$\Leftrightarrow z_{n+1}.x_1.x_2...x_n=x_n.z_n.x_1.x_2...x_{n-1}+y_n$$

$$\Leftrightarrow z_{n+1}-z_n=\frac{y_n}{x_1.x_2...x_n}, \forall n\geq 2.$$

CÁC VÍ DỤ ÁP DỤNG

Thí dụ 4.1 (Olympic Toán Sinh viên Toàn quốc, 2012). *Cho dãy số (a_n) thoả mãn điều kiện*

$$a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n-\frac{2}{n}, a_1=\alpha, n=1,2,...$$

Tìm α để dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn.

Lời giải. Đặt $x_n=\frac{n+1}{n}, y_n=-\frac{2}{n}$, $n=1,2,...$ Xét dãy số (z_n) thoả mãn:

$$z_{n+1}-z_n=\frac{y_n}{x_1.x_2...x_n}=\frac{\frac{-2}{n}}{\frac{2}{1}.\frac{3}{2}...\frac{n+1}{n}}=\frac{-2}{n(n+1)}, \forall n\geq 1.$$

Ta xác định được:

$$z_n=z_1-2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n}\right)=z_1-\frac{2(n-1)}{n}, n=1,2,...$$

Theo kết quả 4, ta có: $a_n=z_n.x_1.x_2...x_{n-1}$

$$=(z_1-\frac{2(n-1)}{n})n=nz_1-2(n-1), \forall n\geq 2.$$

Từ $a_n=nz_1-2(n-1)$ ta có $a_1=z_1$ nên $z_1=\alpha$.

Được quét bằng CamScanner

Vậy $a_n=n\alpha-2(n-1),\forall n\geq 1$. Do đó, dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi $\alpha-2=0\Leftrightarrow\alpha=2$.

Thí dụ 4.2 (HSG Gia Lai, năm học 2012-2013, bảng A). *Cho dãy số (a_n) xác định như sau:*

$$a_1=\alpha,\ a_{n+1}=\frac{(n+2)a_n+2013}{n},\ \forall n=1,2,...$$

a) *Tìm số hạng tổng quát của dãy số (a_n).*

b) *Tìm α để dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn trong trường hợp đó.*

Lời giải. a) Ta có:

$$a_{n+1}=\frac{(n+2)a_n+2013}{n}=\frac{n+2}{n}a_n+\frac{2013}{n}.$$

Đặt $x_n=\frac{n+2}{n},y_n=\frac{2013}{n}$, $n=1,2,...$, ta có:

$$\frac{y_n}{x_1x_2...x_n}=\frac{\frac{2013}{n}}{\frac{3}{1}.\frac{4}{2}.\frac{5}{3}...\frac{n+1}{n-1}.\frac{n+2}{n}}=\frac{4026}{n(n+1)(n+2)}.$$

Xét dãy số (z_n) thoả mãn:

$$z_{n+1}-z_n=\frac{4026}{n(n+1)(n+2)},\forall n\geq 1.$$

Dễ dàng xác định được:

$$z_n=z_1+4026\left(\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}\right),\forall n\geq 2.$$

Ta có: $\frac{1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)$, do đó:

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{n^2+n-2}{n(n+1)}\right)\Rightarrow z_n=z_1+\frac{2013}{2}\left(\frac{n^2+n-2}{n(n+1)}\right),\forall n\geq 1.$$

Theo kết quả 4, ta có:

$$u_n=\left(z_1+\frac{2013}{2}.\frac{n^2+n-2}{n(n+1)}\right).\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=z_1.\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2013}{4}(n^2+n-2),\forall n\geq 2.$$

Từ giả thiết $a_1=\alpha$ ta xác định được $z_1=\alpha$.

Vậy $a_n=\alpha.\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2013}{4}(n^2+n-2),\forall n\geq 1.$

b) Ta có: $a_n=\frac{(2\alpha+2013)n(n+1)}{4}-\frac{2013}{2},\forall n\geq 1.$

Do đó dãy số (a_n) có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi $2\alpha+2013=0\Leftrightarrow\alpha=\frac{-2013}{2}$.

Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\frac{-2013}{2}$.

Thí dụ 4.3. *Cho dãy số (a_n) xác định như sau:*

$$a_1=1,a_2=1,a_{n+2}=\frac{2(n+1)}{n+2}a_{n+1}-\frac{n}{n+2}a_n+\frac{n+1}{n+2},$$

$\forall n=1,2,...$ Tìm tất cả các giá trị n sao cho $a_n=n$.

Lời giải. Ta có: $a_{n+2}=\frac{2(n+1)}{n+2}a_{n+1}-\frac{n}{n+2}a_n+\frac{n+1}{n+2}$

$$\Leftrightarrow(n+2)a_{n+2}-(n+1)a_{n+1}=(n+1)a_{n+1}-na_n+n+1.$$

Đặt $u_n=(n+1)a_{n+1}-na_n,\forall n=1,2,...$, ta có:

$$u_1=1,u_{n+1}=u_n+n+1,\forall n=1,2,...$$

Theo nhận xét 1 của kết quả 2, ta xác định được:

$$u_n=u_1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Khi đó, ta có:

$$a_1=1,a_2=1,(n+1)a_{n+1}-na_n=\frac{n(n+1)}{2},\ \forall n=1,2,...$$

Từ $(n+1)a_{n+1}-na_n=\frac{n(n+1)}{2},\forall n=1,2,...$

$$\Leftrightarrow a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n+\frac{n}{2},\ \forall n=1,2,...$$

Đặt $x_n=\frac{n}{n+1},y=\frac{n}{2}$, ta có:

$$x_1.x_2...x_n=\frac{1}{n+1},\frac{y_n}{x_1.x_2...x_n}=\frac{n(n+1)}{2},\forall n=1,2,...$$

Xét dãy số (z_n) thoả mãn:

$$z_{n+1}-z_n=\frac{n(n+1)}{2},\ \forall n\geq 1.$$

Ta xác định được:

$$z_n=z_1+\frac{1}{2}[1.2+2.3+...+(n-1)n]=z_1+\frac{n(n^2-1)}{6},\forall n\geq 1.$$

Theo kết quả 4, ta có:

$$a_n=z_n.x_1.x_2...x_{n-1}=\left(z_1+\frac{n(n^2-1)}{6}\right)\frac{1}{n},\ \forall n\geq 2.$$

Từ giả thiết $a_1=1,a_2=1$ ta xác định được $z_1=1$.

