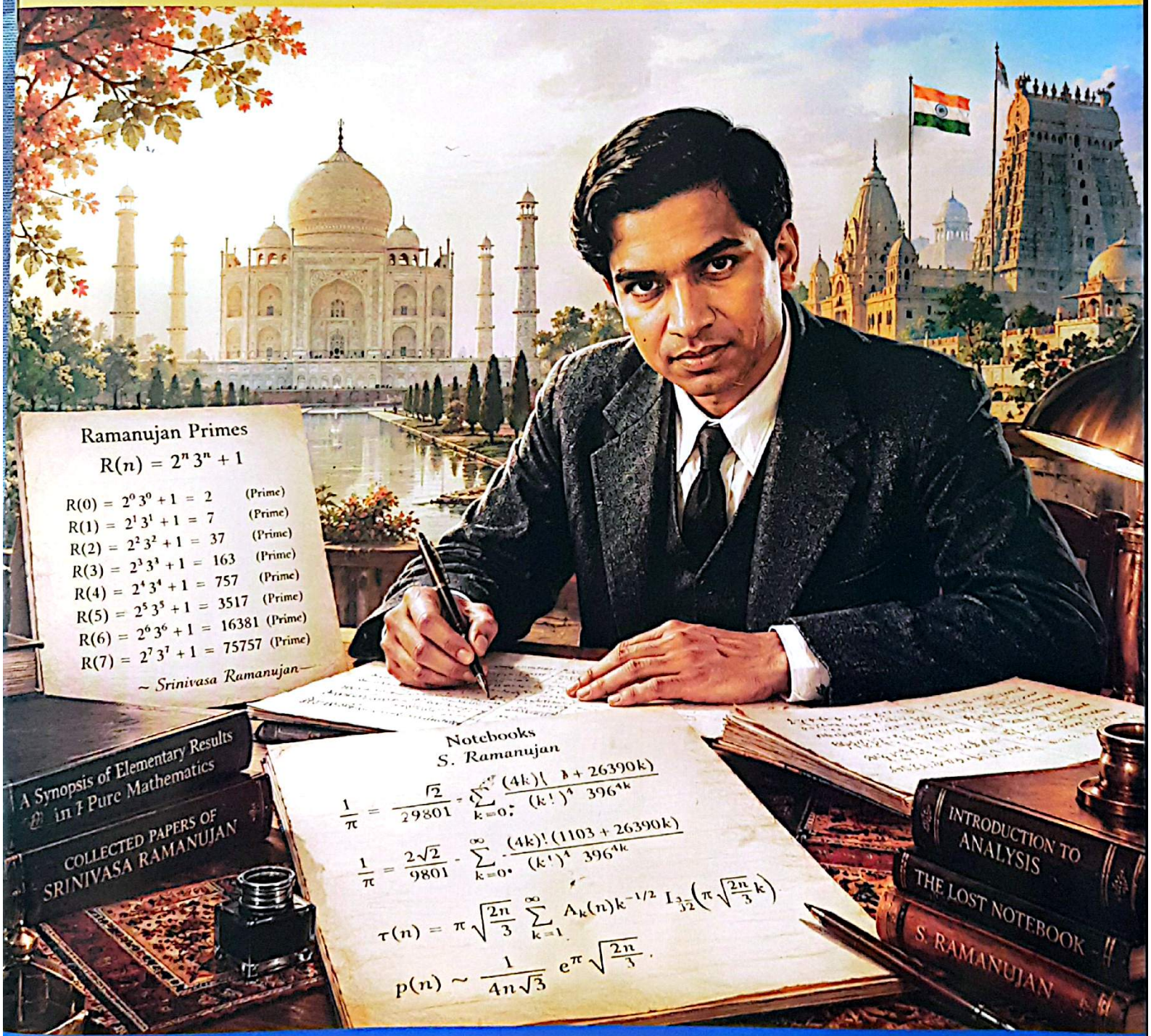
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

TẠP CHÍ Toán học & Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG

Số 589
Tháng 7 - 2026
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 63 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com



Nhà toán học Ấn Độ **Srinivasa Ramanujan** (1887 – 1920)

Được quét bằng CamScanner

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HỘI NHÀ VĂN VIỆT NAM

Cuộc thi viết về

Trang sách & Mái trường

Mỗi trang sách mở ra một chân trời,
mỗi mái trường lưu giữ một miền ki ức!

Đối tượng tham gia:

Tất cả người Việt Nam ở trong và ngoài nước, không giới hạn độ tuổi, nghề nghiệp

Thời gian nhận tác phẩm dự thi:

Từ ngày **09/6/2026** đến **30/4/2027**

Email:

trangsachmaitruong@nxbgd.vn

Cơ cấu giải thưởng:

Giải nhất Truyện ngắn: 50 triệu đồng	Giải nhất Thơ: 50 triệu đồng	Giải nhất Tản văn: 50 triệu đồng

Giải Đặc biệt 100 triệu đồng

Dành cho tác phẩm / cụm tác phẩm đặc biệt xuất sắc (nếu có) thuộc một trong ba thể loại nêu trên

Ngoài ra còn có:

Giải Nhì | Giải Ba | Giải Khuyến khích | Giải chuyên đề / tác giả trẻ

Quét để xem bản chi tiết Thể lệ cuộc thi

Được quét bằng CamScanner



SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA SỐ DƯ ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

NGUYỄN ANH TUẤN
(GV THCS Hoà Hiếu 2, Thái Hoà, Nghệ An)
NGUYỄN CÔNG LỢI
(GV THCS Thị trấn Hoà Hợp, Quỳ Hợp, Nghệ An)

Các dạng toán liên quan đến số chính phương thường xuất hiện trong các bài kiểm tra giữa kì, cuối kì hay trong các đề thi chọn học sinh giỏi, đề thi vào lớp 10 THPT Chuyên ở mức độ vận dụng cao. Với mục đích giúp cho các em học sinh (đặc biệt là đối tượng học sinh lớp 6, 7) dễ dàng hơn khi tiếp cận với dạng toán này, chúng tôi xin trình bày một số thi dụ áp dụng tính chất của số dư để giải một số bài toán liên quan đến số chính phương.

Trước hết, chúng ta nhắc lại một số tính chất cơ bản sau đây:

1) Số chính phương chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1.

2) Số chính phương chia cho 4 chỉ dư 0 hoặc 1.

3) Số chính phương khi chia cho 5 chỉ dư 0 hoặc 1 hoặc 4.

4) Số chính phương chia cho 8 chỉ dư 0 hoặc 1 hoặc 4.

Chúng ta cùng xét một số thí dụ sau:

Thí dụ 1. *Tìm các số nguyên tố x, y thoả mãn:*

a) $x^2-5y^2=4$; b) $17x^2+89=2y^2$.

Lời giải. a) Ta có x^2 là số chính phương, mà số chính phương chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1 nên ta xét hai trường hợp sau:

• TH1: x^2 chia cho 3 dư 0 hay $x^2 \vdots 3$, mà 3 là số nguyên tố nên $x \vdots 3 \Rightarrow x=3$ (do x là số nguyên tố). Thay $x=3$ vào đẳng thức $x^2-5y^2=4$ ta thu được $y^2=1$ (loại, vì y là số nguyên tố).

• TH2: x^2 chia cho 3 dư $1 \Rightarrow x^2=3k+1, k \in \mathbb{N}^*$. Thay $x^2=3k+1$ vào đẳng thức $x^2-5y^2=4$ ta thu được $3k+1-5y^2=4 \Rightarrow 5y^2=3k-3 \vdots 3$, mà $(3,5)=1$ nên $y^2 \vdots 3 \Rightarrow y \vdots 3 \Rightarrow y=3$ (do y là số nguyên tố). Thay $y=3$ vào đẳng thức $x^2-5y^2=4$ ta thu được $x^2=49$ hay $x=7$.

Vậy $x=7$ và $y=3$.

b) *Cách 1.* Ta có x^2 là số chính phương, mà số chính phương chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1 nên ta xét hai trường hợp sau:

• TH1: x^2 chia cho 3 dư 0 hay $x^2 \vdots 3$, mà 3 là số nguyên tố nên $x \vdots 3 \Rightarrow x=3$ (do x là số nguyên tố). Thay $x=3$ vào đẳng thức $17x^2+89=2y^2$ ta thu được $y^2=121 \Rightarrow y=11$.

• TH2: x^2 chia cho 3 dư $1 \Rightarrow x^2=3k+1, k \in \mathbb{N}^*$. Thay $x^2=3k+1$ vào đẳng thức $17x^2+89=2y^2$ ta thu được: $17(3k+1)+89=2y^2$ $\Rightarrow 2y^2=51k+106$ chia cho 3 dư 1 (mâu thuẫn, vì y^2 là số chính phương chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1 nên $2y^2$ chia cho 3 dư 0 hoặc 2).

Vậy $x=3$ và $y=11$.

Cách 2. Ta có y^2 là số chính phương, mà số chính phương chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1 nên ta xét hai trường hợp sau:

• TH1: y^2 chia cho 3 dư 0 hay $y^2 \vdots 3$, mà 3 là số nguyên tố nên $y \vdots 3 \Rightarrow y=3$ (do y là số nguyên tố). Thay $y=3$ vào đẳng thức $17x^2+89=2y^2$ ta thu được $17x^2=-71$ (loại).

• TH2: y^2 chia cho 3 dư $1 \Rightarrow y^2=3k+1, k \in \mathbb{N}^*$. Thay $y^2=3k+1$ vào đẳng thức $17x^2+89=2y^2$ ta thu được: $17x^2+89=2(3k+1)$

$\Rightarrow 17x^2=6k-87 \vdots 3$ mà $(17,3)=1$ nên $x^2 \vdots 3$, mà 3 là số nguyên tố nên $x \vdots 3 \Rightarrow x=3$ (do x là

Được quét bằng CamScanner

số nguyên tố). Thay $x=3$ vào đẳng thức $17x^2+89=2y^2$ ta thu được $y^2=121\Rightarrow y=11$.

Vậy $x=3$ và $y=11$.

Nhận xét. Ở câu b) nếu xét hai trường hợp của y^2 thì giải dễ dàng hơn. Còn nếu xét hai trường hợp của x^2 sẽ gặp khó khăn ở chỗ:

"$2y^2=51k+106$ chia cho 3 dư 1".

Vì thực tế nhiều học sinh giải đến đây không nhận thấy kết quả "$2y^2$ chia cho 3 dư 0 hoặc 2".

Thí dụ 2. *Tìm hai số nguyên tố p, q sao cho:*

a) $8q+1=p^2$; b) $17q-1=2p^2$; c) $q^2-2p^2=1$.

Lời giải. a) Ta có p^2 là số chính phương khi chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1 nên ta xét hai trường hợp sau:

• TH1: p^2 chia cho 3 dư 0 hay $p^2\vdots 3$, mà 3 là số nguyên tố nên $p\vdots 3\Rightarrow p=3$ (do p là số nguyên tố). Thay $p=3$ vào đẳng thức $8q+1=p^2$ ta thu được $q=1$ (loại, vì q là số nguyên tố).

• TH2: p^2 chia cho 3 dư $1\Rightarrow p^2=3k+1,\ k\in\mathbb{N}^*$. Thay $p^2=3k+1$ vào đẳng thức $8q+1=p^2$ ta thu được $8q=3k\vdots 3$, mà $(3,8)=1$ nên $q\vdots 3\Rightarrow q=3$ (do q là số nguyên tố). Thay $q=3$ vào đẳng thức $8q+1=p^2$ ta thu được $p^2=25\Rightarrow p=5$.

Vậy $q=3$ và $p=5$.

b) Ta có p^2 là số chính phương khi chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1 nên ta xét hai trường hợp sau:

• TH1: p^2 chia cho 3 dư 0 hay $p^2\vdots 3$, mà 3 là số nguyên tố nên $p\vdots 3\Rightarrow p=3$ (do p là số nguyên tố). Thay $p=3$ vào đẳng thức $17q-1=2p^2$ ta thu được $17q=19$ (loại, vì q là số nguyên tố).

• TH2: p^2 chia cho 3 dư $1\Rightarrow p^2=3k+1,\ k\in\mathbb{N}^*$. Thay $p^2=3k+1$ vào $17q-1=2p^2$ ta thu được $17q=6k+3\vdots 3$, mà $(3,17)=1$ nên $q\vdots 3\Rightarrow q=3$ (do q là số nguyên tố). Thay $q=3$ vào đẳng thức $17q-1=2p^2$ ta thu được $p^2=25$ hay $p=5$.

Vậy $q=3$ và $p=5$.

c) Ta có p^2 là số chính phương khi chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1 nên ta xét hai trường hợp sau:

• TH1: p^2 chia cho 3 dư 0 hay $p^2\vdots 3$, mà 3 là số nguyên tố nên $p\vdots 3\Rightarrow p=3$ (do p là số nguyên tố). Thay $p=3$ vào đẳng thức $q^2-2p^2=1$ ta thu được $q^2=19$ (loại).

• TH2: p^2 chia cho 3 dư $1\Rightarrow p^2=3k+1,\ k\in\mathbb{N}^*$. Thay $p^2=3k+1$ vào đẳng thức $q^2-2p^2=1$ ta thu được $q^2=6k+3\vdots 3$ mà 3 là số nguyên tố nên $q\vdots 3\Rightarrow q=3$ (do q là số nguyên tố). Thay $q=3$ vào đẳng thức $q^2-2p^2=1$ ta thu được $p^2=4\Rightarrow p=2$.

Vậy $q=3$ và $p=2$.

Thí dụ 3. *Tìm 3 số nguyên tố p, q, r sao cho:*

$$p^q+q^p=r.$$

Lời giải. Vì $p^q+q^p>2\Rightarrow r>2$, r là số nguyên tố lẻ nên trong hai số p^q, q^p có 1 số lẻ và 1 số chẵn. Giả sử p^q là số chẵn $\Rightarrow p$ chẵn $\Rightarrow p=2$ (vì p là số nguyên tố $)\Rightarrow 2^q+q^2=r$.

• Nếu $q=3$ thì ta có $r=2^3+3^2=17$ (thoả mãn).

• Nếu $q>3\Rightarrow q\not\vdots 3$ (do q là số nguyên tố) thì q^2 chia cho 3 dư 1.

Mặt khác q là số lẻ nên $2^q=2^{2k+1}=2.(2^k)^2$ $(k\in\mathbb{N}^*)$, vì $2^k\not\vdots 3\Rightarrow(2^k)^2$ chia cho 3 dư 1 hay $2.(2^k)^2$ chia cho 3 dư 2. Từ đó suy ra $r=2^q+q^2\vdots 3$, mà $r>3$ nên r là hợp số (loại).

Vậy $(p,q,r)\in\{(2,3,17);(3,2,17)\}$.

Thí dụ 4. (Trích đề kiểm tra học kì I Toán 6 năm 2022-2023, trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam). *Tìm ba số nguyên tố có tổng các bình phương của chúng bằng 5070.*

Được quét bằng CamScanner

Lời giải. Nếu 3 số cần tìm đều là số lẻ thì tổng bình phương của chúng là 1 số lẻ trong khi 5070 là số chẵn (không thoả mãn). Vậy 3 số phải có ít nhất 1 số là số chẵn, hay ít nhất 1 trong 3 số bằng 2. Gọi 2 số còn lại lần lượt là p và q, ta có:

$$2^2 + p^2 + q^2 = 5070 \Rightarrow p^2 + q^2 = 5066.$$

Một số chính phương chia 5 chỉ có các số dư 0, 1, 4 nên nếu p và q đều không chia hết cho 5 thì $p^2 + q^2$ chia 5 chỉ có các số dư 0, 2, 3 trong khi 5066 chia 5 dư 1 (không thoả mãn).

Vậy phải có 1 số p hoặc q chia hết cho 5. Giả sử $p \vdots 5 \Rightarrow p = 5$ (vì p là số nguyên tố), khi đó ta có $5^2 + q^2 = 5066 \Rightarrow q^2 = 5041 = 71^2 \Rightarrow q = 71$.

Vậy ba số nguyên tố cần tìm là 2; 5; 71.

Thí dụ 5. *Chứng minh rằng không tồn tại bốn số nguyên tố a, b, c, d thoả mãn $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$.*

Lời giải. Từ giả thiết $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$ suy ra $a > 2$ nên a là số lẻ, do đó tổng $b^2 + c^2 + d^2$ lẻ nên có hai trường hợp xảy ra:

• TH1: b, c, d đều là số lẻ $\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + d^2$ chia cho 4 dư 3 (loại, vì a^2 chia cho 4 dư 1).

• TH2: Trong ba số b, c, d có hai số chẵn và có một số lẻ, giả sử $b = c = 2 \Rightarrow a^2 = 8 + d^2$.

+ Nếu $d = 3$ thì $a^2 = 8 + 3^2 = 17$ (loại).

+ Nếu $d > 3 \Rightarrow d^2$ chia cho 3 dư 1 hay $a^2 = 8 + d^2 \vdots 3 \Rightarrow a \vdots 3$ (vì 3 là số nguyên tố) nên $a = 3$. Khi đó ta có $d^2 = a^2 - 8 = 3^2 - 8 = 1$ (loại).

Vậy không tồn tại bốn số nguyên tố a, b, c, d thoả mãn $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$.

Thí dụ 6. *Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $(p^2 - 1) \vdots 24$.*

Lời giải. Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p \not\vdots 3 \Rightarrow p^2$ chia cho 3 dư 1 $\Rightarrow (p^2 - 1) \vdots 3$ (1).

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ, do đó p^2 chia cho 8 dư 1 $\Rightarrow (p^2 - 1) \vdots 8$ (2).

Từ (1), (2) và $(3,8) = 1$ suy ra:

$$(p^2 - 1) \vdots (3.8) = 24.$$

Thí dụ 7. *Cho n là số nguyên dương sao cho $2n + 1$ và $3n + 1$ là các số chính phương. Chứng minh rằng n chia hết cho 40.*

Lời giải. Do $2n + 1$ và $3n + 1$ là các số chính phương nên tồn tại các số nguyên dương x và y thoả mãn $2n + 1 = x^2$ và $3n + 1 = y^2$.

Vì $2n + 1 = x^2$ là số chính phương lẻ, x^2 chia cho 8 dư $1 \Rightarrow 2n \vdots 8 \Rightarrow n \vdots 4 \Rightarrow y^2 = 3n + 1$ là số chính phương lẻ chia cho 8 dư $1 \Rightarrow 3n \vdots 8 \Rightarrow n \vdots 8$ (1).

Mặt khác $x^2 + y^2 = 5n + 2$ chia cho 5 dư 2 nên x^2 và y^2 chia cho 5 đều dư 1. Suy ra $2n + 1 = x^2$ chia cho 5 dư $1 \Rightarrow 2n \vdots 5 \Rightarrow n \vdots 5$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $n \vdots 40$.

Thí dụ 8. *Tìm các số nguyên tố p, q thoả mãn $p + q$, $p + q^2$, $p + q^3$, $p + q^4$ là các số nguyên tố.*

Lời giải. Dễ thấy nếu p và q cùng là số nguyên tố lẻ, khi đó $p + q$ là số chẵn lớn hơn 2 (vô lí). Do đó một trong hai số nguyên tố p và q phải có một số là 2. Ta xét hai trường hợp sau đây:

• TH1: Nếu $p = 2$, khi đó ta có $q^2 + 2$ là số nguyên tố và $q \geq 3$.

Để ý là q^2 chia 3 có số dư 0 hoặc 1, từ đó $q^2 + 2$ chia 3 có số dư 2 hoặc 0. Do $q^2 + 2$ là số nguyên tố nên bắt buộc ta phải có $q^2 + 2$ chia 3 có số dư 2, từ đó ta được $q \vdots 3$ nên $q = 3$.

• TH2: Nếu $q = 2$, khi đó ta cần tìm số nguyên tố p để $p + 2$, $p + 4$, $p + 8$, $p + 16$ là các số nguyên tố. Xét các khả năng $p = 3$, $p = 3k + 1$; $p = 3k + 2$ với $k \in \mathbb{N}^*$ ta được $p = 3$ thoả mãn.

Vậy $(p; q) = (2; 3)$ và $(p; q) = (3; 2)$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Thí dụ 9. *Tìm tất cả các số nguyên tố p thoả mãn $A = 2p^4 - p^2 + 16$ là số chính phương.*

Lời giải. Vì p^2, p^4 là các số chính phương nên chia 3 có số dư là 0 hoặc 1. Ta xét hai TH sau:

Được quét bằng CamScanner

• TH1: p^2 và p^4 chia cho 3 có cùng số dư là 0 $\Rightarrow p=3$ (vì p là số nguyên tố). Khi đó ta có $A=2.3^4-3^2+16=169=13^2$ là số chính phương (thoả mãn).

• TH2: Với $p\neq 3$, khi đó ta có p^2 và p^4 chia 3 cùng có số dư là 1.

Do vậy $A=2p^4-p^2+16$ chia 3 có số dư là 2, điều này mâu thuẫn với số chính phương khi chia cho 3 thì có số dư là 0 hoặc 1.

Vậy $p=3$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Thí dụ 10. *Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p;q)$ thoả mãn p^2-q^2-1 là một số chính phương.*

Lời giải. Giả sử $p^2-q^2-1=a^2$ với a là một số tự nhiên. Khi đó ta có $p^2-q^2=a^2+1$ nên $p>q$. Ta xét các trường hợp sau:

• TH1: Với $q=2$. Khi đó $p^2-4=a^2+1$, suy ra $a^2=p^2-5$, ta xét hai khả năng sau:

+ Nếu p^2 chia cho 3 dư 0 $\Rightarrow p=3$ (vì p là số nguyên tố). Khi đó ta có $a^2=3^2-5=2^2$ (thoả mãn).

+ Nếu p^2 chia cho 3 dư 1, khi đó $a^2=(3k+1)-5=(3k-6)+2$ với $k\in\mathbb{N}^*$ (loại, vì số chính phương chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1).

• TH2: Với $q=3$. Khi đó $p^2-9=a^2+1$ $\Rightarrow a^2=p^2-10$, ta xét hai khả năng sau:

+ Nếu p^2 chia cho 4 dư 0 $\Rightarrow p=2$ (vì p là số nguyên tố). Khi đó ta có $a^2=2^2-5=-1$ (loại).

+ Nếu p^2 chia cho 4 dư 1, khi đó $a^2=(4k+1)-10=(4k-12)+3$ với $k\in\mathbb{N}^*$ (loại, vì số chính phương chia cho 4 chỉ dư 0 hoặc 1).

• TH3: Với $p>3$. Khi đó $p>q>3$ nên p^2 và q^2 chia 3 có cùng số dư là 1. Suy ra p^2-q^2 chia hết cho 3, thế thì a^2+1 chia hết cho 3, điều này dẫn đến a^2 chia 3 có số dư là 2, vô lí vì số chính phương chia cho 3 chỉ nhận số dư là 0 hoặc 1.

Vậy các số nguyên tố thoả mãn bài toán là $(p;q)=(3;2)$.

Thí dụ 11. *Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $A=2^p+7p^2$ cũng là số nguyên tố.*

Lời giải. Ta xét các trường hợp sau:

• TH1: Xét $p=2$, khi đó ta được:

$A=2^p+7p^2=2^2+7.2^2=32$ là hợp số (loại).

• TH2: Xét $p=3$, khi đó ta được:

$A=2^p+7p^2=2^3+7.3^2=71$ là số nguyên tố.

• TH3: Xét $p>3$, khi đó p không chia hết cho 3 và p là số lẻ.

Ta có $2^p=2^{2k+1}=2.2^{2k}=2.(2^k)^2$, mà $2^k \not\vdots 3$ nên $(2^k)^2$ chia cho 3 dư 1 nên 2^p chia cho 3 dư 2.

Mặt khác do p không chia hết cho 3 nên p^2 chia cho 3 có số dư là 1. Đến đây ta có $A=2^p+7p^2$ chia hết cho 3 nên A là hợp số. Do đó các số nguyên tố $p>3$ không thoả mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $p=3$ là số nguyên tố cần tìm.

Thí dụ 12. *Tìm tất cả các số nguyên tố p, q, r, s sao cho p^s+s^q, q^s+s^r, r^s+s^p đều là các số nguyên tố.*

Lời giải. Dễ thấy p^s+s^q, q^s+s^r, r^s+s^p là các số nguyên tố lẻ. Ta xét các trường hợp sau:

• TH1: Với s là số nguyên tố lẻ, khi đó ta có: $p=q=r=2$. Do s là số lẻ nên dễ thấy 2^s chia cho 3 dư 2. Lại thấy s^2 chia cho 3 có số dư là 0 hoặc 1. Thế thì 2^s+s^2 chia cho 3 có số dư là 2 hoặc 0, do đó để 2^s+s^2 là số nguyên tố thì bắt buộc s^2 chia cho 3 dư 0, từ đó ta được $s=3$. Kiểm tra lại ta thấy bộ số $(p;q;r;s)=(2;2;2;3)$ thoả mãn.

• TH2: Với s là số nguyên tố chẵn, khi đó $s=2$. Suy ra p,q,r là số nguyên tố lẻ. Do q là số lẻ nên 2^q chia cho 3 dư 2. Lại thấy p^2 chia cho 3

Được quét bằng CamScanner

có số dư là 0 hoặc 1. Thế thì p^2+2^q chia cho 3 có số dư là 2 hoặc 0, do đó để p^2+2^q là số nguyên tố thì bắt buộc p^2 chia cho 3 có số dư là 0, từ đó ta được $p=3$.

Lập luận tương tự tìm được $q=r=3$. Kiểm tra lại ta thấy bộ số $(p;q;r;s)=(3;3;3;2)$ thoả mãn.

Vậy các bộ số $(p;q;r;s)=(2;2;2;3)$ và $(p;q;r;s)=(3;3;3;2)$ thoả mãn bài toán.

Thí dụ 13. *Tìm tất cả các số nguyên x, y không âm thoả mãn $A=2^x+5^y+2$ là một số chính phương.*

Lời giải. Ta xét các trường hợp sau:

• TH1: Với $x=0$, khi đó ta có $A=5^y+3$ là một số chính phương. Để ý rằng với $y\geq 1$ thì ta có $A=5^y+3$ chia cho 5 có số dư là 3, điều này mâu thuẫn với số chính phương khi chia cho 5 chỉ có một trong các số dư là 0; 1; 4. Do vậy $y=0$ và lúc này $A=4=2^2$ là số chính phương.

• TH2: Với $x=1$, khi đó ta có $A=5^y+4$ là một số chính phương. Đặt $5^y+4=k^2$ với $k\in\mathbb{N}^*$. Ta có: $5^y=k^2-4=k^2-2k+2k-4$

$$=k(k-2)+2(k-2)=(k-2)(k+2).$$

Do 5 là số nguyên tố nên $k-2;\ k+2$ là các luỹ thừa của 5. Đặt $k-2=5^a;\ k+2=5^b$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$ và $a<b;\ a+b=y$. Từ đó ta được $5^b-5^a=4$ hay $5^a\left(5^{b-a}-1\right)=4$. Như vậy buộc phải có $5^a=1;\ 5^{a-b}-1=4$ nên $a=0;b=1$. Do vậy $y=1$ và lúc này $A=9=3^2$ là một số chính phương.

• TH3: Với $x\geq 2$, ta có:

$$A=2^x+5^y+2=4.2^{x-2}+(4+1)^y+2$$

chia cho 4 có số dư là 3, điều này mâu thuẫn với số chính phương chia cho 4 có số dư là 0 hoặc 1.

Vậy các số $(x;y)\in\{(0;0);(1;1)\}$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Thí dụ 14. *Giả sử tồn tại các số nguyên thoả mãn x^2-4y và x^2+4y đều là số chính phương. Chứng minh rằng y chia hết cho 6.*

Lời giải. Ta chia bài toán thành các bước như sau:

• Chứng minh y chia hết cho 2.

Giả sử y là một số nguyên lẻ, khi đó dễ thấy $4y$ chia cho 8 có số dư là 4. Ta có số chính phương x^2 khi chia cho 8 có một trong các số dư 0; 1; 4.

Từ đó x^2+4y chia cho 8 có một trong các số dư là $0;4;5$. Mà x^2+4y là số chính phương nên x^2+4y chia cho 8 không có số dư là 5, điều này bắt buộc x phải là một số chẵn.

Đặt $x=2k$ với $k\in\mathbb{Z}$. Ta có $x^2-4y=4(k^2-y)$ và $x^2+4y=4(k^2+y)$ đều là các số chính phương, nên k^2-y và k^2+y cũng là các số chính phương. Ta có bảng xét số dư khi chia cho 4 như sau:

k^2	0	1	0	1
y	1	1	3	3
k^2-y	3	0	1	2
k^2+y	1	2	3	0

Từ bảng xét số dư trên cho thấy trong cả bốn trường hợp luôn có kết quả k^2-y hoặc k^2+y chia cho 4 nhận số dư là 2 hoặc 3, điều này mâu thuẫn với giả thiết số chính phương khi chia cho 4 có một trong các số dư 0 và 1. Do vậy, y chia hết cho 2.

• Chứng minh y chia hết cho 3.

Giả sử y không chia hết cho 3, điều này có nghĩa là y chia cho 3 nhận một trong hai số dư 1 và 2. Ta có bảng xét số dư khi chia cho 3 như sau:

x^2	0	1	0	1
y	1	1	2	2
x^2-4y	2	0	1	2
x^2+4y	1	2	2	0

Từ bảng xét số dư trên cho thấy, trong cả bốn trường hợp luôn có kết quả x^2-4y hoặc x^2+4y chia cho 3 nhận số dư là 2, điều này mâu thuẫn với số chính phương khi chia cho 3 chỉ có số dư 0 và 1. Do vậy, y chia hết cho 3.

Được quét bằng CamScanner

Mà ta có $(2,3)=1$ nên y chia hết cho 6. Vậy bài toán được chứng minh hoàn tất.

Thí dụ 15. *Tìm các số nguyên dương n sao cho số $S_n = 1.2.3...7 + n(n+1)...(n+7)$ có thể viết dưới dạng tổng các bình phương của hai số nguyên dương.*

Lời giải. Giả sử tồn tại số nguyên dương n để $S_n = a^2 + b^2$ với a và b là các số nguyên dương.

Dễ thấy $n(n+1)...(n+7) \vdots 64$ và $1.2.3...7 \vdots 4$ nên $S_n \vdots 4$.

Ta có a^2, b^2 khi chia cho 4 nhận một trong các số dư 0, 1. Để $S_n = a^2 + b^2$ buộc phải có a và b là các số chẵn. Đặt $a = 2a_1; b = 2b_1$ với a_1, b_1 là các số nguyên dương. Khi đó, tồn tại số nguyên dương k để $n(n+1)...(n+7) = 64k$.

Từ đó dẫn đến $a_1^2 + b_1^2 = 2.3.5.6.7 + 16k$ chia hết cho 4. Do đó a_1, b_1 cũng là các số chẵn

Đặt $a_1 = 2a_2; b_1 = 2b_2$ với a_2, b_2 là các số nguyên dương. Tiếp tục thay vào

$$a_1^2 + b_1^2 = 2.3.5.6.7 + 16k$$

ta lại có $a_2^2 + b_2^2 = 9.5.7 + 4k$ chia cho 4 có số dư là 3, điều này vô lí vì $a_2^2 + b_2^2$ chia cho 4 nhận một trong các số dư 0; 1; 2.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n thoả mãn yêu cầu bài toán.

Thí dụ 16. *Tồn tại hay không các số nguyên x, y, z thoả mãn $z^2 = (x^2-1)(y^2-1) + 2026$?*

Lời giải. Do một số chính phương khi chia cho 8 thì nhận một trong các số dư là 0; 1; 4. Do đó $x^2; y^2$ khi chia cho 8 thì nhận một trong các số dư là 0; 1; 4, dẫn đến $x^2 - 1; y^2 - 1$ khi chia cho 8 thì nhận một trong các số dư là -1; 0; 3.

Như vậy $(x^2-1)(y^2-1)$ khi chia cho 8 thì nhận một trong các số dư là 1; 0; 5.

Mặt khác dễ thấy 2026 chia cho 8 có số dư là 2.

Do vậy $(x^2-1)(y^2-1) + 2026$ chia cho 8 sẽ nhận một trong các số dư 3; 2; 7.

Trong khi đó z^2 chia cho 8 nhận một trong các số dư là 0; 1; 4, do đó mâu thuẫn.

Vậy không tồn tại các số nguyên $x; y; z$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Thí dụ 17. *Tồn tại hay không các số nguyên thoả mãn dãy đẳng thức sau?*

$$x^2 + y^2 = (x+1)^2 + u^2 = (x+2)^2 + v^2 = (x+3)^2 + t^2.$$

Lời giải. Giả sử tồn tại các số nguyên $(x_0; y_0; u_0; v_0; t_0)$ thoả mãn dãy đẳng thức trên.

Điều này có nghĩa là: $x_0^2 + y_0^2 = (x_0+1)^2 + u_0^2$

$$= (x_0+2)^2 + v_0^2 = (x_0+3)^2 + t_0^2.$$

Với mọi a là số nguyên thì ta có a^2 chia cho 8 có số dư thuộc $\{0; 1; 4\}$. Xét các trường hợp sau:

• Nếu $x_0 \vdots 4$ thì $x_0^2 + y_0^2$ chia cho 8 có số dư thuộc $\{0; 1; 4\}$. Khi đó ta có:

+ $x_0 + 1$ chia 8 có số dư là 1 nên $(x_0+1)^2 + u_0^2$ chia cho 8 có số dư thuộc $\{1; 2; 5\}$.

+ $x_0 + 2$ chia 8 có số dư là 2 nên $(x_0+2)^2 + v_0^2$ chia cho 8 có số dư thuộc $\{0; 4; 5\}$.

+ $x_0 + 3$ chia 8 có số dư là 3 nên $(x_0+3)^2 + t_0^2$ chia cho 8 có số dư thuộc $\{1; 2; 5\}$.

Từ các tập hợp số dư trên cho thấy $x_0^2 + y_0^2$; $(x_0+1)^2 + u_0^2$; $(x_0+2)^2 + v_0^2$; $(x_0+3)^2 + t_0^2$ không thể có cùng số dư khi chia cho 8.

Vậy trường hợp này không tồn tại các số nguyên $(x_0; y_0; u_0; v_0; t_0)$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

• Các trường hợp x chia cho 4 có số dư thuộc $\{1; 2; 3\}$ ta lập luận hoàn toàn tương tự và đều cho kết quả kết quả là không tồn tại các số nguyên $(x_0; y_0; u_0; v_0; t_0)$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Vậy không tồn tại các số nguyên $(x; y; u; v; t)$ thoả mãn bài toán.

Thí dụ 18. *Tìm tất cả các số tự nhiên n để $2^n + 15$ là số chính phương.*

Được quét bằng CamScanner

Lời giải. Do 2^n+15 là số chính phương nên tồn tại số nguyên dương k để $2^n+15=k^2$.

Để ý rằng 2^n không chia hết cho 3 nên suy ra 2^n+15 không chia hết cho 3. Suy ra k^2 không chia hết cho 3 hay k^2 chia cho 3 có số dư là 1.

Như vậy, từ $2^n+15=k^2$ ta được 2^n chia cho 3 có số dư là 1 nên n là số tự nhiên chẵn.

+ Nếu $n=0$, ta có $2^n+15=16=4^2$ là số chính phương (thoả mãn).

+ Nếu $n\geq 2$, khi đó ta có $2^n \vdots 4$ nên 2^n+15 chia cho 4 có số dư là 3. Từ đó suy ra k^2 chia cho 4 có số dư là 3, điều này mâu thuẫn với số chính phương chia cho 4 có số dư là 0, 1.

Vậy số tự nhiên thoả nãn yêu cầu bài toán là $n=0$.

Thí dụ 19. *Chứng minh rằng với m là một số nguyên thì ít nhất một trong các biểu thức $2m-1$; $5m-1$; $13m-1$ không phải là số chính phương.*

Lời giải. Giả sử cả ba số $2m-1; 5m-1; 13m-1$ đều là số chính phương. Khi đó, tồn tại các số nguyên dương a, b, c thoả mãn $2m-1=a^2$; $5m-1=b^2$; $13m-1=c^2$. Suy ra:

$$a^2+b^2+c^2=(2m-1)+(5m-1)+(13m-1)$$
$$=20m-3.$$

Dễ thấy $20m-3=5(4m-1)+2$ chia 5 có số dư là 2. Do đó $a^2+b^2+c^2$ chia 5 có số dư là 2. Mà ta biết rằng a^2,b^2,c^2 khi chia cho 5 nhận một trong các số dư 0; 1; 4. Kết hợp với $a^2+b^2+c^2$ chia 5 có số dư là 2 nên bộ ba số a^2,b^2,c^2 khi chia cho 5 có các số dư thuộc tập hợp $\{0;1\}$. Tuy nhiên $5m-1=(5m-5)+4$ chia 5 có số dư là 4, do đó ta có mâu thuẫn.

Vậy ít nhất một trong các biểu thức $2m-1$; $5m-1$; $13m-1$ không phải số chính phương.

Thí dụ 20 (Trích đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9, tỉnh Bắc Giang, năm học 2015-2016). *Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x;y)$ sao cho*

$$5^x+12^x=y^2.$$

Lời giải. Dễ thấy $x=1$ không thoả mãn yêu cầu bài toán, do đó ta xét $x\geq 2$.

Từ đẳng thức của bài toán ta có y là số lẻ, do đó y^2 chia cho 8 có số dư là 1.

Mặt khác với $x\geq 2$ thì $12^x \vdots 8$, do đó buộc phải có 5^x chia cho 8 có số dư là 1. Như vậy x phải là số chẵn. Đặt $x=2k$ với $k\in\mathbb{N}^*$, thu được:

$$5^{2k}=y^2-12^k y+12^k y-12^{2k}$$
$$=y(y-12^k)+12^k(y-12^k)=(y-12^k)(y+12^k).$$

Do 5 là số nguyên tố nên tồn tại $m\in\mathbb{N}, m<k$ sao cho $y-12^k=5^m$ và $y+12^k=5^{2k-m}$.

Suy ra: $2.12^k=5^m\left(5^{2k-2m}-1\right)$.

Do $(2,5)=(5,12)=1$ và 2.12^k chia hết cho 5^m nên $m=0$, khi đó ta được $y=12^k+1$. Thế thì $5^{2k}+12^{2k}=\left(12^k+1\right)^2$ hay $2.12^k=25^k-1$.

+ Với $k\geq 2$ thì $25^k-1>24^k=2^k.12^k>2.12^k$ (loại).

+ Với $k=1$, ta thấy $2.12^k=25^k-1$ (thoả mãn).

Từ đó ta tìm được $x=2; y=13$.

Vậy $(x;y)=(2;13)$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Thí dụ 21. *Cho m, n là các số nguyên dương thoả mãn m, n nguyên tố cùng nhau và $m-n$ là một số nguyên lẻ. Chứng minh rằng $(m+3n)(5m+7n)$ không thể là một số chính phương.*

Lời giải. Nhận thấy $m+3n=(m-n)+4n$ và $5m+7n=5(m-n)+12n$. Khi đó với giả thiết $m-n$ là số nguyên lẻ nên ta có $m+3n$ và $5m+7n$ là các số nguyên lẻ.