Vậy $a_n=\frac{n^3-n+6}{6n},\forall n\geq 1$. Ta có: $a_n=n$

Được quét bằng CamScanner

$$\Leftrightarrow \frac{n^3-6n^2-n+6}{6n}=0 \Leftrightarrow (n^2-1)(n-6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=1 \\ n=6 \end{array}\right.$$

Kết quả 5. *Cho dãy số (x_n) thoả mãn $x_1=\alpha, x_2=\beta, x_{n+2}.x_n=x_{n+1}^2+a, \forall n=1,2,...$ và $x_n\neq 0, \forall n$. Ta có thể xác định số hạng tổng quát của dãy (x_n) như sau: Từ $x_{n+2}.x_n=x_{n+1}^2+a, \forall n=1,2,...$ ta có: $x_{n+2}.x_n=x_{n+1}^2+a$ (1), $x_{n+1}.x_{n-1}=x_n^2+a$ (2). Trừ (1) cho (2) vế theo vế ta được:*

$$x_{n+2}.x_n-x_{n+1}.x_{n-1}=x_{n+1}^2-x_n^2$$

$$\Leftrightarrow x_n(x_{n+2}+x_n)=x_{n+1}(x_{n+1}+x_{n-1})$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}+x_n}=\frac{x_n}{x_{n+1}+x_{n-1}}.$$

Do đó: $\dfrac{x_{n+1}}{x_{n+2}+x_n}=\dfrac{x_n}{x_{n+1}+x_{n-1}}=\dfrac{x_{n-1}}{x_n+x_{n-2}}$

$$=...=\frac{x_2}{x_3+x_1}=\frac{\beta}{\dfrac{\beta^2+a}{\alpha}+\alpha}=\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2+a}:=m.$$

Suy ra $m(x_{n+2}+x_n)=x_{n+1}, \forall n\geq 1$. Đến đây, ta tiếp tục đưa về kết quả 3 để xác định số hạng tổng quát.

Nhận xét. Nếu $a=0$ thì $x_n=\dfrac{x_2}{x_1}x_{n-1}, \forall n\geq 3$.

Thật vậy, từ $x_{n+2}.x_n=x_{n+1}^2, \forall n=1,2,...,$ ta có: $x_n.x_{n-2}=x_{n-1}^2,...,x_3.x_1=x_2^2$. Nhân theo vế $n-3$ đẳng thức trên ta có: $x_n=\dfrac{x_2}{x_1}x_{n-1}, \forall n\geq 3$.

Thí dụ 5.1 (Spain Mathematical Olympiad 2012). *Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1=1, x_2=5, x_n=\dfrac{x_{n-1}^2+4}{x_{n-2}}, \forall n\geq 3$. Chứng minh rằng x_n nguyên với mọi $n\in\mathbb{N}$ và tìm số hạng tổng quát của dãy số (x_n).*

Lời giải. Từ giả thiết, ta có: $x_n\neq 0, \forall n\geq 1$ và $x_n.x_{n-2}=x_{n-1}^2+4, \forall n\geq 3$. Theo kết quả 5, ta có:

$$\frac{1}{6}(x_{n+2}+x_n)=x_{n+1} \Leftrightarrow x_{n+2}-6x_{n+1}-x_n=0, \forall n\geq 1.$$

Suy ra x_n nguyên với mọi $n\in\mathbb{N}$. Ta có:

$$x_{n+2}-6x_{n+1}-x_n=0$$

$$\Leftrightarrow x_{n+2}-(3-\sqrt{10}+3+\sqrt{10})x_{n+1}+(3-\sqrt{10})(3+\sqrt{10})x_n=0.$$

Đến đây, theo kết quả 3, ta xác định được:

$$x_n=\frac{1}{2\sqrt{10}}\left[(2+\sqrt{10})(3+\sqrt{10})^{n-1}-(2-\sqrt{10})(3-\sqrt{10})^{n-1}\right]$$

$\forall n=1,2,...$

Thí dụ 5.2 (HSG Quốc gia, năm 1997, bảng A). *Hỏi có bao nhiêu hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau:*

1) $f(1)=1$

2) $f(n).f(n+2)=(f(n+1))^2+1997 \ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Lời giải. Ta đặt $f(2)=\beta, \beta\in\mathbb{N}^*$ và $x_n=f(n)$. Khi đó: $x_1=1, x_2=b, x_{n+2}.x_n=x_{n+1}^2+1997, \forall n=1,2,...$

Theo kết quả 5, ta có: $\dfrac{\beta}{1998+\beta^2}(x_{n+2}+x_n)=x_{n+1}$

$$\Leftrightarrow x_{n+2}-\left(\frac{1998}{\beta}+\beta\right)x_{n+1}+x_n=0, \forall n\geq 1.$$

Do $x_n\in\mathbb{N}^*, \forall n$ nên β là ước tự nhiên của 1998.

Ta lại có: $1998=2.3^3.37$; $\dfrac{1998}{\beta}+\beta>2$, suy ra phương trình $t^2-\left(\dfrac{1998}{\beta}+\beta\right)t+1=0$ có hai nghiệm dương phân biệt $t=\dfrac{\dfrac{1998}{\beta}+\beta-\sqrt{\left(\dfrac{1998}{\beta}+\beta\right)^2-4}}{2}:=a$,

$t=\dfrac{\dfrac{1998}{\beta}+\beta+\sqrt{\left(\dfrac{1998}{\beta}+\beta\right)^2-4}}{2}:=b$. Ta có:

$$x_{n+2}-\left(\frac{1998}{\beta}+\beta\right)x_{n+1}+x_n=0$$

$$\Leftrightarrow x_{n+2}-(a+b)x_{n+1}+ab.x_n=0$$

$$\Leftrightarrow x_{n+2}-ax_{n+1}=b(x_{n+1}-a.x_n).$$

Đến đây, theo kết quả 3, ta xác định được:

$$x_n=\frac{\beta-b}{a-b}.a^{n-1}-\frac{\beta-a}{a-b}.b^{n-1}, \forall n=1,2,...$$

Ứng với mỗi β là ước tự nhiên của 1998 ta có một hàm f thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy ta có 16 hàm số dạng $f(n)=\dfrac{\beta-b}{a-b}.a^{n-1}-\dfrac{\beta-a}{a-b}.b^{n-1}, \forall n=1,2,...$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Được quét bằng CamScanner