Gọi $d=(m+3n, 5m+7n)$, khi đó d là một số nguyên dương lẻ. Suy ra: $\begin{cases} m+3n \vdots d \\ 5m+7n \vdots d \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5(m+3n)-(5m+7n) \vdots d \\ 7(m+3n)-3(5m+7n) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8n \vdots d \\ -8m \vdots d \end{cases}.$$

Do d là số lẻ nên ta có $(8,d)=(-8,d)=1$, nên ta được $m \vdots d$ và $n \vdots d$.

Được quét bằng CamScanner

Suy ra d là một ước nguyên dương của m và n. Mà ta có $(m,n)=1$ nên $d=1$. Từ đó ta có $(m+3n,5m+7n)=1$. Giả sử $(m+3n)(5m+7n)$ là một số chính phương và là số chính phương lẻ. Do $(m+3n,5m+7n)=1$ nên $m+3n$ và $5m+7n$ là các số chính phương lẻ.

Khi đó $m+3n$ và $5m+7n$ chia cho 8 có số dư là 1, ta có $(5m+7n)-(m+3n)\vdots 8$ hay $4(m+n)\vdots 8$ nên $m+n\vdots 2$, điều này mâu thuẫn với $m-n$ là số lẻ. Vậy điều giả sử là sai hay $(m+3n)(5m+7n)$ không thể là số chính phương.

Thí dụ 22 (Trích đề thi học sinh giỏi môn Toán 9, tỉnh Nghệ An, năm học 2022-2023). *Tìm tất cả các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn:*

$$p^2+14q^2+2r^2=6pqr.$$

Lời giải. Dễ thấy $14q^2+2r^2$ và $6pqr$ là các số chẵn, do đó p^2 buộc phải là số chẵn. Vì p là số nguyên tố nên $p=2$.

Giả sử q và r không chia hết cho 3, khi đó ta có q^2 và r^2 chia cho 3 cùng có số dư là 1. Nên $14q^2+2r^2$ chia cho 3 có số dư là 1. Mà với $p=2$ thì $p^2+14q^2+2r^2$ chia cho 3 có số dư là 2, điều này mâu thuẫn với $6pqr\vdots 3$.

Như vậy trong hai số q và r phải có một số bằng 3. Ta xét hai trường hợp sau:

• TH1: Với $q=3$, khi đó ta có:

$$2^2+14.3^2+2r^2=6.2.3r \text{ hay } r(18-r)=65.$$

Do r là số nguyên tố và $r<18$ nên $r\in\{2;3;5;7;11;13;17\}$. Thử trực tiếp ta được $r=5$ và $r=13$ thoả mãn.

• TH2: Với $r=3$, khi đó ta có:

$$2^2+14.q^2+2.3^2=6.2.3q \text{ hay } q(18-7q)=11.$$

Do q là số nguyên tố và $7q<18$ nên $q=2$. Thử trực tiếp ta thấy $q=2$ không thoả mãn.

Vậy $(p;q;r)=(2;3;5)$ hoặc $(p;q;r)=(2;3;13)$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Thí dụ 23 (Trích đề thi học sinh giỏi môn Toán 9, tỉnh Quảng Trị, năm học 2022-2023). *Cho các số nguyên x, y thoả mãn $2x^2-y^2=1$. Chứng minh $xy(x^2-y^2)$ chia hết cho 40.*

Lời giải. • Chứng minh $(x^2-y^2)\vdots 8$.

Từ $2x^2-y^2=1$ ta có y là số nguyên lẻ, do đó y^2 chia cho 4 có số dư là 1.

Cũng từ $2x^2-y^2=1$ ta có $2x^2=y^2+1$ chia cho 4 có số dư là 2 hay x^2 chia cho 4 có số dư là 1, điều này buộc x là số nguyên lẻ.

Do x và y là số lẻ nên $x^2-1\vdots 8$ và $y^2-1\vdots 8$.

Mà $x^2-y^2=(x^2-1)-(y^2-1)$ nên $x^2-y^2\vdots 8$.

• Chứng minh $xy(x^2-y^2)\vdots 5$. Xét các trường hợp sau:

+ Nếu $x\vdots 5$ thì ta có $xy(x^2-y^2)\vdots 5$.

+ Nếu x^2 chia cho 5 có số dư là 1, khi đó $y^2=2x^2-1$ chia cho 5 có số dư là 1. Khi đó ta có $x^2-y^2\vdots 5$ nên $xy(x^2-y^2)\vdots 5$.

+ Nếu x^2 chia cho 5 có số dư là 4, khi đó $y^2=2x^2-1$ chia cho 5 có số dư là 2, điều này mâu thuẫn với số chính phương chia cho 5 thì có số dư là 0; 1; 4. Vậy trường hợp này không xảy ra.

Vậy trong mọi trường hợp đều có $xy(x^2-y^2)\vdots 5$.

Do $(8,5)=1$ nên suy ra $xy(x^2-y^2)\vdots 40$ (đpcm).

Thí dụ 24. *Tìm tất cả các số nguyên tố p và q thoả mãn $p^3-q^5=(p+q)^2$.*

Lời giải. Giả sử p và q là các số nguyên tố thoả mãn $p^3-q^5=(p+q)^2$. Khi đó $p^3-q^5>0$.

Từ đó ta được $p^3>q^5\geq 2^5$ nên ta được $p>3$.

Vậy p không chia hết cho 3. Ta xét các TH sau:

• TH1: Nếu $q=3$, khi đó ta có :

$$p^3-3^5=(p+3)^2\Leftrightarrow p^3-p^2-6p-252=0$$

Được quét bằng CamScanner

$\Leftrightarrow (p-7)\left(p^2+6p+36\right)=0.$

Do $p^2+6p+36>0$ ta được $p-7=0$ hay $p=7$.

• TH2: Nếu $q\neq 3$ khi đó $p=3m\pm 1; q=3n\pm 1$ với m, n là các số nguyên dương. Khi đó ta có :

+ Với $p=3m+1$ và $q=3n+1$ thì $p^5-q^3 \vdots 3$ và $(p+q)^2$ chia 3 dư 1, nên không thoả mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $p=3m+1$ và $q=3n-1$ thì p^5-q^3 chia 3 dư 2 và $(p+q)^2$ chia hết cho 3, nên không thoả mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $p=3m-1$ và $q=3n+1$ thì p^5-q^3 chia 3 dư 1 và $(p+q)^2$ chia hết cho 3, nên không thoả mãn yêu cầu bài toán.

+ Với $p=3m-1$ và $q=3n-1$ thì $p^5-q^3 \vdots 3$ và $(p+q)^2$ chia 3 dư 1, nên không thoả mãn yêu cầu bài toán.

Vậy cặp số nguyên tố $(p;q)$ thoả mãn yêu cầu bài toán là $(7;3)$.

MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm các số nguyên tố p thoả mãn $A=2^p+5.3^p$ là một số chính phương.

Bài 2. Tìm tất các các bộ sáu số nguyên tố $p_1; p_2; p_3; p_4; p_5; p_6$ thoả mãn đẳng thức:

$$p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^3+p_5^2=p_6^2.$$

Bài 3. Tìm tất cả các số nguyên tố nguyên tố $p_1; p_2; p_3; p_4; p_5; p_6; p_7$ sao có tổng bình phương của bảy số nguyên tố đó là bình phương của một số nguyên tố.

Bài 4. Cho ba số tự nhiên x, y, z thoả mãn $x^2+y^2=z^2$. Chứng minh rằng xy chia hết cho 12.

Bài 5. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho p^2+11 có đúng 6 ước phân biệt (kể cả 1 và chính nó).

Bài 6. Tìm ba số nguyên tố liên tiếp nhau sao cho tổng bình phương của ba số đó cũng là một số nguyên tố.

Bài 7. Tìm các số tự nhiên $x; y$ thoả mãn đẳng thức $x^2+3^y=3026$.

Bài 8. Tìm tất cả các số tự nhiên $(m; n)$ sao cho $2^m.3^n-1$ là số chính phương.

Bài 9. Tìm tất cả các số nguyên dương $(m; n)$ thoả mãn $A=6^m+2^n+2$ là số chính phương.

Bài 10. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho 7^n+147 là số chính phương.

Bài 11. Tìm các số nguyên dương x để 3^x-32 là số chính phương.

Bài 12. Cho p,q,r,s là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $\left(p^2-q^2+r^2-s^2\right) \vdots 24$.

Bài 13. Tồn tại hay không các số nguyên tố a,m,n thoả mãn điều kiện $a^2=m^2+n^2$.

Bài 14. Tồn tại hay không các số nguyên tố a,b,m,n,p thoả mãn $a^2+b^2=m^2+n^2+p^2$.

Bài 15. Tìm các số nguyên tố p, q, r thoả mãn $p+q+r$ không chia hết cho 3, đồng thời các số $p+q+r$ và $pq+qr+rp+3$ đều là các số chính phương.

Bài 16. Tồn tại hay không các số nguyên a,b,c thoả mãn $ab^2c+2, bc^2a+2, ca^2b+2$ là các số chính phương.

Bài 17. Tìm số nguyên tố bé nhất sao cho p viết được thành 10 tổng có dạng:

$p=x_1^2+y_1^2=x_2^2+2y_2^2=x_3^2+3y_3^2=...=x_{10}^2+10y_{10}^2$ trong đó $x_1;x_2;...;x_{10}$ và $y_1;y_2;...y_{10}$ là các số nguyên dương.

Bài 18. Cho số nguyên dương a_1. Ta lập các số nguyên dương $a_2;a_3;a_4;...;a_{2015}$ thoả mãn điều kiện $a_{n+1}=a_n^3+2013$, với $n=1; 2; 3; ...; 2014$. Hỏi trong 2015 số nguyên dương $a_1;a_2;a_3;...;a_{2015}$ có bao nhiêu số chính phương?

Được quét bằng CamScanner

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN TỈNH NINH BÌNH

Năm học 2026 - 2027

Câu 1. 1) *Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn $x+y+z=3$. Chứng minh*

$$\frac{1}{3x+yz}+\frac{1}{3y+xz}+\frac{1}{3z+xy}=\frac{6}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

2) *Xét đa thức $P(x)=x^3-mx+1$, với m là một số thực. Giả sử đa thức $P(x)$ có ba nghiệm thực là a,b,c.*

a) *Chứng minh $abc=-1$.*

b) *Tìm tất cả các giá trị của m để $a^6+b^6+c^6=19$.*

Lời giải. 1) Ta có:

$$\frac{1}{3x+yz}=\frac{1}{(x+y+z)x+yz}=\frac{1}{(x+y)(x+z)}.$$

Chứng minh tương tự, ta được:

$$\frac{1}{3y+xz}=\frac{1}{(y+x)(y+z)}$$

và $\dfrac{1}{3z+xy}=\dfrac{1}{(z+x)(z+y)}$.

Vậy: $\dfrac{1}{3x+yz}+\dfrac{1}{3y+xz}+\dfrac{1}{3z+xy}$

$$=\frac{1}{(x+y)(x+z)}+\frac{1}{(y+x)(y+z)}+\frac{1}{(z+x)(z+y)}$$

$$=\frac{y+z+x+z+x+y}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$=\frac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{6}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

2) a) Theo định lý Bezout, ta có:

$$x^3-mx+1=(x-a)(x-b)(x-c)$$

$$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc.$$

Đồng nhất hệ số, suy ra:

$$\begin{cases}a+b+c=0\\ab+bc+ca=-m\ (I).\\abc=-1\end{cases}$$

Vậy $abc=-1$.

b) Từ hệ (I) ta có: $a^3=ma-1$

$$\Rightarrow a^6=(ma-1)^2$$

$$\Rightarrow a^6=m^2a^2-2ma+1.$$

Tương tự, ta có: $b^6=m^2b^2-2mb+1$;

$$c^6=m^2c^2-2mc+1.$$

Do đó:

$$a^6+b^6+c^6=m^2\left(a^2+b^2+c^2\right)-2m(a+b+c)+3$$

$$=m^2\left[(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\right]$$

$$-2m(a+b+c)+3$$

$$=m^2(0+2m)+3=2m^3+3.$$

Kết hợp với giả thiết có $2m^3+3=19$, suy ra $m=2$, thử lại thấy thoả mãn. Vậy giá trị cần tìm là $m=2$.

Câu 2. 1) *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}4x^3\left(y^2+1\right)+\sqrt{2x}-2=0\\2x^2y\left(1+\sqrt{y^2+3}\right)=x+\sqrt{3x^2+\dfrac{1}{4}}.\end{cases}$$

2) *Một đoàn thiện nguyện dự định chở 48 tấn hàng để hưởng ứng phong trào "Hướng về Miền Trung thân yêu". Khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hoá tăng thêm 7 tấn so với dự định, do đó đoàn thiện nguyện phải bổ sung thêm 3 xe, lúc này mỗi xe chở ít hơn dự định 1 tấn hàng. Hỏi ban đầu, đoàn thiện nguyện dự định dùng bao nhiêu chiếc xe để chở hàng, biết các xe chở số tấn hàng bằng nhau?*

Lời giải. 1) Điều kiện xác định: $x\ge 0$.

Đặt $\begin{cases}4x^3\left(y^2+1\right)+\sqrt{2x}-2=0 & (1)\\2x^2y\left(1+\sqrt{y^2+3}\right)=x+\sqrt{3x^2+\dfrac{1}{4}} & (2)\end{cases}$

Ta thấy $x=0$ không thoả mãn phương trình (1) nên $x>0$.

Được quét bằng CamScanner

Chia cả hai vế của phương trình (2) cho $2x^2$, ta được: $y\left(1+\sqrt{3+y^2}\right)=\dfrac{1}{2x^2}\left(x+\sqrt{3x^2+\dfrac{1}{4}}\right)$

$\Leftrightarrow y\left(1+\sqrt{3+y^2}\right)=\dfrac{1}{2x}\left(1+\sqrt{3+\dfrac{1}{4x^2}}\right)$

$\Leftrightarrow y\left(1+\sqrt{3+y^2}\right)=\dfrac{1}{2x}\left(1+\sqrt{3+\left(\dfrac{1}{2x}\right)^2}\right)$ (3).

Từ (3) suy ra $y>0$.

Xét hai trường hợp sau:

TH1: Nếu $y>\dfrac{1}{2x}>0$ thì $y^2>\left(\dfrac{1}{2x}\right)^2$.

Do đó $1+\sqrt{3+y^2}>1+\sqrt{3+\left(\dfrac{1}{2x}\right)^2}$.

Suy ra $y\left(1+\sqrt{3+y^2}\right)>\dfrac{1}{2x}\left(1+\sqrt{3+\left(\dfrac{1}{2x}\right)^2}\right)$.

Không thoả mãn (3).

TH2: Nếu $\dfrac{1}{2x}>y>0$ thì $\left(\dfrac{1}{2x}\right)^2>y^2$. Do đó

$1+\sqrt{3+\left(\dfrac{1}{2x}\right)^2}>1+\sqrt{3+y^2}$.

Suy ra $\dfrac{1}{2x}\left(1+\sqrt{3+\left(\dfrac{1}{2x}\right)^2}\right)>y\left(1+\sqrt{3+y^2}\right)$.

Không thoả mãn (3).

Do đó suy ra $y=\dfrac{1}{2x}$.

Thay $y=\dfrac{1}{2x}$ vào phương trình (1), ta được:

$4x^3\left(\dfrac{1}{4x^2}+1\right)+\sqrt{2x}-2=0$

$\Leftrightarrow 4x^3+x+\sqrt{2x}-2=0$

$\Leftrightarrow 4x^3+x+\sqrt{2x}=2$ (4).

Cách 1. Xét ba khả năng sau:

- Nếu $x>\dfrac{1}{2}$ thì $\text{VT}(4)>\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+1=2$ nên không thoả mãn (4).
- Nếu $0<x<\dfrac{1}{2}$ thì $\text{VT}(4)<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+1=2$, không thoả mãn (4).
- Nếu $x=\dfrac{1}{2}$, thoả mãn phương trình (4) nên $x=\dfrac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của (4).

Cách 2.

$(4)\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(4x^2+2x+2+\dfrac{2}{\sqrt{2x}+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ (vì $x>0$).

Do đó $x=\dfrac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của (4).

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là:

$$(x;y)=\left(\frac{1}{2};1\right).$$

2) Gọi x là số xe dự định của đoàn thiện nguyện, đơn vị là chiếc ($x\in\mathbb{N}^*$).

Số xe tham gia vận chuyển là $x+3$ (chiếc).

Số tấn hàng trên mỗi chiếc xe theo dự định là $\dfrac{48}{x}$.

Số tấn hàng trên mỗi chiếc xe thực tế là $\dfrac{55}{x+3}$.

Theo bài ra ta có phương trình: $\dfrac{48}{x}-\dfrac{55}{x+3}=1$

$\Leftrightarrow 48(x+3)-55x=x(x+3)$

$\Leftrightarrow x^2+10x-144=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=8 & \text{(thoả mãn)}\\ x=-18 & \text{(loại)}\end{array}\right.$.

Vậy lúc đầu đoàn thiện nguyện dự định dùng 8 chiếc xe.

Câu 3. *Cho tam giác ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$ đường kính BC. Lấy điểm H nằm trên đoạn thẳng OC (H không trùng với O và C). Đường thẳng đi qua H và vuông góc với đường thẳng BC cắt đường thẳng AC tại E và cắt đường thẳng AB tại F. Gọi D là giao điểm của*

Được quét bằng CamScanner

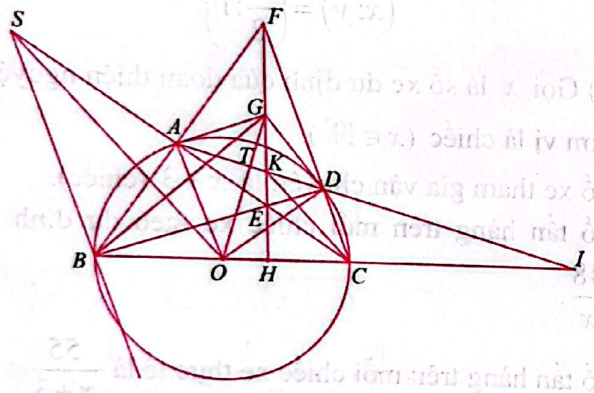
đường thẳng BE với đường tròn $(O;R)$ (D không trùng với B). Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC. Tiếp tuyến tại A của đường tròn $(O;R)$ cắt đường thẳng EF tại G.

1) Chứng minh ba điểm F, D, C thẳng hàng và tam giác FAD đồng dạng với tam giác FCB.

2) Chứng minh G là trung điểm của EF và tìm vị trí của điểm H trên đoạn thẳng OC sao cho OI + 4OH đạt giá trị nhỏ nhất.

3) Đường thẳng qua B song song với đường thẳng FC cắt đường thẳng CA tại S. Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng FH và AD. Chứng minh đường thẳng OS song song với đường thẳng CK.

Lời giải.



1) Xét đường tròn (O) có $\widehat{BAC}=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Tam giác FBC có hai đường cao CA, FH cắt nhau tại E nên E là trực tâm tam giác đó. Do vậy $BE \perp FC$ hay $BD \perp FC$. (1)

Xét đường tròn (O) có $\widehat{BDC}=90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Do đó $BD \perp DC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra hai đường thẳng FC; DC trùng nhau hay ba điểm F, D, C thẳng hàng.

Vì $\Delta FAC \backsim \Delta FDB$ (g.g) suy ra: $\frac{FA}{FD}=\frac{FC}{FB}$.

Do đó: $\frac{FA}{FC}=\frac{FD}{FB}$.

Xét ΔFAD và ΔFCB có $\frac{FA}{FC}=\frac{FD}{FB}$, góc $\widehat{BFC}$ chung, nên $\Delta FAD \backsim \Delta FCB$ (c.g.c).

2) • Ta có $\widehat{FAG}=\widehat{OAC}$ (cùng phụ $\widehat{GAC}$), $\widehat{AFG}=\widehat{ACO}$ (cùng phụ $\widehat{ABC}$).

Mà $\widehat{ACO}=\widehat{CAO}$ nên $\widehat{FAG}=\widehat{AFG}$, suy ra $GA=GF$ (1). Mặt khác:

$\widehat{GAE}=90°-\widehat{FAG}=90°-\widehat{AFG}=\widehat{GEA}$,

suy ra $GA=GE$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $GE=GF$ hay G là trung điểm của EF (điều phải chứng minh).

• Vì ΔAEF vuông tại A có G là trung điểm EF suy ra: $AG=\frac{1}{2}EF$. ΔDEF vuông tại D có G là trung điểm EF suy ra $DG=\frac{1}{2}EF$.

Suy ra $AG=DG$ (cùng bằng $\frac{1}{2}EF$).

Gọi T là giao điểm của AD và GO. Ta có $OA=OD$; $GA=GD$ nên O; G cùng thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AD. Do đó $AD \perp GO$ suy ra $\widehat{ATO}=90°$.

Xét ΔOAG và ΔOTA có $\widehat{AOG}$ chung và $\widehat{OTA}=\widehat{OAG}=90°$ nên $\Delta OAG \backsim \Delta OTA$ (g.g).

Do đó $\frac{OA}{OT}=\frac{OG}{OA}$. Từ đó suy ra $AO^2=OT.OG$.

Xét ΔOHG và ΔOTI có $\widehat{GOI}$ chung và $\widehat{OHG}=\widehat{OTI}=90°$ nên $\Delta OHG \backsim \Delta OTI$ (g.g), do đó $\frac{OH}{OT}=\frac{OG}{OI}$.

Suy ra $OH.OI=OT.OG$. Suy ra $AO^2=OI.OH$ hay $OI.OH=R^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$OI+4OH \geq 2\sqrt{OI.4OH}=4\sqrt{OI.OH}=4R$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} OI.OH=R^2 \\ OI=4OH \end{cases}$

hay $\begin{cases} OH=\frac{R}{2} \\ OI=2R \end{cases}$. Khi đó H là trung điểm của OC.

Được quét bằng CamScanner

3) Vì $\Delta GTK \backsim \Delta GHO$ (g.g) suy ra $\frac{GT}{GH}=\frac{GK}{GO}$ hay $GT.GO=GH.GK$.

Mà $GA^2=GT.GO$ (do $\Delta OAG \backsim \Delta OTA$) và $GA=GF$. Suy ra $GF^2=GK.GH$.

Vì $GF^2=GK.GH$ nên

$$GF^2=GH.(GH-HK).$$

Do đó: $GH.HK=GH^2-GF^2$

$$=(GH-GF)(GH+GF)=EH.FH.$$

Ta có $\Delta BHE \backsim \Delta FHC$ (g.g) nên $\frac{BH}{FH}=\frac{HE}{HC}$.

Kéo theo $HB.HC=HE.FH$.

Suy ra $HB.HC=GH.HK$ hay $\frac{HB}{HK}=\frac{HG}{HC}$.

Xét ΔBHG và ΔKHC có $\widehat{BHG}=\widehat{KHC}=90°$, $\frac{HB}{HK}=\frac{HG}{HC}$.

Suy ra $\Delta BHG \backsim \Delta KHC$ (c.g.c), vì vậy $\widehat{BGH}=\widehat{KCH}$ (3).

Do BS // FC suy ra $\widehat{BSC}=\widehat{FCA}$ (hai góc so le trong) mà $\widehat{FBE}=\widehat{FCA}$ suy ra $\widehat{BSC}=\widehat{FBE}$.

Lại có $\widehat{BCS}=\widehat{BFE}$ (cùng phụ với $\widehat{FBC}$).

Suy ra $\Delta SBC \backsim \Delta BEF$ (g.g).

Vậy $\frac{SB}{BE}=\frac{BC}{EF}=\frac{2BO}{2EG}=\frac{BO}{EG}$ và $\widehat{SBC}=\widehat{BEF}$ hay $\widehat{SBO}=\widehat{BEG}$.

Xét ΔSBO và ΔBEG có $\widehat{SBO}=\widehat{BEG}$ và $\frac{SB}{BE}=\frac{BO}{EG}$ nên $\Delta SBO \backsim \Delta BEG$ (c.g.c).

Vậy $\widehat{BOS}=\widehat{BGE}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{BOS}=\widehat{BCK}$, mà 2 góc này đồng vị nên SO // CK (điều phải chứng minh).

Câu 4. *1) Tìm tất cả các cặp $(x;y)$ nguyên dương thoả mãn $x^2-2y^2+2x-y-xy=21$.*

2) Cho 2026 số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_{2026}$. Chứng minh tồn tại hai số nguyên dương x, y thoả mãn $y>1$ và $xy+a_i$ chia hết cho $x+a_i$ với mọi số nguyên dương i từ 1 đến 2026.

Lời giải.

1) Giả sử $x;y$ là các số nguyên dương sao cho:

$$x^2-2y^2+2x-y-xy=21$$

$$\Leftrightarrow x^2-2y^2+2x-y-xy+1=22$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x+1)-y^2-(y^2+xy+y)=22$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2-y^2-y(y+x+1)=22$$

$$\Leftrightarrow (x+1+y)(x+1-y)-(x+1+y)y=22$$

$$\Leftrightarrow (x+y+1)(x-2y+1)=22.$$

Vì $x;y$ là các số nguyên dương nên $x+y+1$ và $x-2y+1$ là các số nguyên.

Suy ra $x+y+1$ là ước của 22. Mà x, y đều là các số nguyên dương nên $x+y+1\geq 3$.

Suy ra $x+y+1\in\{11;22\}$. Xét hai trường hợp sau:

TH1: Nếu $x+y+1=11$ thì $x-2y+1=2$. Suy ra $x=7, y=3$.

TH2: Nếu $x+y+1=22$ thì $x-2y+1=1$. Suy ra $x=14, y=7$.

Vậy có hai cặp số nguyên dương $(x;y)$ thoả mãn đề bài là $(7;3)$ và $(14;7)$.

2) Giả sử x, y là các số nguyên dương. Với mọi $i\in\{1;2;...;2026\}$ ta có: $xy+a_i$ chia hết cho $x+a_i \Leftrightarrow [xy+a_i-(x+a_i)]\vdots(x+a_i)$

$$\Leftrightarrow (xy-x)\vdots(x+a_i)$$

$$\Leftrightarrow x(y-1)\vdots(x+a_i).$$

Chọn x là số nguyên dương tuỳ ý và $y=(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_{2026})+1$.

Khi đó $y>1$ và với mọi $i\in\{1;2;...;2026\}$ thì

$$xy+a_i=x[(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_{2026})+1]+a_i$$

$$=x(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_{2026})+x+a_i$$

$$=x(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_{2026})+(x+a_i).$$

Được quét bằng CamScanner

Suy ra $xy+a_i$ chia hết cho $x+a_i$. Vậy ta có điều cần chứng minh.

Câu 5. *Xét a, b, c là ba số thực dương thoả mãn $ab+bc+ca=3$.*

1) Chứng minh $a+b+c\geq 3$.

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{(2a+b+c)^3}{b+c}+\frac{(2b+c+a)^3}{c+a}+\frac{(2c+a+b)^3}{a+b}.$$

Lời giải.

1) $(a+b+c)^2-9=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\left(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\right)$

$=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\geq 0.$

Mà a,b,c là ba số thực dương, nên $a+b+c\geq 3$.

2) Đặt $x=b+c, y=a+c, z=a+b$.

Khi đó: $x>0$, $y>0$, $z>0$

và $P=\frac{(y+z)^3}{x}+\frac{(x+z)^3}{y}+\frac{(x+y)^3}{z}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{(y+z)^3}{x}+4x(y+z)\geq 2\sqrt{\frac{(y+z)^3}{x}.4x(y+z)}$$

$$\geq 4(y+z)^2.$$

Tương tự: $\frac{(x+z)^3}{y}+4y(x+z)\geq 4(x+z)^2$

và $\frac{(x+y)^3}{z}+4z(x+y)\geq 4(x+y)^2$.

Cộng theo vế, suy ra $P\geq 8\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

Mặt khác: $x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}(x+y+z)^2$

$=\frac{1}{3}(b+c+a+c+a+b)^2=\frac{4}{3}(a+b+c)^2$.

Sử dụng kết quả câu 1, suy ra:

$$P\geq 8.\frac{4}{3}(a+b+c)^2\geq 8.\frac{4}{3}.9=96.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 96.

Câu 6. *Có 8 "chú" mèo, mỗi "chú" được đặt tên là một dãy ký tự thuộc vào tập hợp $\{000;001;010;011;100;101;110;111\}$ sao cho không có hai "chú" mèo nào trùng tên. Hai "chú" mèo gọi là "liên kết" với nhau nếu trong dãy ký tự tên của chúng, có đúng một vị trí, mà hai ký tự tương ứng khác nhau (ví dụ: hai "chú" mèo 000 và 001 được gọi là liên kết với nhau, nhưng hai "chú" mèo 000 và 011 thì không được gọi là liên kết với nhau). Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất, sao cho trong k "chú" mèo phân biệt được chọn tuỳ ý từ 8 "chú" mèo trên, tồn tại 3 "chú" mèo mà một "chú" liên kết với hai "chú" kia.*

Lời giải. • Xét hai chú mèo x, y lần lượt có tên là $x_1x_2x_3$ và $y_1y_2y_3$ với x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3 thuộc tập $\{0;1\}$. Định nghĩa:

$$d(x;y)=\left|(x_1+x_2+x_3)-(y_1+y_2+y_3)\right|.$$

• Xét tập hợp $A=\{000;011;101;110\}$. Ta thấy rằng tổng tất cả các chữ số trong tên của mỗi chú mèo thuộc tập A đều bằng 0 hoặc 2. Vậy với mọi cặp hai chú mèo $x, y\in A$, thì $d(x;y)\in\{0;2\}$.

• Mặt khác, với hai chú mèo x', y' liên kết với nhau thì $d(x';y')=1$. Vì vậy, tồn tại 4 chú mèo (có thể chọn chính các chú mèo trong tập A) đôi một không liên kết với nhau.

Ta chứng minh trong 5 chú mèo tuỳ ý, sẽ tìm được một chú liên kết với ít nhất hai chú khác.

Xét thêm tập $B=\{001;010;100;111\}$. Tương tự như tập A, chứng minh được 4 chú mèo trong tập B cũng đôi một không liên kết với nhau. Ta có một nhận xét (*) là: *một chú mèo bất kỳ đều liên kết với đúng 3 chú mèo khác*. Ngoài ra, gộp các chú mèo trong cả hai tập A, B thì ta được chính 8 chú mèo ban đầu.

(Xem tiếp trang 36)

Được quét bằng CamScanner

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN HÀ NỘI

Năm học 2026 – 2027

Môn thi: Toán (Chuyên Toán)

Thời gian làm bài: 150 *phút* (*không kể thời gian chép đề*)

Câu I (2,0 *điểm*)

1) Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên nhỏ hơn 125. Tính xác suất của biến cố A: "Số được chọn viết được dưới dạng tổng của hai số chính phương liên tiếp".

2) Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn đồng thời $a+b+c=0$ và $a^2+c^2-4bc-2b+2=0$. Tính giá trị của biểu thức $M=abc$.

Câu II (2,0 *điểm*)

1) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn tồn tại các số nguyên dương a,b,c sao cho $n=\dfrac{a^2+b^2+c^2+1}{abc}$. Chứng minh n chia hết cho 4 nhưng không chia hết cho 8.

2) Tìm tất cả cặp số tự nhiên $(x;y)$ thỏa mãn

$$\frac{x^3+3}{x+2}=\frac{4y^2}{2y+1}.$$

Câu III (2,0 *điểm*)

1) Tìm tất cả cặp số nguyên dương $(n;p)$ thỏa mãn đồng thời p là số nguyên tố và $4n^2+p^3+4p^2-8p-32$ chia hết cho $np+4n$.

2) Với a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=2$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{bc+2a+1}{a^2+1}+\frac{ca+2b+1}{b^2+1}+\frac{ab+2c+1}{c^2+1}.$$

Câu IV (3,0 *điểm*)

Cho tam giác nhọn ABC cân tại A, có đường cao AH. Lấy điểm O thuộc đoạn thẳng AH sao cho $OH>OA$. Tia BA cắt đường tròn tâm O bán kính OB tại điểm thứ hai T. Lấy điểm E thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AE>AT$. Đường trung trực của đoạn thẳng CE cắt đường thẳng AH tại điểm N.

1) Chứng minh bốn điểm A,E,N,C cùng thuộc một đường tròn.

2) Đường thẳng qua điểm A và song song với đường thẳng BC cắt đường trung trực của đoạn thẳng CE tại điểm K. Gọi F là trung điểm của đoạn thẳng ET. Chứng minh $\widehat{OFK}=90^\circ$.

3) Chứng minh đường tròn tâm O bán kính OB, đường tròn đường kính NK và đường thẳng TK cùng đi qua một điểm.

Câu V (1,0 *điểm*)

Xét số nguyên dương n và tập hợp S gồm n số nguyên dương $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $a_1<a_2<a_3<...<a_n=2000$.

ii) Với mọi số tự nhiên k, $2\le k\le n$, tồn tại các số nguyên dương i,j nhỏ hơn k (không nhất thiết phân biệt) sao cho $a_k=a_i+4a_j$.

1) Chứng minh tất cả các phần tử của tập hợp S đều là số chẵn.

2) Tìm giá trị lớn nhất của n.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG

(*GV THCS Giảng Võ 2, Hà Nội*)

Giới thiệu

Được quét bằng CamScanner



TÍNH XÁC SUẤT THEO PHƯƠNG PHÁP ĐẾM LỌC KHÔNG GIAN MẪU

NGUYỄN VĂN NHO
(GV THPT Nguyễn Duy Trinh, Nghệ An)

Trong dạy học xác suất ở phổ thông, nhiều học sinh còn gặp khó khăn khi vận dụng các công thức vào những bài toán có điều kiện phức tạp. Một cách tiếp cận hiệu quả là tổ chức không gian mẫu theo hướng "đếm – lọc", giúp kiểm soát các khả năng một cách rõ ràng và có hệ thống. Phương pháp này làm nổi bật bản chất của xác suất thông qua việc đếm trực tiếp các trường hợp thuận lợi. Đồng thời, nó góp phần rèn luyện tư duy tổ hợp và năng lực phân tích bài toán. Bài viết giới thiệu cách tính xác suất theo hướng đếm lọc không gian mẫu qua một số tình huống tiêu biểu.

1. Hình thành tư duy đếm và phân tích điều kiện (khối 10)

***Tình huống dạy học*:** Một hộp chứa 5 thẻ được đánh số từ 1 đến 5. Rút đồng thời 2 thẻ.

***Yêu cầu*:** Xác định xác suất để tổng hai số trên các thẻ được rút ra là số chẵn.

***Hướng dẫn giải theo hướng tiếp cận bản chất*:**

- Không gian mẫu gồm các cặp số khác nhau chọn từ {1, 2, 3, 4, 5}; có 10 trường hợp.
- Phân tích điều kiện: tổng là số chẵn khi hai số *cùng chẵn* hoặc *cùng lẻ*.
- Lọc không gian mẫu: các cặp thỏa mãn là (2,4), (1, 3), (1, 5), (3, 5); có 4 trường hợp.
- Lập tỉ lệ xác suất: $P = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

2. Xác suất có điều kiện thông qua thu hẹp không gian mẫu (khối 12)

***Tình huống dạy học*:** Một lớp có 20 học sinh, gồm 12 nam và 8 nữ. Có 7 học sinh giỏi Toán, trong đó 5 nam. Chọn ngẫu nhiên một học sinh từ lớp.

***Yêu cầu*:** Biết học sinh được chọn là nam, hãy xác định xác suất để học sinh đó giỏi Toán.

***Hướng dẫn giải theo hướng tiếp cận bản chất*:**

- Điều kiện đã cho làm *thu hẹp không gian mẫu*: chỉ xét 12 học sinh nam.
- Lọc các trường hợp thuận lợi: trong 12 nam có 5 em giỏi Toán.
- Lập tỉ lệ xác suất: $P(\text{giỏi Toán} \mid \text{nam}) = \frac{5}{12}$.

3. Lọc ngược không gian mẫu – định hướng tư duy Bayes (khối 12)

"Lọc ngược không gian mẫu được hiểu là việc xác định lại tập kết quả ban đầu từ điều kiện đã xảy ra."

***Tình huống dạy học*:** 60% học sinh chọn tổ hợp A (30% đỗ ĐH), 40% chọn tổ hợp B (50% đỗ ĐH). Chọn ngẫu nhiên một học sinh *đã đỗ Đại học*.

***Yêu cầu*:** Xác định xác suất để học sinh đó thuộc nhóm chọn tổ hợp B.

Để làm rõ bản chất của bài toán và hỗ trợ học sinh hình dung mối quan hệ giữa các tỉ lệ, giáo viên hướng dẫn học sinh chuẩn hóa bài toán bằng cách xét một quần thể giả định gồm 100 học sinh.

Được quét bằng CamScanner

Hướng dẫn giải theo hướng tiếp cận bản chất:

- Trong 100 học sinh có:

  + Tổ hợp A: 60 HS → đỗ 18 HS.

  + Tổ hợp B: 40 HS → đỗ 20 HS.

- Không gian mẫu mới là *38 học sinh đã đỗ.*

- Lọc trường hợp thuận lợi: 20 học sinh thuộc tổ hợp B.

- Lập tỉ lệ xác suất: $P(\text{B}|\text{đỗ}) = \dfrac{20}{38} = \dfrac{10}{19}$.

Đối với các bài toán dạng Bayes, học sinh thường mắc sai lầm khi so sánh trực tiếp các tỉ lệ cục bộ (ví dụ: 20% và 40%) mà không xét đến quy mô của từng nhóm trong toàn bộ quần thể. Việc sử dụng phương pháp giả sử số lượng cụ thể (ví dụ 100 học sinh) giúp học sinh trực quan hóa không gian mẫu tổng thể, từ đó thực hiện thao tác "*lọc ngược*" một cách tự nhiên và chính xác.

4. Bài toán xác suất điều kiện với cấu trúc chẵn - lẻ

Bài toán. *Từ các số tự nhiên 1, 2, 3,..., 12 chọn ngẫu nhiên 5 số khác nhau, biết rằng trong 5 số được chọn có ít nhất 2 số chẵn. Tính xác suất để tổng của 5 số được chọn là số lẻ.*

Lời giải.

Bước 1. *Xác định không gian mẫu ban đầu*

Số cách chọn 5 số từ 12 số:

$$n(\Omega) = C_{12}^5 = 792.$$

Bước 2. *Thu hẹp không gian mẫu theo điều kiện*

Trong các số từ 1 đến 12:

- có 6 số chẵn.
- có 6 số lẻ.

Điều kiện bài toán yêu cầu *ít nhất 2 số chẵn*, nên ta loại các trường hợp:

Trường hợp 1: không có số chẵn

$$C_6^5 = 6.$$

Trường hợp 2: chỉ có 1 số chẵn

$$C_6^1 C_6^4 = 6.15 = 90.$$

Số phần tử của không gian mẫu sau khi lọc điều kiện:

$$n(\Omega') = 792 - (6 + 90) = 696.$$

Bước 3. *Đếm số trường hợp thỏa mãn yêu cầu*

Tổng của 5 số là *số lẻ* khi số lượng số lẻ được chọn là *số lẻ*.

Các khả năng phù hợp với điều kiện bài toán:

Trường hợp 1: 3 số lẻ và 2 số chẵn

$$C_6^3 C_6^2 = 20.15 = 300.$$

Trường hợp 2: 1 số lẻ và 4 số chẵn

$$C_6^1 C_6^4 = 6.15 = 90.$$

Tổng số trường hợp thuận lợi:

$$300 + 90 = 390$$

Bước 4. *Tính xác suất*

$$P = \frac{390}{696} = \frac{65}{116}.$$

Kết luận: Xác suất cần tìm là

$$P = \frac{65}{116}.$$

5. Bài toán xác suất với phân loại theo đồng dư

Bài toán. *Từ các số tự nhiên 1, 2, 3,..., 15, chọn ngẫu nhiên 4 số khác nhau, biết rằng trong 4 số được chọn có ít nhất một số chia hết cho 3. Tính xác suất để tổng của 4 số được chọn chia hết cho 3.*

Lời giải.