Thí dụ 5.3 (Bulgaria 1978). *Cho dãy số (a_n) xác định như sau* $a_1, a_2, \dfrac{a_1^2+a_1^2+a}{a_1a_2} \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ *và* $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}^2+a}{a_n}$, *a là số cho trước. Chứng minh rằng dãy số đã cho gồm toàn số nguyên.*

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $a_n.a_{n+2} = x_{n+1}^2 + a, \forall n \geq 1$. Theo kết quả 5, ta có:

$$\frac{a_1a_2}{a_1^2+a_1^2+a}(a_{n+2}+a_n) = a_{n+1}, \forall n \geq 1$$

$$\Leftrightarrow a_{n+2} = \frac{a_1^2+a_1^2+a}{a_1a_2}a_{n+1} - a_n = 0, \forall n \geq 1.$$

Suy ra a_n là số nguyên với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n+1}{u_n+1} \ (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy.

2. (*HSG TP. Hà Nội năm học 2011-2012*) Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n \ (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$.

Tìm $\lim \dfrac{u_n}{u_{n+1}}$.

3. (*Đề đề nghị Olympic 30/04/2013*).Cho dãy số (x_n) được xác định bởi: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{-14x_n-51}{5x_n+18} \ (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$. Tìm số hạng x_{2013} và tính $\lim x_n$.

4. (*HSG Toán lớp 12 Bình Định, năm học 2015-2016*) Xác định công thức tổng quát của dãy số (u_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 3u_{n-1} - 2^n + n, \ n = 2,3,... \end{cases}$$

5. (*Đề đề nghị Olympic 30/04/2013*) Tìm giới hạn của dãy số (x_n) xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 > 0 \\ 3(n+2)x_{n+1}^2 = 2(n+1)x_n^2 + n + 4, n \geq 1 \end{cases}$$

6. (*HSG Quốc gia, năm học 2000-2001, bảng B*) Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{3} \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2(2n+1)x_n+1} \ (n = 1,2,...) \end{cases}$. Hãy tính tổng của 2001 số hạng đầu tiên của dãy số (x_n).

7. (*HSG Quốc gia, bảng A, năm 2004*) Cho dãy số (x_n) được xác định bởi:

$$x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{(2+\cos 2\alpha)x_n + \cos^2\alpha}{(2-2\cos 2\alpha)x_n + 2 - \cos 2\alpha}, \ \forall n = 1,2,...,$$

trong đó α là số thực. Tìm tất cả các giá trị α để dãy số (y_n) với $y_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2x_k+1}, \forall n = 1,2,...$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Hãy tìm giới hạn của dãy trong các trường hợp đó.

8. (*HSG Quốc gia,1984*) Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$, $\forall n = 2,3,...$ Xét dãy số (v_n) như sau:

$$v_n = \operatorname{arccot} u_1^2 + \operatorname{arccot} u_2^2 + ... + \operatorname{arccot} u_n^2, \forall n = 1,2,...$$

Tìm giới hạn của dãy (v_n).

9. (*Đề đề nghị Olympic 30/04/2000*) Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 2, u_2 = 8, u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1}$, $\forall n = 2,3,...$ Xét dãy số (S_n) như sau:

$$S_n = \operatorname{arccot} u_1^2 + \operatorname{arccot} u_2^2 + ... + \operatorname{arccot} u_n^2, \forall n = 1,2,...$$

Tìm giới hạn của dãy (S_n).

10. (*Đề đề nghị vô địch Sinh viên Moskva, 1982*) Cho dãy số (x_n) được xác định bởi: $\begin{cases} x_0 = 1982 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{4-3x_n} \ (n = 0,1,...) \end{cases}$. Hãy tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

11. (*HSG Quốc gia, năm học 2002-2003, bảng B*) Cho số thực $\alpha \neq 0$ và dãy số (x_n) được xác định bởi: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_{n+1}(x_n + \alpha) = \alpha + 1 \ (\forall n = 1,2,...) \end{cases}$.

a) Hãy tìm số hạng tổng quát của dãy số đã cho.

b) Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

12. (*Đề đề nghị Olympic 30/04/2011*) Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_0 = \dfrac{1}{\cos 2\alpha}, a_n = \dfrac{a_{n-1} + 1 - \tan^2\alpha}{\cos 2\alpha . x_{n-1} + 1}$,

Được quét bằng CamScanner

$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}, \forall n=1,2,...$ Tìm số hạng tổng quát của dãy và xác định giới hạn của dãy.

13. (*Đề vô địch Kiev*) Cho dãy số (a_n) được xác định bởi: $\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}=4-\frac{3}{a_n} \ (\forall n=1,2,...) \end{cases}$. Chứng minh dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

14. (*Đề HSG Gia Lai, năm học 2008-2009*) Cho dãy số (x_n) thoả mãn $\begin{cases} x_0=2 \\ x_{n+1}=\frac{2x_n+1}{x_n+2}, \forall n=0,1,... \end{cases}$.

a) Hãy tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

b) Chứng minh $x_1+x_2+...+x_{2008}<2009$.

15. (*Đề thi Olympic Toán Sinh viên Toàn quốc năm 2001*) Cho trước $p>0, q>0, p+q<1$ và dãy số không âm (x_n) thoả mãn điều kiện sau:

$$x_{n+2}\le px_{n+1}+qx_n, \forall n=1,2,...$$

Chứng minh dãy số (x_n) hội tụ và tìm giới hạn của dãy đó.

16. (*Đề đề nghị Olympic 30/04/2003*) Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_0=2003, 2^n u_{n+1}=|2^n u_n-1|$, $\forall n=0,1,...$ Chứng minh dãy số đã cho hội tụ và tìm giới hạn của dãy đó.

17. (*HSG Quốc gia, năm 1998, bảng B*) Cho các số nguyên a, b. Xét dãy số nguyên (a_n) được xác định bởi: $a_0=a, a_1=b, a_2=2b-a+2$,

$$a_{n+3}=3a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n, n=0,1,2,...$$

a) Tìm công thức tổng quát của a_n.

b) Tìm tất cả các số nguyên để a_n là số chính phương với mọi $n\ge1998$.