Bước 1. *Không gian mẫu ban đầu*

Số cách chọn 4 số từ 15 số:

$$n(\Omega) = C_{15}^4 = 1365.$$

Bước 2. *Thu hẹp không gian mẫu theo điều kiện*

Trong các số từ 1 đến 15:

- có 5 số chia hết cho 3.
- có 10 số không chia hết cho 3.

Điều kiện bài toán yêu cầu *ít nhất một số chia hết cho 3*.

Loại trường hợp *không có số chia hết cho 3*:

$$C_{10}^4 = 210.$$

Được quét bằng CamScanner

Không gian mẫu sau khi lọc:

$$n(\Omega') = 1365 - 210 = 1155.$$

Bước 3. *Phân loại các số theo phần dư khi chia cho 3*

Các số từ 1 đến 15 được chia thành ba nhóm:

- dư 0: 5 số.
- dư 1: 5 số.
- dư 2: 5 số.

Tổng chia hết cho 3 khi tổng các phần dư đồng dư 0 (mod 3).

Các cấu hình có thể:

$0+0+0+0$:

$$C_5^4 = 5.$$

$1+1+1+0$:

$$C_5^3 C_5^1 = 10.5 = 50.$$

$2+2+2+0$:

$$C_5^3 C_5^1 = 50.$$

$1+2+0+0$:

$$C_5^1 C_5^1 C_5^2 = 5.5.10 = 250.$$

Tổng số trường hợp thuận lợi:

$$5 + 50 + 50 + 250 = 355.$$

Bước 4. *Tính xác suất*

$$P = \frac{355}{1155} = \frac{71}{231}.$$

Kết luận: Xác suất cần tìm là

$$P = \frac{71}{231}.$$

6. Bài toán xác suất với cấu trúc tổ hợp nhiều trường hợp

Bài toán. *Một hộp chứa 7 bi đỏ và 5 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 5 bi, biết rằng trong 5 bi được lấy có ít nhất 2 bi đỏ. Tính xác suất để số bi đỏ nhiều hơn số bi xanh.*

Lời giải.

Bước 1. *Không gian mẫu ban đầu*

Tổng số bi là 12, số cách lấy 5 bi:

$$n(\Omega) = C_{12}^5 = 792.$$

Bước 2. *Thu hẹp không gian mẫu theo điều kiện*

Điều kiện: ít nhất 2 bi đỏ.

Loại các trường hợp:

0 bi đỏ:

$$C_5^5 = 1.$$

1 bi đỏ:

$$C_7^1 C_5^4 = 7.5 = 35.$$

Số phần tử của không gian mẫu sau khi lọc:

$$n(\Omega') = 792 - 36 = 756.$$

Bước 3. *Đếm số trường hợp thỏa mãn yêu cầu*

Yêu cầu: *số bi đỏ nhiều hơn số bi xanh.*

Các khả năng:

3 đỏ, 2 xanh:

$$C_7^3 C_5^2 = 35.10 = 350.$$

4 đỏ, 1 xanh:

$$C_7^4 C_5^1 = 35.5 = 175.$$

5 đỏ:

$$C_7^5 = 21.$$

Tổng số trường hợp thuận lợi:

$$350 + 175 + 21 = 546.$$

Bước 4. *Tính xác suất*

$$P = \frac{546}{756} = \frac{13}{18}.$$

Kết luận: Xác suất cần tìm là

$$P = \frac{13}{18}.$$

7. Bài toán xác suất với hai lần lọc không gian mẫu

Bài toán. *Từ các số tự nhiên 1, 2, 3,..., 18, chọn ngẫu nhiên 5 số khác nhau, biết rằng trong 5 số được chọn:*

- *có ít nhất một số chia hết cho 3,*
- *có ít nhất một số chẵn.*

Tính xác suất để tổng của 5 số chia hết cho 3.

Lời giải.

Được quét bằng CamScanner

Bước 1. *Xác định không gian mẫu ban đầu*

Số cách chọn 5 số từ 18 số:

$$n(\Omega) = C_{18}^5 = 8568.$$

Bước 2. *Lọc điều kiện thứ nhất*

Điều kiện: ít nhất một số chia hết cho 3

Trong các số từ 1 đến 18:

- có 6 số chia hết cho 3
- có 12 số không chia hết cho 3

Loại trường hợp không có số chia hết cho 3:

$$C_{12}^5 = 792.$$

Không gian mẫu sau lần lọc thứ nhất:

$$8568 - 792 = 7776.$$

Bước 3. *Lọc điều kiện thứ hai*

Điều kiện tiếp theo:

có ít nhất một số chẵn.

Trong các số từ 1 đến 18:

- có 9 số chẵn
- có 9 số lẻ

Trường hợp không có số chẵn nghĩa là toàn số lẻ.

Có 9 số lẻ nên có: $C_9^5 = 126$.

Nhưng trong 126 trường hợp này, ta phải xét điều kiện thứ nhất.

Trong các số lẻ từ 1 đến 17 có:

- 3 số chia hết cho 3 (3, 9, 15)

Do đó ta cần loại các trường hợp:

- chọn 5 số lẻ không chia hết cho 3.

Có 6 số lẻ không chia hết cho 3:

$$C_6^5 = 6.$$

Vậy số trường hợp cần loại là:

$$126 - 6 = 120.$$

Không gian mẫu sau hai lần lọc:

$$n(\Omega') = 7776 - 120 = 7656.$$

Bước 4. *Đếm biến cố cần tìm*

Ta phân loại các số theo phần dư mod 3.

Trong các số từ 1 đến 18:

- dư 0: 6 số
- dư 1: 6 số
- dư 2: 6 số

Tổng chia hết cho 3 khi tổng phần dư $\equiv 0 \pmod 3$.

Các cấu hình:

$0+0+0+0+0$:

$$C_6^5 = 6.$$

$1+1+1+1+2$:

$$C_6^4 C_6^1 = 15.6 = 90.$$

$2+2+2+2+1$:

$$C_6^4 C_6^1 = 90.$$

$0+1+1+2+2$:

$$C_6^1 C_6^2 C_6^2 = 6.15.15 = 1350.$$

$0+0+1+1+1$:

$$C_6^2 C_6^3 = 15.20 = 300.$$

$0+0+2+2+2$:

$$C_6^2 C_6^3 = 300.$$

Tổng số trường hợp thuận lợi:

$$6 + 90 + 90 + 1350 + 300 + 300 = 2136.$$

Bước 5. Tính xác suất

$$P = \frac{2136}{7656} = \frac{89}{319}.$$

Kết luận: Xác suất cần tìm là

$$P = \frac{89}{319}.$$

Nhận xét sư phạm.

Bài toán này minh họa rõ *chiến lược lọc không gian mẫu nhiều bước.*

Tóm lại, phương pháp đếm – lọc không gian mẫu giúp làm rõ bản chất của xác suất và hạn chế sai sót khi giải toán. Cách tiếp cận này vừa đơn giản, trực quan, vừa phù hợp với học sinh phổ thông. Hy vọng phương pháp sẽ góp phần nâng cao hiệu quả dạy và học xác suất.

Được quét bằng CamScanner



CÁC LỚP THCS

Bài T1/589 (Lớp 6). Tìm các số có hai chữ số $\overline{ab}$ sao cho $9a$ và $9b$ là các số có hai chữ số đảo ngược của nhau (viết theo thứ tự ngược lại của nhau).

LÊ QUANG HÀO
(GV THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, An Giang)

Bài T2/589 (Lớp 7). Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC < BC$, O là giao điểm ba đường phân giác các góc trong của tam giác. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với tia BO tại M. Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với tia CO, cắt BC tại I. Chứng minh $OI \perp BC$.

ĐẬU CÔNG NHO
(GV THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An)

Bài T3/589. Tìm phần nguyên của số:

$$A=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2113}+\sqrt{2114}}+\frac{1}{\sqrt{2115}+\sqrt{2116}}.$$

NGUYỄN DUY LIÊN
(GV THPT Liên Bảo, Phú Thọ)

Bài T4/589. Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm thay đổi trên cạnh BC (M khác B và C). Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm D, E sao cho tứ giác $ADME$ là hình bình hành. Khi điểm M thay đổi, hãy chứng tỏ tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

NGUYỄN TẤN NGỌC
(GV THCS P. Bình Định, An Nhơn, Bình Định)

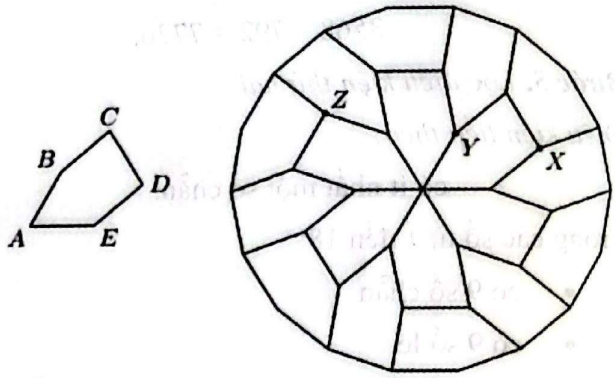
Bài T5/589. Cho a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{\sqrt{b-1}}{a+b}+\frac{\sqrt{c-1}}{b+c}+\frac{\sqrt{a-1}}{c+a}.$$

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/589. Một đa giác đều 18 – cạnh được chia thành 18 hình ngũ giác, mỗi hình ngũ giác đều bằng với hình ngũ giác $ABCDE$ (như hình vẽ). Tất cả các cạnh của ngũ giác có cùng độ dài.



a) Xác định các góc A, B, C, D và E.

b) Chứng minh rằng các điểm X, Y, Z thẳng hàng.

NGUYỄN ĐỨC TƯỞNG
(Pleiku)

Bài T7/589. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{\tan\frac{A}{4}}{\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}}+\frac{\tan\frac{B}{4}}{\tan\frac{C}{4}\tan\frac{A}{4}}+\frac{\tan\frac{C}{4}}{\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}}\geq 6+3\sqrt{3}.$$

CAO HẢI VÂN
(GV THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku, Gia Lai)

Bài T8/589. Cho đường tròn (O) có đường kính BD. Gọi Bx, Dy lần lượt là tiếp tuyến của (O) tại B và D. Điểm A thay đổi trên Bx, A khác B. Đường thẳng d đi qua B và vuông góc với AO cắt AD, (O) và Dy lần lượt tại K, C và S. Gọi M là giao điểm của CD và SO. Chứng minh $KM \parallel BD$.

ĐẶNG THỊ XUÂN HẰNG, ĐẶNG QUANG MINH
(Toán K4, THPT chuyên Chu Văn An, Bình Định)

Được quét bằng CamScanner

Bài T9/589. Cho $a,b,c\in\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$2^a+2^b+2^c+2=2^{a+b+c}.$$

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{\sqrt{8^a+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{8^b+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{8^c+1}}\ge 1.$

PHẠM DUY KHÁNH
(GV THPT Quỳ Châu, Nghệ An)

TIẾN TỚI OLYMPIC

Bài T10/587. Với n là số nguyên dương, tính các tích phân sau:

a) $\displaystyle\int_0^n e^{[x]}dx$; b) $\displaystyle\int_0^n \left[e^x\right]dx$,

trong đó ký hiệu $[a]$ là phần nguyên của số thực a.

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T11/589. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x)-y)=f(2x^2+y)-8yf(x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

NGUYỄN HÙNG CƯỜNG
(Xã Nhơn Mỹ, An Nhơn, Bình Định)

Bài T12/589. Cho tam giác ABC không vuông và không cân. Các điểm D, E, F lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB sao cho tam giác DEF bằng nhau cùng hướng với tam giác ABC. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và DEF. Chứng minh rằng nếu O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF thì HKO là tam giác đều.

LÊ VIẾT ÂN
(Ocean education, 40 đs 9, p.10, KĐT City Land, Gò Vấp, TP. Hồ Chí Minh)

Bài L1/589. Một đứa trẻ bị sốt ở nhiệt độ 101 °F được cho dùng thuốc hạ sốt. Giả sử cơ chế bay hơi của mồ hôi là cách duy nhất để làm giảm nhiệt độ cơ thể. Khối lượng của đứa trẻ là 30 kg. Nhiệt dung riêng của cơ thể con người bằng nhiệt dung riêng của nước là 1000 cal/kg.K và nhiệt hoá hơi của nước khoảng 580 cal/g. Nếu cơn sốt hạ xuống 98 °F trong 20 phút thì tốc độ bay hơi trung bình do thuốc gây ra ước tính khoảng bao nhiêu g/phút (làm tròn đến hàng đơn vị)?

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/589. Một electron chuyển động trong từ trường đều có cảm ứng từ B = 0,91 T. Tại thời điểm ban đầu electron ở điểm O và vectơ vận tốc của nó vuông góc $\vec{B}$. Biết khối lượng của electron là $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg, điện tích $e = -1{,}6.10^{-19}$ C và vận tốc $v = 4{,}8.10^6$ m/s. Kể từ thời điểm ban đầu, khoảng cách từ O đến electron bằng 30 μm lần thứ 2019 vào thời điểm nào?

THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/589 (Grade 6). Find all two-digit numbers $\overline{ab}$ such that the two-digit numbers $9a$ and $9b$ have their digits in reverse order.

Problem T2/589 (Grade 7). Given an acute triangle ABC with $AB < AC < BC$. Let O be the intersection of the three interior angle bisectors of the triangle. Through A, draw the line perpendicular to the ray BO at M. Through M, draw the line perpendicular to the ray CO intersecting BC at I. Prove that $OI \perp BC$.

Được quét bằng CamScanner

Problem T3/589. Find the integral part of number

$$A=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\\ ...+\frac{1}{\sqrt{2113}+\sqrt{2114}}+\frac{1}{\sqrt{2115}+\sqrt{2116}}.$$

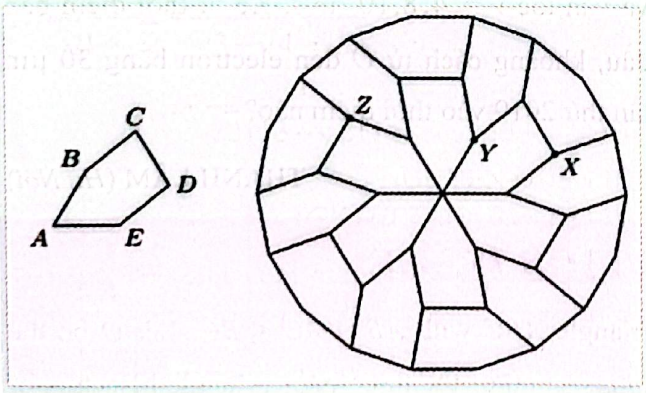
Problem T4/589. Given triangle ABC and M is moving point on the side BC (M is different from B and C). On the sides AB and AC respectively, take the points D and E such that the quadrilateral $ADME$ is a parallelogram. Prove that the circumcenter of the triangle ADE always lies on a fixed line.

Problem T5/589. Let a, b, c be real numbers greater than 1. Find the maximum value of the expression

$$P=\frac{\sqrt{b-1}}{a+b}+\frac{\sqrt{c-1}}{b+c}+\frac{\sqrt{a-1}}{c+a}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/589. A regular 18-sided polygon is divided into 18 pentagons which are both congruent to the pentagon $ABCDE$ (as shown in the figure). All sides of each pentagon have the same length.



a) Determine the measurement of the angles A, B, C, D and E.

b) Prove that three points X, Y, Z are collinear.

Problem T7/589. Given a triangle ABC. Prove that

$$\frac{\tan\frac{A}{4}}{\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}}+\frac{\tan\frac{B}{4}}{\tan\frac{C}{4}\tan\frac{A}{4}}+\frac{\tan\frac{C}{4}}{\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}}\geq 6+3\sqrt{3}.$$

Problem T8/589. Given a circle (O) with a diameter BD. Let Bx and Dy be the tangents to the circle at B and D respectively. A point A varies on Bx and A is different from B. The line d passing through B and perpendicular to AO intersects AD, the circle (O), and Dy at K, C, and S respectively. Let M be the intersection of CD and SO. Prove that $KM \parallel BD$.

Problem T9/589. Given real numbers a,b,c satisfying $2^a+2^b+2^c+2=2^{a+b+c}$.

Prove that $\frac{1}{\sqrt{8^a+1}}+\frac{1}{\sqrt{8^b+1}}+\frac{1}{\sqrt{8^c+1}}\geq 1$.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD PROBLEM

Problem T10/587. For each positive integer n, calculate the following integrals:

a) $\int_0^n e^{[x]}dx$ b) $\int_0^n \left[e^x\right]dx$

where $[a]$ denotes the integral part of a number real a.

Problem T11/589. Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ that satisfy

$$f\left(f(x)-y\right)=f\left(2x^2+y\right)-8yf(x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Problem T12/589. Let ABC be a triangle that is neither right-angled nor isosceles. Points D, E, and F lie on the lines BC, CA, and AB, respectively, such that triangle DEF is directly congruent to triangle ABC (that is, congruent with the same orientation). Let H and K be the orthocenters of triangles ABC and DEF, respectively. If O is the circumcenter of triangle DEF, prove that triangle HKO is equilateral.

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hanoi*)

Được quét bằng CamScanner



Bài T1/585. *Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho tất cả 21 phân số sau đây đều tối giản*

$$\frac{2}{n^3+3}, \frac{3}{n^3+5}, \frac{4}{n^3+7}, \ldots, \frac{21}{n^3+41}, \frac{22}{n^3+43}.$$

Lời giải. Mỗi phân số trong đề bài đều có dạng $\frac{m}{n^3-1+2m}$, trong đó m và n đều là các số nguyên dương, $2 \le m \le 22$. Dễ thấy rằng nếu n là số lẻ thì mẫu số của mỗi phân số trên là số chẵn nên với tử số là số chẵn thì phân số này không tối giản, do đó muốn các phân số trên đều là phân số tối giản ta chỉ cần xét các số nguyên dương n chẵn.

Với $n = 2$ lấy $m = 2^3 - 1 = 7$ thì phân số $\frac{7}{21}$ không là phân số tối giản.

Xét số chẵn $n > 2$. Mẫu số của phân số tùy ý nêu trên có dạng:

$$n^3 - 1 + 2m = (n-1)(n^2+n+1) + 2m,$$

nếu lấy tử số $m = n - 1$ hay là $n = m + 1$ thì tử số và mẫu số đều chia hết cho số nguyên dương m lớn hơn 1, do đó phân số này không tối giản. Từ đó do $2 \le m \le 22$ thì số chẵn n cần phải lớn hơn 22.

Xét $n = 24$, mẫu số của mỗi phân số trên có dạng

$$24^3 - 1 + 2m = (24-1)(24^2+24+1) + 2m$$
$$= 23.601 + 2m.$$

Các số 23 và 601 đều là các số nguyên tố nên chỉ có ước số nguyên dương là 1 và chính nó.

Với $2 \le m \le 22$ thì ước số chung lớn nhất của tử số và mẫu số là

$$(m, 23.601 + 2m) = (m, 23.601) = 1,$$

do đó tử số và mẫu số của 21 phân số trong đề bài đều là phân số tối giản. Vậy $n = 24$ là số nguyên dương nhỏ nhất để tất cả 21 phân số trong đề bài đều tối giản.

Nhận xét. Chúc mừng bạn *Phạm Quốc Vinh*, 6C2B, THCS Archimedes Academy, Cầu Giấy, **Hà Nội** , đã giải đúng bài này.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/585. *Tìm các số tự nhiên $\overline{abc}$ (có ba chữ số) sao cho thỏa mãn $\sqrt{\overline{abc}} = \sqrt{\overline{cba}} + 9$.*

Lời giải. Từ đẳng thức đã cho, ta thấy chữ số a phải lớn hơn chữ số c.