18. (*HSG Quốc gia, năm 1997, bảng B*) Cho dãy số nguyên (a_n) được xác định bởi: $a_0=1, a_1=45$, $a_{n+2}=45a_{n+1}-7a_n, n=0,1,2,...$

a) Tính số các ước dương của $a_{n+1}^2-a_na_{n+2}$ theo n.

b). Chứng minh rằng $1997a_n^2+7^{n+1}.4$ là số chính phương với mỗi n.

19. (*HSG Quốc gia, 1999, bảng A*) Cho hai dãy số (x_n), (y_n) xác định như sau:

$x_0=1, x_1=4, x_{n+2}=3x_{n+1}-x_n, \forall n=0,1,2,....$

$y_0=1, y_1=2, y_{n+2}=3y_{n+1}-y_n, \forall n=0,1,2,...$

1) Chứng minh rằng: $x_n^2-5y_n^2+4=0, \forall n=0,1,2,...$

2) Giả sử a, b là hai số nguyên dương mà $a^2-5b^2+4=0$. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên k sao cho $x_k=a, y_k=b$.

20. Cho dãy số (x_n), được xác định như sau:

$$x_1=x_2=1, x_3=2, x_{n+3}=x_{n+2}-\frac{2}{3}x_{n+1}+\frac{1}{2}x_n, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Xác định số hạng tổng quát của dãy.

21. Cho dãy (u_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=2u_n+\sqrt{3u_n^2-2} \end{cases}.$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy số.

22. Cho dãy (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=3u_n+2n^3-9n^2+9n-3, \forall n\ge1 \end{cases}$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p thì dãy các tổng tương ứng $u_1+u_2+...+u_{p-1}$ đều chia hết cho p.

23. (*HSG Quốc gia, 2011*) Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_0=1, u_1=-1, u_n=6u_{n-1}+5u_{n-2}, \forall n\ge2$.

Chứng minh rằng: $u_{2012}-2010$ chia hết cho 2011.

24. Cho dãy số (a_n) thoả mãn các điều kiện: $\begin{cases} a_n\in(0;1) \\ a_{n+1}(1-a_n)=\frac{1}{4}, \forall n\in\mathbb{Z}^+. \end{cases}$

a) Chứng minh rằng: $a_n>\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$.

b) Chứng minh rằng dãy số (a_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

25. (*Đề đề nghị thi Olympic 30/4/2012*) Cho dãy số (x_n) được xác định bởi: $\begin{cases} x_1=1, x_2=2012 \\ x_{n+2}=\sqrt[3]{x_{n+1}^2.x_n}, \forall n\ge1 \end{cases}$.

Chứng minh dãy số (x_n) hội tụ và tính giới hạn của dãy.

26. (*Bulgaria 1999*) Cho dãy số nguyên (x_n) thỏa mãn $(n-1)x_{n+1}=(n+1)x_n-2(n-1), \forall n\in\mathbb{N}^*$. Biết $x_{1999}:2000$. Tìm số n nhỏ nhất sao $x_n:2000, n\ge2$.

27. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1=a_2=1$ và $a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^2+1}{a_n}$. Xác định số hạng tổng quát của dãy số đó.

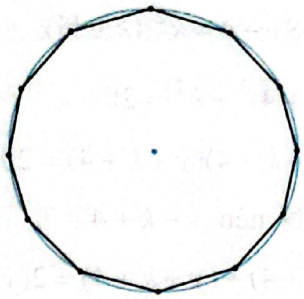
Được quét bằng CamScanner

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 129

PROBLEM. *Choosing 4 vertics of a regular dodecagon randomly. Compute the probability that these 4 vertics make a restangle.*

***Solution*:** Inscibing this regular dodecagon in a circle.



The number of restangle is equal to 6 × 5 : 2 since:

(i) there are 6 ways to choose the diagonal which must be a diameter of the circle.

(ii) for each diameter we have 5 ways choose the remaining diagonal.

(iii) 2 diagonal have equal role.

Therefore the required probability is 6 × 5 : 2

Comment: more generally

Choosing 4 (3) vertics of a regular $2n$ - sides polygon ($n \geq 2$). Compute the probability that these 4 (3) vertics make a restangle (right triangle).

Answer: $C_n^2 : C_{2n}^4$ $(4C_n^2 : C_{2n}^3)$.

Remark: This problem is based on problem 114.

TỪ VỰNG/KÍ HIỆU

dodecagon ion : *đa giác 12 cạnh*

diagonal : *đường chéo*

regular 2n-sides polygon : *đa giác đều 2n cạnh*

TRẦN TRỌNG THUYẾT
(GV THPT Nguyễn Du, Bắc Ninh)

BÀI DỊCH SỐ 127

BÀI TOÁN. *Cho một lưới ô vuông $m \times n$ ($m \leq n$). Hãy tìm số các hình vuông được tạo bởi hai đường nằm ngang và hai đường thẳng đứng của lưới.*

Lời giải. Chúng ta đếm số hình vuông dựa trên độ dài của chúng.

Số các hình vuông cỡ 1×1 là $m \times n$.

Số các hình vuông cỡ 2×2 là $(m-1)\times(n-1)$.

(Bạn có thể giải thích tại sao không?)

.....

Số các hình vuông cỡ $m \times m$ là $1\times(n-m+1)$.

Tổng tất cả các hình vuông là:

$$S = m\times n + (m-1)\times(n-1) + ... + 1\times(n-m+1).$$

Ta có:

$$S = m\times\left[m+(n-m)\right] + (m-1)\times\left[(m-1)+(n-m)\right] + ... + 1\times\left[1+(n-m)\right].$$

Vì vậy:

$$S = \left[m^2 + (m-1)^2 + ... + 1^2\right] + \left[m + (m-1) + ... + 1\right]\times(n-m).$$

Mà $$m^2 + (m-1)^2 + ... + 1^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

và $$m + (m-1) + ... + 1 = \frac{m(m+1)}{2}.$$

(Các tổng này đã được tính trong các số báo trước).

Từ đây ta có thể dễ dàng suy ra:

$$S = \frac{m(m+1)(3n-m+1)}{6}.$$

Nhận xét. Hoan nghênh bạn *Dương Trường Giang*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên** đã gửi bài sớm và có bài dịch tốt.

NHƯ HOÀNG *(Hà Nội)*

Được quét bằng CamScanner



BÀI TOÁN 108. *Giải phương trình nghiệm nguyên sau:* $x^2+xy-2y+1=0$.