Bình phương hai vế của đẳng thức đã cho và biến đổi, ta thu được đẳng thức sau:

$$99(a-c) = 18\sqrt{\overline{cba}} + 81$$
$$\Rightarrow 11(a-c) = 2\sqrt{\overline{cba}} + 9 \quad (1).$$

Vì vế trái của (1) là một số nguyên dương nên suy ra $\overline{cba}$ phải là một số chính phương. Từ đó suy ra vế phải của (1) là số nguyên dương lẻ hay $a-c$ là một số nguyên dương lẻ (2).

Ta cũng có: $2\sqrt{\overline{cba}} + 9 > 2\sqrt{100} + 9 = 29$

và $2\sqrt{\overline{cba}} + 9 < 2\sqrt{1024} + 9 = 64 + 9 = 73.$

Suy ra: $29 < 11(a-c) < 73$ (3).

Từ (2) và (3), suy ra: $a-c \in \{3; 5\}$.

- Với $a-c=3$, thay vào (1) ta được: $\overline{cba} = 144$ $\Rightarrow \overline{abc} = 441$ (thoả mãn đẳng thức đã cho).
- Với $a-c=5$, thay vào (1) ta được: $\overline{cba} = 529$ $\Rightarrow \overline{abc} = 925$ (không thoả mãn đẳng thức đã cho).

Vậy số tự nhiên thoả mãn yêu cầu bài toán là $\overline{abc} = 441$.

Nhận xét. Phương pháp giải bài toán này kết hợp khéo léo giữa Đại số và Số học bằng cách bình phương hai vế và phân tích cấu tạo số để triệt tiêu chữ số hàng chục. Điểm mấu chốt là dùng *tính chất số chính phương và chặn khoảng giá trị* của số có ba chữ số để thu hẹp tối đa các trường hợp của hiệu $a-c$. Cuối cùng, việc thử lại điều kiện bài toán là bước bắt buộc để loại bỏ các nghiệm ngoại lai và tìm ra kết quả chính xác. Trong các bạn gửi bài đến Toà soạn có bạn *Võ Nguyễn Tâm An*, 7A2, THCS Cần

Được quét bằng CamScanner

Được, Cần Được, **Tây Ninh** có lời giải tốt và giống với cách giải trên của tác giả. Cũng tuyên dương các bạn có tên sau: **Hà Nội:** *Phạm Quốc Vinh*, 6C2B, THCS Archimedes Academy, Cầu Giấy; **Nghệ An:** *Trương Đình Quốc Anh*, 7E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Việt Anh, Đặng Văn Hoàng*, 7A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc (cho lời giải đúng nhưng trình bày hơi dài dòng).

TRẦN THỊ KIM THANH

Bài T3/585 . *Cho các số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=2024c^2$ và $a-b$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng $180c+1$ là số chính phương.*

Lời giải. Ta có:

$ab+bc+ca=2024c^2 \Rightarrow ab+bc+ca+c^2=2025c^2$

hay $(a+c)(b+c)=(45c)^2$ (*).

Gọi $d=(a+c;\ b+c)$, suy ra:

$a+c \vdots d$ và $b+c \vdots d \Rightarrow a-b \vdots d \Rightarrow d=1$ hoặc $d=a-b$ (vì $a-b$ là số nguyên tố) .

• TH1: Nếu $d=1$, kết hợp với (*) suy ra:

$\begin{cases} a+c=m^2 \\ b+c=n^2 \end{cases}$ (1), với m, n là các số nguyên dương và $(m; n) = 1$.

Ta có $a-b=(a+c)-(b+c)=m^2-n^2=(m-n)(m+n)$, kết hợp điều kiện $a-b$ là số nguyên tố và $m - n < m + n$ với mọi số nguyên dương m và n nên $m - n = 1$ hay $m = n + 1$ (2).

Thay (1) và (2) vào (*) có: $45c = (n + 1)n$

$\Leftrightarrow 180c + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2$

$\Leftrightarrow 180c + 1$ là số chính phương.

• TH2: Nếu $d=a-b$, kết hợp với (*) suy ra:

$\begin{cases} a+c=(a-b)x \\ b+c=(a-b)y \end{cases}$ (3), với x, y là các số tự nhiên và $(x; y) = 1$.

Ta có: $a-b=(a+c)-(b+c)=(a-b)(x-y)$, kết hợp điều kiện $a-b$ là số nguyên tố nên $x - y = 1$ hay $x=y+1$ (4). Thay (3) và (4) vào (*) có:

$$(a-b)^2 y(y+1)=(45c)^2 \Rightarrow y(y+1)$$

là số chính phương $\Rightarrow y=0 \Rightarrow c=0$.

Do đó $180c + 1 = 1$ là số chính phương.

Nhận xét. Đây là bài toán về số chính phương khá quen thuộc, ta sử dụng định lí: *Với a, b là các số tự nhiên thỏa mãn $(a; b) = 1$ và $ab = n^2$ với n là số nguyên dương thì a và b đều là số chính phương.* Có nhiều bạn đọc đã gửi bài giải đến tòa soạn, hầu hết các bạn đều có lời giải đúng, tuy nhiên còn có một số bạn xét thiếu trường hợp $c = 0$.

Ngoài cách giải trên, ta có thể giải theo hướng sau: đặt $p = a - b$ với p là số nguyên tố, suy ra $a = p + b$, thay vào điều kiện $ab+bc+ca=2024c^2$ và biến đổi được $p^2=(2b+p+92c)(2b+p-88c)$ sau đó lập luận tương tự như lời giải phía trên, chú ý xét $c = 0$ và c khác 0. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt hơn cả:

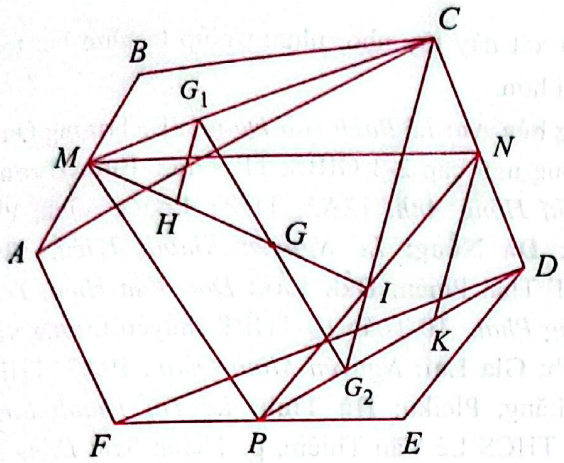
Cộng hòa Áo: *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp 2,3 GIBS, TP. Graz; **Hà Nội:** *Nguyễn Minh Tuấn*, 8A, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, *Nguyễn Vũ Khang*, 7T, THCS Lương Thế Vinh, Tân Triều; **Vĩnh Long:** *Đoàn Minh Phúc*, 9/1, THCS Nguyễn Khuyến, Tân Ngãi; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc; **TP. Hồ Chí Minh:** *Hồ Đình Xuân Nhi*, 8/7, THCS Phạm Văn Chiêu, Thông Tây Hội; **Nghệ An:** *Lê Hoàng Long*, 7A1, THCS Hòa Hiếu 2, Tây Hiếu, *Nguyễn Việt Anh, Đặng Văn Hoàng*, 7A1, THCS Quán Hành, Nghi Lộc, *Đặng Ngọc Minh*, 8C, THCS Đặng Thai Mai; **Quảng Trị:** *Nguyễn Chính Quân*, 9^2, THCS Đồng Hải; **Thanh Hóa:** *Phùng Quang Minh*, 8K,THCS Trần Mai Ninh, Hạc Thành, *Nguyễn Vũ Đức Anh*, 8A, TH&THCS Lương Chí, Tĩnh Gia; **Hà Tĩnh:** *Lê Thị Thanh Bình*, 8A3, THCS Lê Văn Thiêm, Thành Sen; **Phú Thọ:** *Chu Ngọc Ánh, Vũ Tuấn Minh*, 9A, THCS Lý Nam Đế, Vạn Xuân, *Nguyễn Bảo Châu*, 8A6, THCS Yên Lạc; **Quảng Ninh:** *Trần Phương Dung*, 9A, THCS Bắc Sơn.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG

Bài T4/585. *Cho hình lục giác lồi $ABCDEF$ bất kỳ. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, EF. Chứng minh rằng trọng tâm của tam giác MNP là trung điểm của đoạn thẳng nối trọng tâm của hai tam giác ABC và DEF.*

Lời giải.

Được quét bằng CamScanner



Gọi G, G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác MNP, ABC, DEF. Gọi I, K, H lần lượt là trung điểm các đoạn NP, G_2D, GM. Theo tính chất trọng tâm, G là trung điểm HI, G_2 là trung điểm PK. Áp dụng tính chất đường trung bình ta có:

$G_2I \,//\, NK$; $NK \,//\, G_2C$ nên C, I, G_2 thẳng hàng.

Hơn nữa: $$G_2I=\frac{1}{2}NK=\frac{1}{4}G_2C$$

$$\Rightarrow G_2I=\frac{1}{3}CI \quad (1).$$

Mặt khác, áp dụng hệ quả định lí Thalès trong tam giác MIC ta có:

$$G_1H \,//\, CI \text{ và } \frac{HG_1}{CI}=\frac{MG_1}{MC}=\frac{1}{3} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$G_2I \,//\, G_1H \text{ và } G_2I = G_1H.$$

Do đó HG_1IG_2 là hình bình hành, mà G là trung điểm HI nên G là trung điểm G_1G_2.

Nhận xét. Bạn *Andrea Fanchini*, Cantù, **Italy** cho lời giải bằng cách sử dụng tọa độ trọng tâm (barycentric coordinates), ngoài ra, các bạn dưới đây có lời giải tốt:

TP. HCM: *Hồ Đình Xuân Nhi*, 8/7, THCS Phạm Văn Chiêu, p. Thông Tây Hội; **Thanh Hóa:** *Mai Nam Phong*, 8K, THCS Trần Mai Ninh, p. Hạc Thành; *Nguyễn Bá Đức Anh*, 8A, TH và THCS Lương Chi, Tĩnh Gia; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, THCS Quang Trung, Bảo Lộc (HS không ghi lớp); **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, trường QT song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/585. *Cho đa thức $P(x)$ hệ số nguyên, có tổng tất cả các hệ số bằng 1 và thỏa mãn $P(-x)=-P(x)$ với mọi số thực x. Tìm tất cả các số nguyên n thỏa mãn*

$$P(n^{1996}+n^3)+P(n^{29})=n^{2025} \quad (*).$$

Lời giải. Từ giả thiết suy ra:

$$P(-0)=-P(0)\Rightarrow P(0)=0.$$

$P(1)$ chính là tổng các hệ số của đa thức $P(x)$ nên $P(1)=1$; $P(-1)=-P(1)=-1$; $P(n^{29})=-P(-n^{29})$.

Áp dụng tính chất: *Với $P(x)$ là đa thức có hệ số nguyên thì $P(a)-P(b)$ chia hết cho $a-b$ với mọi số nguyên a, b,* ta có: Với n là số nguyên thì

$P(n^{1996}+n^3)+P(n^{29})=P(n^{1996}+n^3)-P(-n^{29})$ chia hết cho $n^{1996}+n^3-(-n^{29})=n^{1996}+n^{29}+n^3$.

Do đó n^{2025} chia hết cho $n^{1996}+n^{29}+n^3$.

Nhận thấy: $n^{1996}+n^{29}+n^3$

$=(n^{1996}-n)+(n^{29}-n^2)+(n^3-1)+(n^2+n+1)$

$=n(n^{1995}-1)+n^2(n^{27}-1)+(n^3-1)+(n^2+n+1)$

$=n(n^{3.665}-1)+n^2(n^{3.9}-1)+(n^3-1)+(n^2+n+1).$

Mà $n^{3k}-1$ $(k\in\mathbb{N}^*)$ chia hết cho n^3-1; $n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$ nên $n^{1996}+n^{29}+n^3$ chia hết cho n^2+n+1.

Do đó n^{2025} chia hết cho n^2+n+1 (1).

Lại có $n^{2025}-1=n^{6.375}-1$ chia hết cho n^3-1 nên $n^{2025}-1$ chia hết cho n^2+n+1 (2).

Từ (1) và (2) suy ra 1 chia hết cho n^2+n+1. Do đó n^2+n+1 bằng 1 hoặc -1.

+ Với $n^2+n+1=1$ thì $n(n+1)=0$. Do đó $n=0$ hoặc $n=-1$. Khi $n=0$, ta có:

$P(0^{1996}+0^3)+P(0^{29})=P(0)+P(0)=0=0^{2025}$

(thỏa mãn (*)). Khi $n=-1$, ta có:

$P((-1)^{1996}+(-1)^3)+P((-1)^{29})=P(0)+P(-1)$

$=-1=(-1)^{2025}$

(thỏa mãn (*)).

+ Với $n^2+n+1=-1$ thì $n^2+n+2=0$. Mặt khác $n^2+n+2=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+1\frac{3}{4}>0,\forall n$. Do đó trường hợp này không xảy ra.

Được quét bằng CamScanner

Vậy các số nguyên n thỏa mãn (*) là 0 và -1.

Nhận xét. Đa số các bạn tham gia giải bài này đều cho kết quả đúng, nhưng lập luận còn rất dài dòng. Tuyên dương các bạn sau có lời giải lập luận chặt chẽ và ngắn gọn:

Hà Nội: *Nguyễn Thái Vinh*, 7A6, THCS Giảng Võ; **Nghệ An:** *Châu Đặng Ngọc Minh*, 8C, THCS Đặng Thai Mai; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, THCS Quang Trung, Bảo Lộc;

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/585. *Gọi*

$$S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2025^2}+\frac{1}{2026^2}}.$$

Tìm phần nguyên của S.

Lời giải (của tất cả các bạn). Xét số hạng tổng quát $A_n=\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$. Ta có:

$$1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}$$

$$=\frac{n^2(n^2+2n+1)+(n^2+2n+1)+n^2}{n^2(n+1)^2}$$

$$=\frac{n^4+2n^3+3n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}.$$

Vậy $A_n=\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$

$$=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Do đó: $S=\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{2025}-\frac{1}{2026}\right)=2025+\left(1-\frac{1}{2026}\right).$

Suy ra: $2025<S<2026$. Vậy $[S]=2025$.

Nhận xét. Bài này dễ nên nhiều bạn, thậm chí nhiều bạn THCS tham gia giải và giải đúng. Tuy nhiên, không có bạn nào nhận xét, thí dụ, A_n là số hữu tỉ. Nhận xét này tuy nhỏ, nhưng giúp ta nhìn bài toán thú vị hơn.

Cộng hòa Áo: *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp 2-3 GIBS, TP. Graz. **Bình Dương:** *Lê Thị Hồng Ánh*, 12A3, THPT Phước Vĩnh, Phú Giáo; **Đà Nẵng:** *Lê Nguyễn Khánh Triều*, 12/5, THPT Thái Phiên; **Đắk Lắk:** *Đào Văn Hiển, Trần Quang Phát*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Gia Lai:** *Nguyễn Minh Quân*, 10A7, THPT Chi Lăng, Pleiku; **Hà Tĩnh**: *Lê Thị Thanh Bình*, 8A3, THCS Lê Văn Thiêm, p. Thành Sen; *Đặng Sỹ Phước Đức*, 10 Toán 1, *Ngô Bùi Anh Khoa, Bùi Tùng Lâm, Lê Minh Mạnh*, 11 Toán 1, *Phạm Việt Lê Huy*, 11 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc; **Nghệ An:** *Đặng Ngọc Minh*, 8C, THCS Đặng Thai Mai, *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 11A3, THPT Hoàng Mai; **Phú Thọ:** *Nguyễn Bảo Châu*, 8A6, *Nguyễn Hữu Đức Trí*, 8A6, THCS Yên Lạc, xã Tam Hồng; *Chu Ngọc Ánh, Vũ Tuấn Minh*, 9A, THCS Lý Nam Đế, xã Vạn Xuân; **Quảng Ninh:** *Trần Phương Dung*, 9A, THCS Bắc Sơn; **Quảng Trị:** *Nguyễn Chính Quân*, 9^2, THCS Đồng Hải, *Hoàng Hà Uyên Nhi, Nguyễn Trần Bảo Ngọc*, 10 Toán 1, *Phan Viết Hoàng, Lê Phước Quý*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Tây Ninh:** *Trần Lê Trọng Phúc*, 11T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Bá Đức Anh*, 8A, THCS Lương Chí, Tĩnh Gia; *Phùng Quang Minh*, 8K, THCS Trần Mai Ninh, p. Hạc Thành; **TP. Hồ Chí Minh:** *Hồ Đinh Xuân Nhi*, 8/7, THCS Phạm Văn Chiêu, p. Thông Tây Hội; *Hồ Hữu Chí, Nguyễn Minh Trí*, 11A6, THPT Nguyễn Công Trứ, p. Thông Tây Hội; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Trường Duy*, 9/5, THCS Mỹ Hóa, p.Bến Tre; *Đoàn Minh Phúc*, 9/1, THCS Nguyễn Khuyến, p. Tân Ngãi; *Lê Hoàng Khang*, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T7/585. *Tìm tất cả các số tự nhiên a, b, c sao cho* $\sqrt{a+2\sqrt{3}}+\sqrt{b+4\sqrt{3}}=\sqrt{c+12\sqrt{3}}$.

Lời giải. Bình phương hai vế phương trình đã cho, ta có: $a+b+6\sqrt{3}+2\sqrt{(a+2\sqrt{3})(b+4\sqrt{3})}=c+12\sqrt{3}$

hay $2\sqrt{ab+24+4a\sqrt{3}+2b\sqrt{3}}=c-a-b+6\sqrt{3}$.

Được quét bằng CamScanner

Bình phương tiếp ta được:

$$4ab+96+(16a+8b)\sqrt{3}$$
$$=(c-a-b)^2+12(c-a-b)\sqrt{3}+108$$

hay $4ab-12-(c-a-b)^2=(12c-28a-20b)\sqrt{3}$.

Nếu $12c-28a-20b\neq 0$ thì

$$\sqrt{3}=\frac{4ab-12-(c-a-b)^2}{12c-28a-20b}$$

là số hữu tỉ (vô lí).

Như vậy ta phải có:

$12c-28a-20b=0$ và $4ab-12-(c-a-b)^2=0$.

Suy ra $c=\frac{1}{3}(7a+5b)$ và

$$4ab-12=\left(\frac{7a+5b}{3}-a-b\right)^2=\left(\frac{4a+2b}{3}\right)^2.$$

Suy ra $9(ab-3)=(2a+b)^2$ hay $4a^2-5ab+b^2=-27$ hay $(4a-b)(a-b)=-27$. Suy ra một trong hai số $4a-b$, $a-b$ phải chia hết cho 3, mà $(4a-b)-(a-b)=3a$ chia hết cho 3 nên cả hai số $4a-b$, $a-b$ đều chia hết cho 3. Hơn nữa $4a-b\geq a-b$ nên chỉ xảy ra hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $4a-b=9$ và $a-b=-3$. Ta tìm được $a=4$, $b=7$, $c=21$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $4a-b=3$ và $a-b=-9$. Ta tìm được $a=4$, $b=13$, $c=31$ (thỏa mãn).