Lời giải.

Cách 1. Đưa về phương trình ước số

Với $x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}$ ta có:

$$x^2+xy-2y+1=0\Leftrightarrow x^2-4+y(x-2)=-5$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(x+y+2)=-5 \quad (*).$$

Vì $x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}$ nên $x-2\in\mathbb{Z}$, $x+y+2\in\mathbb{Z}$.

Kết hợp với (*) ta thấy chỉ xảy ra 4 trường hợp sau: $\begin{cases}x-2=-1\\x+y+2=5\end{cases}$ (1) hoặc $\begin{cases}x-2=1\\x+y+2=-5\end{cases}$ (2)

hoặc $\begin{cases}x-2=-5\\x+y+2=1\end{cases}$ (3) hoặc $\begin{cases}x-2=5\\x+y+2=-1\end{cases}$ (4).

Giải hệ (1) ta được nghiệm $(x;y)=(1;2)$.

Giải hệ (2) ta được nghiệm $(x;y)=(3;-10)$.

Giải hệ (3) ta được nghiệm $(x;y)=(-3;2)$.

Giải hệ (4) ta được nghiệm $(x;y)=(7;-10)$.

Vậy các nghiệm nguyên của phương trình đã cho là:

$$(1;2);(-3;2);(3;-10);(7;-10).$$

Cách 2. Đưa về phương trình ước số

Với $x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}$ ta có:

$$x^2+xy-2y+1=0\Leftrightarrow 4x^2+4xy-8y+4=0$$
$$\Leftrightarrow \left(4x^2+4xy+y^2\right)-\left(y^2+8y+16\right)=-20$$
$$\Leftrightarrow (2x+y)^2-(y+4)^2=-20$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(x+y+2)=-5.$$

Đến đây giải tiếp như *cách 1*.

Cách 3. Sử dụng điều kiện chính phương của biệt thức Delta

Xét phương trình: $x^2+xy-2y+1=0$ (1).

Với $x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}$ xem phương trình (1) là phương trình bậc hai theo ẩn x. Ta có:

$$\Delta=y^2+8y-4.$$

Phương trình (1) có nghiệm nguyên khi và chỉ khi $\Delta=y^2+8y-4$ là số chính phương, tức là:

$$y^2+8y-4=k^2\ (k\in\mathbb{N})$$
$$\Leftrightarrow (y+4)^2-k^2=20$$
$$\Leftrightarrow (y-k+4)(y+k+4)=20 \quad (*).$$

Vì $y\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N}$ nên $y-k+4\in\mathbb{Z}$, $y+k+4\in\mathbb{Z}$.

Do $(y-k+4)+(y+k+4)=2(y+4)$ là số nguyên chẵn và do (*) nên $y-k+4$ và $y+k+4$ cùng là số nguyên chẵn. Hơn nữa $y-k+4\le y+k+4$ nên chỉ xảy ra các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases}y-k+4=-10\\y+k+4=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-10\\k=4\end{cases}$.

Với $y=-10$ phương trình (1) trở thành:

$$x^2-10x+21=0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(x-7)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=7\end{array}\right.$$

TH2: $\begin{cases}y-k+4=2\\y+k+4=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\k=4\end{cases}$.

Với $y=2$ phương trình (1) trở thành:

$$x^2+2x-3=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$$

Vậy tất cả các nghiệm nguyên của phương trình đã cho là $(1;2);(-3;2);(3;-10);(7;-10)$.

Cách 4. Biểu diễn ẩn này theo ẩn kia

Với $x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}$ ta có:

$$x^2+xy-2y+1=0$$
$$\Leftrightarrow y(2-x)=x^2+1 \quad (*).$$

Được quét bằng CamScanner

Với $x=2$, phương trình (*) trở thành:

$$x^2+1=0 \text{ (vô nghiệm).}$$

Với $x\neq 2$, phương trình (*) trở thành:

$$y=\frac{x^2+1}{2-x} \Leftrightarrow y=-x-2-\frac{5}{x-2}.$$

Do $x\in\mathbb{Z}$ nên $-x-2\in\mathbb{Z}$. Vì vậy $y\in\mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $\frac{5}{x-2}\in\mathbb{Z}$, do đó $x-2$ là ước của 5.

Do đó $x\in\{-3;1;3;7\}$. Suy ra tất cả các nghiệm nguyên của phương trình đã cho là:

$$(1;2);(-3;2);(3;-10);(7;-10).$$

Cách 5. Vận dụng định lí Viète

Xét phương trình $x^2+xy-2y+1=0$ (1).

Với $x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}$ xem phương trình (1) là phương trình bậc hai theo ẩn x. Giả sử phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2. Khi đó, theo định lí Viète ta có:

$$\begin{cases}x_1+x_2=-y\\ x_1.x_2=-2y+1\end{cases} \text{(*).}$$

Do $y\in\mathbb{Z}$ và (*) nên ta suy ra $x_1\in\mathbb{Z}, x_2\in\mathbb{Z}$.

Từ (*) suy ra: $x_1x_2-2(x_1+x_2)=1$

$$\Leftrightarrow (x_1-2)(x_2-2)=5.$$

Do đó chỉ xảy ra hai trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases}x_1-2=-1\\ x_2-2=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=1\\ x_2=-3\end{cases}$.

Suy ra $y=2$.

TH2: $\begin{cases}x_1-2=1\\ x_2-2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=3\\ x_2=7\end{cases}$.

Suy ra $y=-10$.

Thay lại phương trình ta thấy tất cả các cặp số $(1;2);(-3;2);(3;-10);(7;-10)$ đều thỏa mãn phương trình (1).

Vậy tất cả các nghiệm nguyên của phương trình đã cho là: $(1;2);(-3;2);(3;-10);(7;-10)$.

NGUYỄN TRI PHƯƠNG

(GV THCS Nhơn Mỹ, An Nhơn, Bình Định)

Nhận xét. Kỳ này chỉ có bạn *Vũ Đức Duy*, phường Bình Lợi Trung, **TP. Hồ Chí Minh** tham gia giải và đóng góp 2 cách giải giống với tác giả bài toán. Xin hoan nghênh bạn.

KHÁNH BÌNH (Hà Nội)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 110 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30/7/2026.

BÀI TOÁN 110. *Đội thanh niên tình nguyện của một trường gồm có 2 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 6 học sinh lớp C. Trong đợt tham gia tiếp sức mùa thi, họ đứng ngẫu nhiên thành một hàng ngang để chụp ảnh kỷ niệm. Tính xác suất mà đứng giữa hai học sinh lớp A không có học sinh lớp C.*

NGUYỄN THANH HẢI

(GV THPT Triệu Sơn 4, Thanh Hoá)

****

SAI LẦM . . . *(Tiếp theo trang 47)*

Nếu ba số a,b,c có tổng bằng 91 và lập thành cấp số nhân có công bội q nguyên dương thì

$$a+aq+aq^2=91 \Rightarrow 1+q+q^2\in U(91)$$
$$=\{1;7;13;91\}\Rightarrow q\in\{2;3;9\}.$$

Từ đó tìm ra các tập con gồm 3 phần tử của A sao cho 3 phần tử đó có tổng bằng 91 và chúng lập thành cấp số nhân có công bội là số nguyên dương là $(1;9;81),(7;21;63),(13;26;52)$. Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố M, $|M|=3$.

Vậy:

$$P(M)=\frac{|M|}{|\Omega|}=\frac{3}{3870}=\frac{1}{1290}.$$

Các bạn có tìm ra kết quả như vậy không?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Được quét bằng CamScanner



BÀI TOÁN 116 (IMO 1969). *Cho n điểm trong mặt phẳng, với $n > 4$, trong số đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng có ít nhất $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ tứ giác lồi tạo thành có đỉnh nằm trong số n điểm đó.*

Lời giải. Trước tiên ta xét 5 điểm bất kỳ, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Ta vạch một bao lồi từ 5 điểm này. Nếu bao lồi này có hơn 3 điểm thì hiển hiển nhiên có ít nhất một tứ giác lồi. Nếu chỉ có 3 điểm, chẳng hạn là A, B, C thì 2 điểm D, E còn lại ắt phải nằm trong tam giác ABC. Khi đó có 2 đỉnh của tam giác ABC nằm cùng phía đối với đường thẳng DE và cùng với D, E tạo thành một tứ giác lồi. Như vậy mệnh đề cần chứng minh đúng với $n = 5$. (Để ý rằng $\frac{(5-3)(5-4)}{2} = 1$).

Xét n điểm với $n > 5$. Vì không có 3 điểm nào thẳng hàng nên số tất cả các cách chọn 5 điểm trong n điểm là:

$$C_n^5 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}.$$

Mỗi cách chọn này lại cho ta ít nhất một tứ giác lồi, tuy nhiên bất kỳ tứ giác lồi nào trong số đó cũng có thể được lập từ $(n-4)$ tập hợp khác nhau gồm 5 điểm nói trên, do vậy có ít nhất:

$$\frac{1}{n-4} C_n^5 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{120}$$

số tất cả các tứ giác lồi được lập từ n điểm đã cho.

Để kết thúc chứng minh ta sẽ chứng tỏ rằng:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{120} \geq \frac{(n-3)(n-4)}{2}, \forall n \geq 5 \quad (1).$$

Thật vậy, bất đẳng thức (1) tương đương với:

$$n(n-1)(n-2) \geq 60(n-4)$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2) - 60(n-4) \geq 0 \quad (2).$$

Dễ thấy rằng $n = 5$ và $n = 6$ là các nghiệm của phương trình (2), do đó ta có thể phân tích vế trái của (2) thành nhân tử như sau:

$$n(n-1)(n-2) - 60(n-4) = (n-5)(n-6)(n+8).$$

Đặt $f(n) = (n-5)(n-6)(n+8), \forall n \geq 5$.

Ta có: $f(n) = (n-5)(n-6)(n+8) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 5 \\ n = 6 \end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu của $f(n)$:

n		5		6	
$f(n)$		0	−	0	+

Từ bảng xét dấu trên suy ra: $f(n) > 0$ khi $n > 6$.

Do đó (2) được chứng minh.

Kết luận: Vậy có ít nhất $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ tứ giác lồi tạo thành có đỉnh nằm trong số n điểm đã cho.

Nhận xét. Hoan nghênh bạn *Vũ Đức Duy*, phường Bình Lợi Trung, **TP. Hồ Chí Minh** đã có lời giải đúng cho bài toán này.

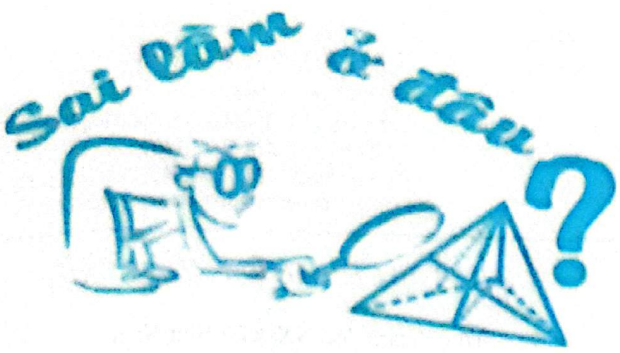
NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30/7/2026.

BÀI TOÁN 118. *Cho tam giác ABC vuông tại C, đường cao CH. Gọi M là trung điểm của cạnh huyền AB và P là một điểm nằm bên trong tam giác ABC sao cho $AP = AC$. Chứng minh rằng đường thẳng PM là tia phân giác của góc $\widehat{BPH}$ khi và chỉ khi $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$.*

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

Được quét bằng CamScanner



GIẢI ĐÁP: SAO KHÔNG CÓ ĐIỂM ?

(Đề đăng trên TH&TT số 584, tháng 2 năm 2026)

Phân tích sai lầm. Bài giải của Hưng không có điểm cho dù đáp số bài toán bằng $\frac{5}{8}$, song lời giải bài toán không đúng. Trong mỗi trường hợp, với cách lấy điểm, chẳng hạn "có 4 cách lấy được điểm màu xanh thứ nhất; có 3 cách lấy được điểm màu xanh thứ 2" có tam giác được tính hai lần. Thật vậy: Gọi 4 điểm màu xanh là A, B, C, D. Lấy điểm thứ nhất là A, điểm thứ hai là B và lấy điểm màu đỏ M được tam giác ABM; Lấy điểm thứ nhất là B, lấy điểm thứ hai là A và lấy điểm màu đỏ là M được tam giác BAM khi đó hai tam giác ABM và BAM là một (*tam giác này được tính hai lần*)

Lời giải đúng.