Vậy có đúng hai bộ số thỏa mãn đề bài là:

$$(a,b,c)\in\{(4,7,21),(4,13,31)\}.$$

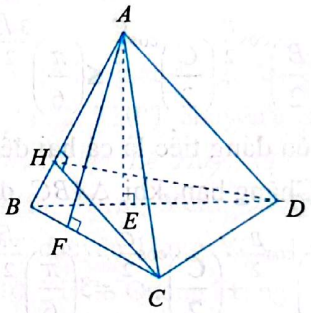
Nhận xét. Đây là một bài toán số học đơn giản nên có nhiều bạn tham gia gửi lời giải về tòa soạn. Đa số các bạn đều có lời giải đúng và giải theo cách trên. Có một số ít bạn có lời giải chưa đúng hoàn toàn do lập luận sai hoặc xét thiếu trường hợp. Bạn *Hồ Đình Xuân Nhi* là bạn duy nhất có chứng minh $\sqrt{3}$ là số vô tỉ. Đó là việc làm cần thiết để lời giải thêm chặt chẽ và để không bị trừ điểm trong các kì thi nếu có xuất hiện dạng toán này. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

TP. Hồ Chí Minh: *Hồ Đình Xuân Nhi*, 8/7, THCS Phạm Văn Chiêu, *Hồ Hữu Chí*, 11A6, THPT Nguyễn Công Trứ; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz; **Quảng Trị:** *Lê Phước Quý*, 11 Toán 2, *Nguyễn Trần Bảo Ngọc*, 10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Đà Nẵng:** *Lê Nguyễn Khánh Triều*, 12/5, THPT Thái Phiên; **Lâm Đồng:** *Phạm Hải Triều*, 8A10, *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung; **Hà Tĩnh:** *Ngô Bùi Anh Khoa*, *Nguyễn Viết Thế Tài*, *Nguyễn Tùng Duy*, *Bùi Tùng Lâm*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** *Phùng Quang Minh*, 8K, THCS Trần Mai Ninh; *Nguyễn Bá Đức Anh*, 8A, TH, THCS Lương Chí; **Hà Nội:** *Nguyễn Minh Tuấn*, 8, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam.

HOÀNG NGỌC MINH

Bài T8/585. *Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác nhọn. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng BD, BC. Chứng minh rằng các điểm C, D, E, F nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi các đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau.*

Lời giải.



Kẻ đường cao CH của tam giác ABC. Ta có A,C,F,H nằm trên đường tròn đường kính AC nên $BH\cdot BA=BF\cdot BC$.

+ Nếu C,D,E,F cùng nằm trên một đường tròn thì $BE\cdot BD=BF\cdot BC$.

Ta thu được $BH\cdot BA=BF\cdot BC=BE\cdot BD$, suy ra A,H,E,D nằm trên đường tròn đường kính AD. Từ đó $AB\perp DH$. Mà $AB\perp CH$ nên $AB\perp(CHD)$. Vì vậy $AB\perp CD$.

+ Nếu $AB\perp CD$, khi đó $AB\perp(CHD)$, suy ra $AB\perp DH$. Do đó A,H,E,D nằm trên đường tròn đường kính AD. Ta thu được $BE\cdot BD=BH\cdot BA$. Mà ta đã có $BH\cdot BA=BF\cdot BC$ nên

$$BE\cdot BD=BF\cdot BC.$$

Được quét bằng CamScanner

Suy ra C, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

Nhận xét. Đây là một bài toán khá cơ bản, tuy nhiên không có nhiều bạn tham gia giải. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Vĩnh Long:** *Lê Hoàng Khang*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc; **Hưng Yên:** *Đỗ Quang Anh*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên, **TP.Hồ Chí Minh:** *Hồ Hữu Trí*, 11A6, THPT Nguyễn Công Trứ; **Đà Nẵng:** *Lê Nguyễn Khánh Triều*, 12/5, THPT Thái Phiên; **Tây Ninh:** *Nguyễn Anh Thư*, THPT chuyên Trần Văn Giàu.

NGUYỄN VĂN LINH

Bài T9/585. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có:* $\left(\frac{A}{2}\right)^{\cos\frac{A}{2}}+\left(\frac{B}{2}\right)^{\cos\frac{B}{2}}+\left(\frac{C}{2}\right)^{\cos\frac{C}{2}}\le\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$.

Lời giải. Do sơ suất trong lúc chế bản nên đề bài đã làm sai lệch so với đề bài gốc của tác giả. Đề bài gốc như sau:

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC bất kì ta có: $\left(\frac{A}{2}\right)^{\cos\frac{A}{2}}\left(\frac{B}{2}\right)^{\cos\frac{B}{2}}\left(\frac{C}{2}\right)^{\cos\frac{C}{2}}\le\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$.

Thế nhưng điều đáng tiếc là cả hai đề bài trên đều không đúng. Chẳng hạn, khi ΔABC đều thì

$$\left(\frac{A}{2}\right)^{\cos\frac{A}{2}}+\left(\frac{B}{2}\right)^{\cos\frac{B}{2}}+\left(\frac{C}{2}\right)^{\cos\frac{C}{2}}=3\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\approx 1{,}71\ge\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\approx 0{,}186.$$

Xét tam giác ABC với $\widehat{A}=\frac{\pi}{2},\widehat{B}=\frac{\pi}{3},\widehat{C}=\frac{\pi}{6}$ thì

$$\left(\frac{A}{2}\right)^{\cos\frac{A}{2}}\left(\frac{B}{2}\right)^{\cos\frac{B}{2}}\left(\frac{C}{2}\right)^{\cos\frac{C}{2}}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{\pi}{12}\right)^{\cos\frac{\pi}{12}}$$

$$\approx 0{,}13\ge\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\approx 0{,}186.$$

Rất có thể do đề bài sai nên không có nhiều bạn gửi lời giải hay ý kiến về tòa soạn. Bạn *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc, **Lâm Đồng** và bạn *Phan Viết Hoàng*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Trị** cũng phát hiện được đề bài sai nhưng không đề xuất bất kì ý kiến nào. Các bạn: *Vũ Duy Mạnh*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 11A3, THPT Hoàng Mai, **Nghệ An**; *Hồ Hữu Chí*, 11A6, THPT Nguyễn Công Trứ, **TP. Hồ Chí Minh** đều phát hiện được đề bài sai và đưa ra đề xuất chỉnh sửa lại thành:

$$\left(\frac{A}{2}\right)^{\cos\frac{A}{2}}+\left(\frac{B}{2}\right)^{\cos\frac{B}{2}}+\left(\frac{C}{2}\right)^{\cos\frac{C}{2}}\le 3\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Thế nhưng tất cả lời giải các bạn đưa ra cho phiên bản đã chỉnh sửa của mình đều không đúng. Ngoài ra, bạn *Lê Hoàng Khang*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long** do không phát hiện được đề bài sai nên đã gửi một lời giải sai đến tòa soạn. Tòa soạn thành thật xin lỗi bạn đọc.

NGUYỄN VIỆT HÙNG

Bài T10/585. *Cho dãy số (u_n) xác định như sau*

$$\begin{cases}u_0=2,\ u_1=2\sqrt{5}\\ u_{n+2}=2\sqrt{5}u_{n+1}-4u_n,\ n=0,1,\ldots\end{cases}$$

a) *Chứng minh rằng phương trình*

$$u_{2019}x^4-u_{2019}x^2-5u_{2020}x+2020=0\ (1).$$

có ít nhất hai nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;2\sqrt{5})$.

b) *Tìm tất cả các số thực α sao cho dãy số (v_n) xác định bởi $v_n=C_n^0u_n+\sum_{k=1}^{n}\alpha^kC_n^ku_{n-k},\forall n=0,1,2,\ldots$ có giới hạn hữu hạn.*

Lời giải. a) Trước tiên ta xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) đã cho. Từ giả thiết ta có phương trình đặc trưng:

$$\lambda^2-2\sqrt{5}\lambda+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\lambda=\sqrt{5}-1\\ \lambda=\sqrt{5}+1\end{array}\right.$$

Do đó số hạng tổng quát của u_n có dạng:

$$u_n=A(\sqrt{5}-1)^n+B(\sqrt{5}+1)^n.$$

Do $\begin{cases}u_0=2\\ u_1=2\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=2\\ A(\sqrt{5}-1)+B(\sqrt{5}+1)=2\sqrt{5}\end{cases}$

Được quét bằng CamScanner

$\Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \end{cases}$. Vậy $u_n=(\sqrt{5}-1)^n+(\sqrt{5}+1)^n$.

Xét dãy số $\mu_n=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}, n=0,1,2,...$

Đặt $c_1=\sqrt{5}-1$, $c_2=\sqrt{5}+1$. Ta có:

$u_{n+2}.u_n-u_{n+1}^2=(c_1^{n+2}+c_2^{n+2})(c_1^n+c_2^n)-(c_1^{n+1}+c_2^{n+1})^2$

$=(c_1c_2)^n(c_1^2+c_2^2)-2(c_1c_2)^{n+1}=12(c_1c_2)^n-8(c_1c_2)^n$

$=4(c_1c_2)^n=4^{n+1}>0, \forall n=0,1,2,...$

$\Rightarrow \mu_{n+1}-\mu_n>0, \forall n=0,1,2,...$ là dãy tăng. Hơn nữa: $\lim \mu_n=\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

$$=\lim \frac{(\sqrt{5}-1)^{n+1}+(\sqrt{5}+1)^{n+1}}{(\sqrt{5}-1)^n+(\sqrt{5}+1)^n}=\sqrt{5}+1.$$

Do đó: $\mu_0<\mu_n<\sqrt{5}+1$

hay $\sqrt{5}<\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<\sqrt{5}+1, \forall n=0,1,2,...$ (*).

Đặt $f(x)=u_{2019}x^4-u_{2019}x^2-5u_{2020}x+2020$. Ta có $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hơn nữa, $f(0)=2020>0$.

$$f(\sqrt{5})=25u_{2019}-5u_{2019}-5\sqrt{5}u_{2020}+2020$$
$$=20u_{2019}-5\sqrt{5}u_{2020}+2020.$$

Từ (*) ta có: $u_{2020}>\sqrt{5}u_{2019}\Rightarrow -5\sqrt{5}u_{2020}<-25u_{2019}$

$\Rightarrow f(\sqrt{5})<-5u_{2019}+2020<0$.

$f(2\sqrt{5})=380u_{2019}-10\sqrt{5}u_{2020}+2020$.

Từ (*) suy ra: $u_{2020}<(\sqrt{5}+1)u_{2019}$

$\Rightarrow -10\sqrt{5}u_{2020}>-10\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)u_{2019}=(-50-10\sqrt{5})u_{2019}$

$\Rightarrow f(2\sqrt{5})>(330-10\sqrt{5})u_{2019}+2020>0$.

Vậy: $f(0)f(\sqrt{5})<0, f(\sqrt{5})f(2\sqrt{5})<0$. Suy ra PT(1) có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0,\sqrt{5})$ và có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(\sqrt{5},2\sqrt{5})$. Vậy PT(1) có ít nhất 2 nghiệm trong khoảng $(0,2\sqrt{5})$.

b) Ta có: $v_n=C_n^0u_n+\sum_{k=1}^{n}\alpha^kC_n^ku_{n-k}, \forall n=0,1,2,...$

Thay $u_n=c_1^n+c_2^n$ với $c_1=\sqrt{5}-1, c_2=\sqrt{5}+1$ ta có: $v_n=C_n^0(c_1^n+c_2^n)+\sum_{k=1}^{n}\alpha^kC_n^k(c_1^{n-k}+c_2^{n-k})$

$=\left(C_n^0c_1^n+C_n^1c_1^{n-1}\alpha+...+C_n^n\alpha^n\right)+\left(C_n^0c_2^n+C_n^1c_2^{n-1}\alpha+...+C_n^n\alpha^n\right)$

$=(c_1+\alpha)^n+(c_2+\alpha)^n$.

Hơn nữa $c_1+\alpha<c_2+\alpha$ nên dãy (v_n) có giới hạn hữu hạn $\Leftrightarrow -1<c_1+\alpha<c_2+\alpha\le 1\Leftrightarrow \begin{cases} -1<c_1+\alpha \\ c_2+\alpha\le 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1<\sqrt{5}-1+\alpha \\ \sqrt{5}+1+\alpha\le 1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha>-\sqrt{5} \\ \alpha\le -\sqrt{5} \end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy không tồn tại số thực α để dãy (v_n) có giới hạn hữu hạn.

Nhận xét. 1) Sử dụng tính liên tục của hàm $f(x)$ ta cũng có thể chứng minh PT(1) có ít nhất một nghiệm trong mỗi khoảng (0, 1) và $(1,2\sqrt{5})$.

2) Ngoài cách xác định số hạng tổng quát u_n thông qua phương trình đặc trưng của dãy truy hồi như trên, ta có thể xác định và chứng minh công thức này bằng quy nạp. Lời giải của một số bạn làm theo hướng này.

3) Các bạn sau có lời giải đúng: **An Giang:** *Nguyễn Hoài Nhanh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Hà Tĩnh:** *Phan Viết Lê Huy*, 11 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** *Đỗ Quang Anh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung.

TRẦN HỮU NAM

Bài T11/585. *Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ biết*

$$f(x+1)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}, f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}.$$

a) *Chứng minh rằng* $\displaystyle\int_0^1 \frac{f\left(x+\frac{1}{2}\right)}{f(x)}dx\ge 1$.

b) *Xác định tất cả các số α sao cho*

$$\int_0^1 \frac{f(x+\alpha)}{f(x)}dx\ge 1.$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

a) Ta sử dụng biến đổi

Được quét bằng CamScanner

$$\int_0^1 \frac{f\left(x+\frac{1}{2}\right)}{f(x)}dx=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f\left(x+\frac{1}{2}\right)}{f(x)}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f\left(x+\frac{1}{2}\right)}{f(x)}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f\left(x+\frac{1}{2}\right)}{f(x)}dx+\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(t+1)}{f\left(t+\frac{1}{2}\right)}dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f\left(x+\frac{1}{2}\right)}{f(x)}dx+\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{f\left(t+\frac{1}{2}\right)}dt \text{ (do } f(x+1)=f(x))$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{f\left(x+\frac{1}{2}\right)}{f(x)}+\frac{f(x)}{f\left(x+\frac{1}{2}\right)}\right)dx\geq 2\int_0^{\frac{1}{2}}dx=1.$$

b) Xét $a\in\mathbb{R}$. Sử dụng bất đẳng thức $e^u\geq u+1$ với mọi $u\in\mathbb{R}$, ta thu được:

$$e^{\ln f(x+a)-\ln f(x)}\geq \ln f(x+a)-\ln f(x)+1, \forall x\in\mathbb{R}$$

hay $\frac{f(x+a)}{f(x)}\geq \ln f(x+a)-\ln f(x)+1, \forall x\in\mathbb{R}.$

Suy ra:

$$\int_0^1 \frac{f(x+a)}{f(x)}dx\geq \int_0^1 \ln f(x+a)dx-\int_0^1 \ln f(x)dx+1 \quad (1).$$

Vì hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}$ nên với mọi số thực a ta đều có:

$$\int_a^{a+1} f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx.$$

Để ý rằng hàm số $g(x):=\ln f(x+a)$ cũng là hàm tuần hoàn chu kỳ 1 trên $\mathbb{R}$ nên

$$\int_0^1 \ln f(x+a)dx=\int_a^{a+1} \ln f(x)dx=\int_0^1 \ln f(x)dx.$$

Thay vào (1) ta thu được $\int_0^1 \frac{f(x+a)}{f(x)}dx\geq 1$, ứng với mọi $a\in\mathbb{R}$.

Nhận xét. Cũng có thể giải quyết câu b) dựa vào tính chất: $a=[a]+\alpha$ với $\alpha\in[0,1)$ và xét tính chất của hàm số lồi khả vi ($f''(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$):

$$g(x)\geq g(u)+g'(u)(x-u),$$

ta cũng thu được bất đẳng thức

$$\int_0^1 \frac{f(x+a)}{f(x)}dx\geq 1, \text{ ứng với mọi } a\in\mathbb{R}.$$

Có bạn giải bằng cách sử dụng phương trình hàm dạng sai phân trong lớp hàm tuần hoàn chu kỳ 1 cũng cho kết quả đúng.

Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Đà Nẵng:** *Lê Nguyễn Khánh Triều,* 12/5, THPT Thái Phiên; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Viết Thế Tài* , 11T1, THPT Chuyên Hà Tĩnh; **Lâm Đồng:** Hồ Đại Việt, 9A, THCS Quang Trung, Bảo Lộc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/585. *Cho tam giác ABC và điểm M bất kỳ trong mặt phẳng. Chứng minh rằng:*

$$\frac{MA^2}{BC^2}+\frac{MB^2}{CA^2}+\frac{MC^2}{AB^2}\geq\frac{BC^2+CA^2+AB^2}{(MA+MB+MC)^2}.$$

Lời giải. Ta cần có ba bổ đề.

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC và điểm M.*

1) *Nếu* $\max\{\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C}\}<120^\circ$ *thì tồn tại điểm T nằm trong tam giác sao cho*

$\widehat{BTC}=\widehat{CTA}=\widehat{ATB}=120^\circ$ và $MA+MB+MC$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M\equiv T$.

2) *Nếu* $\max\{\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C}\}\geq 120^\circ$ *thì*

a) *Khi* $\widehat{A}\geq 120^\circ$

$MA+MB+MC$ *nhỏ nhất* $\Leftrightarrow M\equiv A.$

b) *Khi* $\widehat{B}\geq 120^\circ$

$MA+MB+MC$ *nhỏ nhất* $\Leftrightarrow M\equiv B.$

c) *Khi* $\widehat{C}\geq 120^\circ$

$MA+MB+MC$ *nhỏ nhất* $\Leftrightarrow M\equiv C.$

Bổ đề 1 rất quen thuộc, không trình bày cách chứng minh ở đây.

Điểm T trong bổ đề 1 được gọi là điểm Fermat của tam giác ABC.

Chú ý: Ký hiệu $\sum$ ở phần dưới hiểu là $\sum_{cyc}$.

Bổ đề 2. *Cho tam giác ABC và điểm M, ta có*

$$\sum\frac{MA^2}{a^2}\geq\sum\frac{a^4}{b^2c^2}.$$

Được quét bằng CamScanner

Chứng minh. Với $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ và $\forall M$, ta có:

$$\left(\sum x\overrightarrow{MA}\right)^2=\sum x^2MA^2+2\sum yz\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$$
$$=\sum x^2MA^2+\sum yz\left(MB^2+MC^2-a^2\right)$$
$$=\left(\sum x\right)\left(\sum xMA^2\right)-\sum yza^2\geq 0.$$

Do đó: $\left(\sum x\right)\left(\sum xMA^2\right)\geq\sum yza^2$.

Từ đó, đặt $x=\frac{1}{a^2},y=\frac{1}{b^2},z=\frac{1}{c^2}$, suy ra:

$$\sum\frac{MA^2}{a^2}\geq\sum\frac{a^4}{b^2c^2}.$$

Bổ đề 3. *Cho tam giác ABC và điểm M, ta có:*

$$\sum\frac{a^4}{b^2c^2}\geq\frac{\sum a^2}{\left(\sum MA\right)^2}.$$

Chứng minh. Có hai trường hợp xảy ra.

Trường hợp 1: $\max\left\{\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C}\right\}<120^\circ$.

Gọi T là điểm Fermat của tam giác ABC. Theo bổ đề 1, ta có: $\sum MA\geq\sum TA$ (1).

Đặt $TA=x,TB=y,TC=z$. Không mất tính tổng quát giả sử $x+y+z=1$ (2).

Đặt $\sum yz=m$. Vì $\widehat{BTC}=120^\circ$ nên, theo định lí côsin, ta có:

$$a^2=y^2+yz+z^2=\left(\sum x\right)^2-\left(\sum yz\right)-x\left(\sum x\right)$$
$$=1-m-x.$$

Tương tự: $b^2=1-m-y,c^2=1-m-z$.