Trường hợp 1: Lấy 2 điểm thuộc đường thẳng d_2, lấy 1 điểm thuộc đường thẳng d_1.

Lấy 2 điểm màu xanh thuộc đường thẳng d_2 có C_4^2 cách; lấy 1 điểm màu đỏ thuộc đường thẳng d_1 có 6 cách. Trường hợp này có $6C_4^2$ (tam giác)

Trường hợp 2: Lấy 2 điểm thuộc đường thẳng d_1, lấy 1 điểm thuộc đường thẳng d_2. Lấy 2 điểm màu đỏ thuộc đường thẳng d_1 có C_6^2 cách; lấy 1 điểm màu xanh thuộc đường thẳng d_2 có 4 cách. Trường hợp này có $4C_6^2$ (tam giác)

Do đó số phần tử không gian mẫu là:

$$n(\Omega)=6C_4^2+4C_6^2=96.$$

Gọi biến cố A: "*Chọn được tam giác có hai đỉnh màu đỏ*". Do đó số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $n(A)=4C_6^2=60$.

Xác suất cần tìm là: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{60}{96}=\frac{5}{8}$.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào phát hiện được sai lầm trong bài này.

KIHIVI

KẾT QUẢ NÀO ?



Đề bài. *Cho tập $A=\{1;2;3;4;5;...;100\}$. Chọn tùy ý một tập con gồm 3 phần tử của A sao cho tổng 3 phần tử đó bằng 91. Tính xác suất để chọn được tập con của A gồm 3 phần tử lập thành cấp số nhân có công bội là số nguyên dương.*

Sau đây là lời giải của bạn Giang:

Gọi M là biến cố cần tính xác suất. Ta thấy rằng, phương trình $a+b+c=91$ có C_{90}^2 nghiệm nguyên dương. Trong số các nghiệm nguyên dương $(a;b;c)$ đó, không có nghiệm nào thỏa mãn $a=b=c$.

Nếu $\begin{cases}a=b\neq c\\a+b+c=91\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\neq c\\2a+c=91\end{cases}$ thì có 45 cách chọn a (là số nguyên dương từ 1 đến 45) và mỗi cách chọn a có một cách chọn b và c. Do đó, trong số các nghiệm nguyên dương $(a;b;c)$ của phương trình $a+b+c=91$, có 45 nghiệm thỏa mãn $a=b\neq c$. Tương tự, cũng sẽ có 45 nghiệm thỏa mãn $a\neq b=c$, có 45 nghiệm thỏa mãn $b\neq a=c$. Từ đó suy ra số nghiệm nguyên dương $(a;b;c)$ của phương trình $a+b+c=91$ sao cho a,b,c đôi một phân biệt là $C_{90}^2-45\cdot3$. Vậy số phần tử không gian mẫu là $|\Omega|=C_{90}^2-45\cdot3=3870$.

(Xem tiếp trang 45)

Được quét bằng CamScanner

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 588 (6.2026)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
NGUYỄN TIẾN THANH
Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam
PHẠM VĨNH THÁI
Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD
LÊ HỒNG SƠN

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập: NGUYỄN HỮU BẮC ***Thư kí Tòa soạn:*** VÕ THỊ HỒNG THU

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* TRẦN HỮU NAM, *TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Dương Văn Sơn – Một số phương pháp giải phương trình bậc cao.

6 Hướng dẫn giải đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Bắc Giang, năm học 2025 – 2026.

9 Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên tỉnh Ninh Bình, năm học 2026 – 2027.

10 **Thử sức trước kỳ thi THPTQG 2026**
Hướng dẫn giải đề số 2.

15 **Diễn đàn dạy học Toán**
Phạm Duy Khánh, Nguyễn Thị Thùy Linh – Khai thác một tính chất của tứ diện vuông trong việc xây dựng bài tập bất đẳng thức hình học.

20 **Đề ra kỳ này** *Problems in This Issue*
T1/588, ..., T12/588, L1/588, L2/588.

22 **Giải bài kì trước**
Solutions to Previous Problems
T1/584, ..., T12/584, L1/584, L2/584

31 **Phương pháp giải toán**
Nguyễn Anh Vũ – Một số gợi ý xác định số hạng tổng quát của dãy số thường gặp để giải các bài toán liên quan.

43 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 129 – Bài dịch số 127.

44 **Nhiều cách giải cho một bài toán** – Giải bài toán 108 – Đề bài toán 110.

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay** – Giải bài toán 116. Đề bài toán 118.

47 **Sai lầm ở đâu?**

Biên tập: KIM THANH, NHƯ HOÀNG
Trị sự, phát hành: TRẦN THỊ MINH HIỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

Được quét bằng CamScanner

NXBGDVN TRIỂN KHAI TẬP HUẤN BỒI DƯỠNG GIÁO VIÊN SỬ DỤNG BỘ SÁCH GIÁO KHOA THỐNG NHẤT

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) tổ chức tập huấn sử dụng bộ sách giáo khoa thống nhất cho giáo viên và cán bộ quản lý giáo dục trên toàn quốc từ ngày 01/6/2026 đến ngày 24/7/2026 bằng cả hai hình thức trực tuyến và trực tiếp.

Nhằm triển khai hiệu quả việc sử dụng bộ sách giáo khoa (SGK) thống nhất theo chỉ đạo của Bộ Giáo dục và Đào tạo tại công văn số 8060/BGDĐT-GDTH ngày 31/12/2025 và công văn số 737/BGDĐT-GDTH ngày 11/02/2026, NXBGDVN triển khai tổ chức tập huấn, bồi dưỡng giáo viên và cán bộ quản lý giáo dục tại các địa phương trên cả nước; Đảm bảo đáp ứng nhu cầu tham gia tập huấn của giáo viên, cán bộ quản lý giáo dục.

Hoạt động tập huấn được triển khai trên cơ sở thực hiện các nhiệm vụ theo các văn bản chỉ đạo của Bộ Giáo dục và Đào tạo về nhu cầu bồi dưỡng giáo viên sử dụng SGK thống nhất, hướng tới mục tiêu hỗ trợ đội ngũ giáo viên tiếp cận đầy đủ nội dung, cấu trúc và định hướng triển khai các bộ sách trong quá trình dạy học.

Theo kế hoạch, chương trình tập huấn được tổ chức nhằm hỗ trợ giáo viên và cán bộ quản lý giáo dục nắm vững nội dung, phương pháp và định hướng sử dụng SGK thống nhất; Đảm bảo việc triển khai SGK tại các địa phương được đồng bộ, hiệu quả và phù hợp với yêu cầu đổi mới giáo dục; Tạo điều kiện để giáo viên trao đổi chuyên môn, tiếp cận trực tiếp với đội ngũ tác giả, chủ biên và giảng viên tập huấn; Đáp ứng nhu cầu bồi dưỡng chuyên môn cho giáo viên trên phạm vi toàn quốc, bảo đảm mọi đối tượng có nhu cầu đều có thể tham gia.

Chương trình tập huấn được tổ chức bằng cả hai hình thức trực tuyến và trực tiếp. Với hình thức tập huấn trực tuyến, NXBGDVN xây dựng kế hoạch tổ chức từ ngày 01/6/2026 đến ngày 24/7/2026 với thời lượng 1 ngày cho mỗi tên sách. Các buổi tập huấn được tổ chức theo khung giờ cố định: buổi sáng từ 8h00 đến 11h30, buổi chiều: từ 13h30 đến 17h00.

Từ lớp 1 đến lớp 12 sẽ có đầy đủ 152 tên SGK được tổ chức tập huấn trực tuyến trong 8 đợt, chia thành 2 vòng. Vòng 1 (Đợt 1 đến Đợt 4): tổ chức từ ngày 01/6/2026 đến ngày 26/6/2026; Vòng 2 (Đợt 5 đến Đợt 8): tổ chức từ ngày 29/6/2026 đến ngày 24/7/2026.

Việc tổ chức 2 vòng tập huấn sẽ giúp các địa phương linh hoạt lựa chọn thời gian phù hợp, đồng thời tạo điều kiện để giáo viên có thể tham gia đầy đủ theo nhu cầu thực tế một cách thuận lợi nhất. Trong mỗi đợt, NXBGDVN sẽ tổ chức đồng thời khoảng 8 - 9 phòng tập huấn trực tuyến, mỗi phòng dành riêng cho một tên SGK. Căn cứ vào lịch tập huấn chung, các địa phương chủ động phân công đối tượng tham gia và sắp xếp thời gian phù hợp.

Về hình thức tập huấn trực tiếp, căn cứ nhu cầu và đề xuất từ các địa phương, NXBGDVN sẽ có kế hoạch, hình thức tổ chức tập huấn riêng nhằm đáp ứng yêu cầu từ địa phương một cách có hiệu quả, thiết thực, tối ưu hóa nguồn lực và tránh lãng phí.

(Xem tiếp bìa 4)

Được quét bằng CamScanner

NXBGDVN TRIỂN KHAI TẬP HUẤN ...

(Tiếp theo bìa 3)

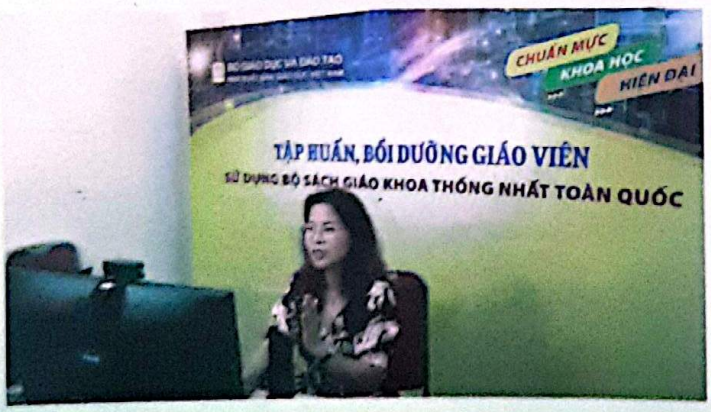
NXBGDVN cũng đã chuẩn bị đầy đủ, đa dạng nguồn tài liệu, dữ liệu phục vụ công tác bồi dưỡng gồm: Phiên bản điện tử SGK, SGV, VBT; Tài liệu bồi dưỡng GV sử dụng SGK; kế hoạch bài dạy các môn học... Tất cả các tài liệu, dữ liệu nêu trên được đăng tải miễn phí trên nền tảng *taphuan.nxbgd.vn* để cán bộ quản lý, giáo viên có thể chủ động tìm hiểu, nghiên cứu về SGK các môn học.

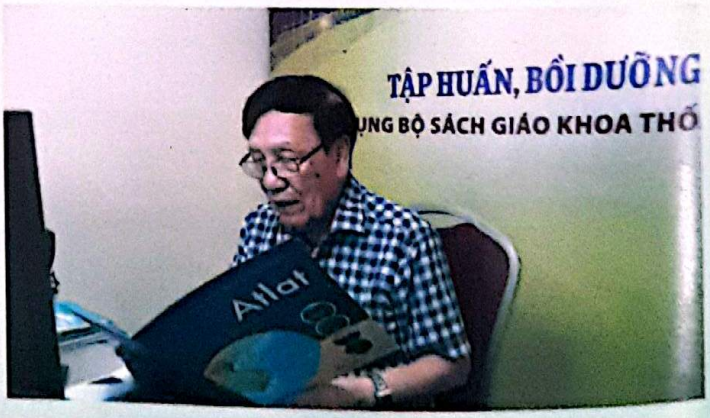
Thông qua chương trình tập huấn, NXBGDVN mong muốn góp phần nâng cao chất lượng triển khai chương trình giáo dục phổ thông, đồng thời hỗ trợ giáo viên chủ động hơn trong quá trình tổ chức dạy học và sử dụng SGK tại cơ sở.

Một số hình ảnh tại chương trình tập huấn









Ảnh: Công Duy

BAN TRUYỀN THÔNG VÀ ĐỐI NGOẠI
(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)

Để hỗ trợ giáo viên, cán bộ quản lý trong thời gian tập huấn, NXBGDVN có bộ phận hỗ trợ kỹ thuật nền tảng Tập huấn.
- Thông tin liên hệ: 0911008610 - 0911039073 (thời gian từ 08:00 - 17:00 từ thứ Hai đến thứ Sáu)
- Email: taphuan@nxbgd.vn

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT6M26
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2026
Giá: 22.000 đồng
Hai mươi hai nghìn đồng

Được quét bằng CamScanner