Vậy

- $\sum a^2=\sum(1-m-x)=2-3m$.
- $\sum a^4=\sum(1-m-x)^2=3(1-m)^2-2(1-m)\left(\sum x\right)+\sum x^2$
$$=3(1-m)^2-2(1-m)+(1-2m)=2-6m+3m^2.$$
- $\sum b^2c^2=\frac{\left(\sum a^2\right)^2-\left(\sum a^4\right)}{2}=\frac{(2-3m)^2-\left(2-6m+3m^2\right)}{2}$
$$=1-3m+3m^2.$$

Từ đó, chú ý rằng $0<m=\sum yz\leq\frac{1}{3}\left(\sum x\right)^2=\frac{1}{3}$, suy ra: $\left(\sum a^4\right)-\left(\sum a^2\right)\left(\sum b^2c^2\right)=$

$$=\left(2-6m+3m^2\right)-(2-3m)\left(1-3m+3m^2\right)$$
$$=3m-12m^2+9m^3=3m(1-m)(1-3m)\geq 0.$$

Do đó: $\frac{\sum a^4}{\sum b^2c^2}\geq\sum a^2$.

Kết hợi với (1) và (2) suy ra $\frac{\sum a^4}{\sum b^2c^2}\geq\frac{\sum a^2}{\left(\sum MA\right)^2}$.

Trường hợp 2: $\max\left\{\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C}\right\}\geq 120^\circ$. Không mất tính tổng quát giả sử $A\geq 120^\circ$.

Theo bổ đề 1, ta có: $\sum MA\geq b+c$ (3).

Ta sẽ chứng minh $\frac{\sum a^4}{\sum b^2c^2}\geq\frac{\sum a^2}{(b+c)^2}$ (4).

Đương nhiên (4) $\Leftrightarrow\frac{2(b+c)^2}{\sum a^2}\geq\frac{2\sum b^2c^2}{\sum a^4}$

$$\Leftrightarrow\frac{2(b+c)^2-\sum a^2}{\sum a^2}\geq\frac{2\sum b^2c^2-\sum a^4}{\sum a^4}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sum a^4\right)\left[2(b+c)^2-\sum a^2\right]\geq\left(\sum a^2\right)\left(2\sum b^2c^2-\sum a^4\right).$$

Dễ thấy $\sum a^4\geq\frac{1}{3}\left(\sum a^2\right)^2\geq 2\sum b^2c^2-\sum a^4$.

Do đó: $\sum a^4\geq\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sum a^2\right)\sqrt{2\sum b^2c^2-\sum a^4}$ (5).

Mặt khác:

$$2(b+c)^2-\sum a^2=\frac{3\left[(b+c)^2-a^2\right]+\left[a^2-(b-c)^2\right]}{2}$$
$$\geq\sqrt{3\left[(b+c)^2-a^2\right]\left[a^2-(b-c)^2\right]}=\sqrt{3\left(2\sum b^2c^2-\sum a^4\right)}\ (6).$$

Nhân vế với vế của (5) và (6), ta có:

$$\left(\sum a^4\right)\left[2(b+c)^2-\sum a^2\right]\geq\left(\sum a^2\right)\left(2\sum b^2c^2-\sum a^4\right).$$

Vậy (4) được chứng minh.

Tóm lại trong cả hai trường hợp ta đều có:

$$\frac{\sum a^4}{\sum b^2c^2}\geq\frac{\sum a^2}{\left(\sum MA\right)^2}.$$

Trở lại giải bài toán T12/585.

Từ các bổ đề 2 và 3 suy ra: $\sum\frac{MA^2}{BC^2}\geq\frac{\sum BC^2}{\left(\sum MA\right)^2}$.

Nhận xét. 1) Bài toán này khó, chỉ có 3 bạn tham gia giải.

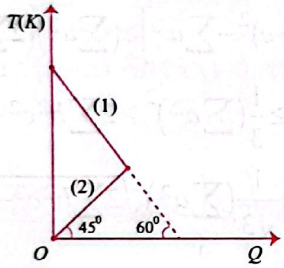
Được quét bằng CamScanner

2) Xin nêu tên cả 3 bạn: **Thanh Hóa:** *Vũ Duy Mạnh*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, THCS Quang Trung, Bảo Lộc; **Italy:** *Andrea Fanchini*, Cantuf;

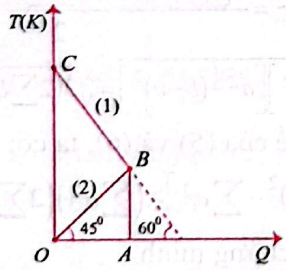
3) Các bạn *Vũ Duy Mạnh* và *Andrea Fanchini* có lời giải khá ngắn gọn nhưng lại phải sử dụng kết quả $\sum MA \geq \sqrt{\frac{\sum a^2}{2}+2\sqrt{3}S}$, việc chứng minh kết quả này không hề đơn giản.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/585. *Hai vật (1) và (2) có cùng khối lượng cho tiếp xúc và trao đổi nhiệt với nhau. Hình dưới là đồ thị biểu diễn sự thay đổi nhiệt độ của từng vật theo nhiệt lượng mà hai vật trao đổi cho nhau. Biết nhiệt độ tại giao điểm của hai đồ thị là 100 °C. Nhiệt độ ban đầu của vật (1) bằng bao nhiêu °C? (Kết quả làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).*



Lời giải. Gọi các điểm A, B, C như hình vẽ.



Do nhiệt độ tại giao điểm của hai đồ thị là 100 °C hay 373 K nên $AB = 373$.

ΔOAB vuông cân tại $O \Rightarrow OA = AB = 373$

$\Rightarrow B(373; 373)$. Đường thẳng (1) tạo với Ox một góc là $180^o - 60^o = 120^o$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng (1) có dạng:

$$y=(\tan 120^o)x+b=-\sqrt{3}x+b.$$

Mà đường thẳng (1) qua $B(373; 373)$

$$\Rightarrow -373\sqrt{3}+b=373 \Rightarrow b=373+373\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow C(0;373\sqrt{3}+373)$$

$\Rightarrow$ nhiệt độ ban đầu của vật (1) là:

$(373\sqrt{3}+373)$ (K) hay 746 °C.

Nhận xét. Chúc mừng hai bạn: *Trương Khánh Toàn, Đinh Văn Trường*, 11 Lý, trường THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh** đã có lời giải đúng cho đề ra kì này.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/585. *Dòng điện xoay chiều chạy qua một đoạn mạch có biểu thức: $i = 2\cos(100\pi t)$, với i có đơn vị (A) và t có đơn vị (s). Xác định điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn đoạn mạch trong thời gian $\frac{1}{4}$ chu kì tính từ thời điểm ban đầu theo đơn vị (mC). (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).*

Lời giải. Điện lượng q chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2 được tính bằng tích phân của cường độ dòng điện theo thời gian: $q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)dt$ với $t_1 = 0$

và $$t_2 = \frac{T}{4}=\frac{1}{4}.\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{4}.\frac{2\pi}{100\pi}=0{,}005\,\text{s}$$

$$\Rightarrow q=\int_0^{0{,}005} 2\cos(100\pi t)dt$$

$$=\left[\frac{2}{100\pi}\sin(100\pi t)\right]_0^{0{,}005}$$

$$=\frac{2}{100\pi}\sin(100\pi.0{,}005)-\frac{2}{100\pi}\sin(0)$$

$$=\frac{1}{50\pi}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{50\pi}\approx 6{,}37.10^{-3}\ C\approx 6{,}4\,\text{mC}.$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn sau có lời giải đúng: **Hà Tĩnh:** *Trương Khánh Toàn, Đinh Văn Trường, Nguyễn Lê Khánh Hà*, 11 Lý, *Đặng Văn Lê Mạnh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Lâm Đồng:** *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, Bảo Lộc; **Hưng Yên:** *Trần Mai Anh*, 11 Lý, THPT chuyên Hưng Yên.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Được quét bằng CamScanner



TRỞ LẠI BÀI TOÁN VỀ BẤT ĐẲNG THỨC TRONG KỲ THI IMO NĂM 1983

NGÔ VĂN THÁI
(Hưng Yên)

Kỳ thi Toán học Quốc tế IMO 1983 tại Pháp có một bài toán về bất đẳng thức khó và hay. Dù đã trải qua 43 năm, nhưng mỗi lần đọc lại bài toán này chúng ta càng khâm phục cách giải đẹp, cô đọng, độc đáo, có một không hai của thí sinh *Bernhard Leeb*. Với cách giải đó, ban giám khảo đã trao cho *Bernhard Leeb* phần thưởng cao nhất của kỳ thi: GIẢI ĐẶC BIỆT.

Tác giả xin giới thiệu lại nội dung bài bất đẳng thức thi IMO 1983 cùng với ba cách giải đẹp, hấp dẫn của ban giám khảo, của *Bernhard Leeb* và của nhà giáo *Trần Phương*. Đồng thời cũng đưa ra một số mở rộng mới cho bài toán, kèm theo các cách giải để bạn đọc tham khảo.

1. Bài toán bất đẳng thức trong kỳ thi IMO 1983

Cho a, b, c là là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0.$$

Lời giải.

Cách 1. *Phép thế Ravi, đáp án của ban giám khảo*

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta đặt: $x=\dfrac{b+c-a}{2}$, $y=\dfrac{c+a-b}{2}$, $z=\dfrac{a+b-c}{2}$.

Khi đó x, y, z là các số dương và $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$.

Thay a, b, c vào bài toán bất đẳng thức và thực hiện các phép biến đổi, ta được bất đẳng thức tương đương: $xy^3+yz^3+zx^3\ge xyz(x+y+z)$ (1).

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$(xy^3+yz^3+zx^3)(z+x+y)\ge xyz(x+y+z)^2$ (2).

Dấu đẳng thức của (2) xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{xy^3}{z}=\frac{yz^3}{x}=\frac{zx^3}{y} \text{ hay } x=y=z.$$

Suy ra dấu "=" của bất đẳng thức đã cho xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hay tam giác đã cho là tam giác đều.

Bài toán được chứng minh.

Cách 2. *Cách giải của thí sinh Bernhard Leeb*

Không mất tính tổng quát, giả sử $a=\max\{a;b;c\}$. Khi đó bất đẳng thức đã cho tương đương với bất đẳng thức:

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)$$
$$=a(b+c-a)(b-c)^2+b(a-b)(a-c)(a+b-c)\ge 0.$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng, từ đó dẫn đến kết luận của bài toán.

Cách 3. *Cách giải của nhà giáo Trần Phương*

Đặt vế trái của bất đẳng thức đã cho là T. Ta có:

$$T=\frac{1}{2}\Big[(a-b)^2(b+c-a)(b-c+a)+$$
$$+(b-c)^2(c+a-b)(c-a+b)$$
$$+(c-a)^2(a+b-c)(a-b+c)\Big]\ge 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Từ đây bài toán được chứng minh.

2. Một số bài toán mở rộng mới của bài toán về bất đẳng thức trong kỳ thi IMO 1983

Mở rộng 1. *Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và $\alpha\ge 2$. Chứng minh rằng:*

$$a^\alpha b(a-b)+b^\alpha c(b-c)+c^\alpha a(c-a)\ge 0.$$

Lời giải. Bài toán mở rộng 1 đã đúng trong trường hợp $\alpha=2$ (chính là bài toán IMO 1983). Tiếp theo ta chứng minh bài toán cũng đúng khi $\alpha>2$. Bất đẳng thức trong bài toán này không thay đổi khi các biến hoán vị vòng quanh. Không mất tính tổng quát giả sử $a=\max\{a;b;c\}$.

• Nếu $b\ge c\Rightarrow a^{\alpha-2}\ge b^{\alpha-2}\ge c^{\alpha-2}>0$,

$a-b\ge 0$, $b-c\ge 0$, $c-a\le 0$.

Khi đó ta có:

Được quét bằng CamScanner

$$a^{\alpha-2}.a^2b(a-b)\geq b^{\alpha-2}a^2b(a-b) \quad (3).$$

$$b^{\alpha-2}b^2c(b-c)=b^{\alpha-2}b^2c(b-c) \quad (4).$$

$$c^{\alpha-2}.c^2a(c-a)\geq b^{\alpha-2}c^2a(c-a) \quad (5).$$

Cộng vế với vế của (3), (4), (5) và sử dụng bài toán IMO 1983 sẽ được:

$$a^\alpha b(a-b)+b^\alpha c(b-c)+c^\alpha a(c-a)\geq$$

$$\geq b^{\alpha-2}\left[a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\right]\geq 0.$$

• Nếu $c\geq b\Rightarrow a^{\alpha-2}\geq c^{\alpha-2}\geq b^{\alpha-2}>0,$

$$a-b\geq 0, b-c\leq 0, c-a\leq 0.$$

Khi đó ta có:

$$a^{\alpha-2}.a^2b(a-b)=a^{\alpha-2}a^2b(a-b) \quad (6).$$

$$b^{\alpha-2}b^2c(b-c)\geq a^{\alpha-2}b^2c(b-c) \quad (7).$$

$$c^{\alpha-2}.c^2a(c-a)\geq a^{\alpha-2}c^2a(c-a) \quad (8).$$

Cộng vế với vế của (6), (7), (8) và lại sử dụng bài toán IMO 1983 sẽ được:

$$a^\alpha b(a-b)+b^\alpha c(b-c)+c^\alpha a(c-a)\geq$$

$$\geq a^{\alpha-2}\left[a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\right]\geq 0.$$

Đẳng thức của bài toán xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hay tam giác đã cho là tam giác đều.

Bài toán được chứng minh.

Bài toán về bất đẳng thức IMO 1983 không chỉ đúng khi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác mà còn đúng cả trong các trường hợp sau:

Mở rộng 2. *Cho $a\geq b\geq c\geq 0$. Chứng minh*

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0 \quad (*).$$

Lời giải. Đặt vế trái của (*) là P.

Cách 1: Ta có:

$$P=(a-b)a\left(ab-c^2\right)+(b-c)c\left(b^2-ac\right).$$

Giả thiết cho $a\geq b\geq c\geq 0$ nên suy ra:

$$(a-b)a\left(ab-c^2\right)\geq 0 \quad (9).$$

Xét hai trường hợp sau:

TH1: Nếu $\left(b^2-ac\right)\geq 0$ thì

$$(b-c)c\left(b^2-ac\right)\geq 0 \quad (10).$$

Từ (9) và (10) ta được $P\geq 0$.

TH2: Nếu $b^2-ac\leq 0$, ta dễ dàng chứng minh được $\begin{cases}(a-b)a\geq ac-b^2\geq 0\\ ab-c^2\geq (b-c)c\geq 0\end{cases}$.

Từ hệ trên nhân vế với vế của hai bất đẳng thức, ta có: $(a-b)a\left(ab-c^2\right)\geq (b-c)c\left(ac-b^2\right)\geq 0$

$$\Leftrightarrow P\geq 0.$$

Dấu đẳng thức của (*) xảy ra khi và chỉ khi:

$$a=b=c \text{ hoặc } a=b\neq 0, c=0$$

$$\text{hoặc } a\neq 0, b=c=0.$$

Đến đây bất đẳng thức (*) được chứng minh.

Cách 2. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$a^3b+b^3a\geq 2a^2b^2,\ b^3c+c^3b\geq 2b^2c^2,$$

$$c^3a+a^3c\geq 2a^2c^2.$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức trên ta được:

$$a^3b+b^3c+c^3a+\left(a^3c+b^3a+c^3b\right)$$

$$\geq 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

Mặt khác, từ giả thiết đã cho ta có:

$$(a-b)(b-c)\left[\left(a^2+ab+b^2\right)-\left(b^2+bc+c^2\right)\right]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^3-b^3\right)(b-c)-\left(b^3-c^3\right)(a-b)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^3b+b^3c+c^3a\geq a^3c+b^3a+c^3b.$$

Suy ra: $2(a^3b+b^3c+c^3a)\geq 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$$\Leftrightarrow a^3b+b^3c+c^3a\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0.$$

Vậy $P\geq 0$ (điều phải chứng minh).

Cách 3. Nhận thấy

$$P=a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)$$

$$=b(a-b)(a-c)(a+b-c)+a(b+c-a)(b-c)^2.$$

Từ giả thiết ta có $b(a-b)(a-c)(a+b-c)\geq 0.$

TH1: Nếu $(b+c-a)\geq 0$ thì

$a(b+c-a)(b-c)^2\geq 0$, suy ra $P\geq 0$.

TH2: Nếu $(b+c-a)<0$, ta có các khả năng sau:

$$(a-b)(a-c)=a^2-ab-ac+bc$$

$$\geq a^2-ab-ac=a(a-b-c)$$

$$\Rightarrow (a-b)(a-c)\geq a(a-b-c)>0 \quad (11);$$

$$b(a+b-c)=ab+b^2-bc$$

Được quét bằng CamScanner

$$\geq b^2+c^2-2bc=(b-c)^2\geq 0$$

$$\Rightarrow b(a+b-c)\geq (b-c)^2\geq 0 \quad (12).$$

Nhân vế với vế của (11) và (12) ta được:

$$b(a-b)(a-c)(a+b-c)\geq a(a-b-c)(b-c)^2.$$

Chuyển vế và rút gọn sẽ được $P\geq 0$.

Cách 4. Với giả thiết đã cho dễ thấy

$$a^2b\geq ab^2\Rightarrow a^2b(a-b)\geq ab^2(a-b).$$

Do đó: $P\geq ab^2(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)$

$$=b^2\left(a^2-ab+bc-c^2\right)-c^2a(a-c)$$

$$=(a-c)\left[b^2(a+c-b)-c^2a\right].$$

Suy ra $P\geq (a-c)\left[b^2(a+c-b)-c^2a\right]$.

Đến đây ta chỉ cần chứng minh $b^2(a+c-b)-c^2a\geq 0$ là đủ.

Thật vậy, ta có:

$$b^2(a+c-b)-c^2a=a\left(b^2-c^2\right)-b^2(b-c)$$

$$\geq b\left(b^2-c^2\right)-b^2(b-c)=b^2c-bc^2$$

$$\Leftrightarrow b^2(a+c-b)-c^2a\geq bc(b-c)\geq 0.$$

Vậy $P\geq 0$.

Mở rộng 3. *Cho $a\geq b\geq c>0$, $\alpha\geq 0$. Chứng minh*

$$\frac{a^2(a-b)}{b^{\alpha-1}}+\frac{b^2(b-c)}{c^{\alpha-1}}+\frac{c^2(c-a)}{a^{\alpha-1}}\geq 0.$$

Lời giải. • Khi $\alpha=0$, bài toán đã cho trở thành bài toán mở rộng 2.

• Khi $\alpha>0$, ta đưa bất đẳng thức về dạng:

$$\frac{a^2b(a-b)}{b^\alpha}+\frac{b^2c(b-c)}{c^\alpha}+\frac{c^2a(c-a)}{a^\alpha}\geq 0 \quad (13).$$

Từ $a\geq b\geq c>0$, $\alpha>0\Rightarrow a^\alpha\geq b^\alpha\geq c^\alpha>0$,

$a^2b(a-b)\geq 0$, $b^2c(b-c)\geq 0$.

Do đó:

$$\text{VT}(13)\geq \frac{a^2b(a-b)}{a^\alpha}+\frac{b^2c(b-c)}{a^\alpha}+\frac{c^2a(c-a)}{a^\alpha}$$

$$=\frac{1}{a^\alpha}\left[a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\right]\geq 0 \ (**).$$

Bất đẳng thức (**) đúng, do áp dụng mở rộng 2.

Vậy $\frac{a^2(a-b)}{b^{\alpha-1}}+\frac{b^2(b-c)}{c^{\alpha-1}}+\frac{c^2(c-a)}{a^{\alpha-1}}\geq 0$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c>0$.

Đến đây bài toán mở rộng 3 được chứng minh.

Mở rộng 4. *Cho $a\geq b\geq c\geq 0$, $k\geq 2$. Chứng minh rằng $a^kb(a-b)+b^kc(b-c)+c^ka(c-a)\geq 0$.*

Lời giải. Cách 1. Từ giả thiết đã cho dẫn đến:

$$a^{k-2}\geq b^{k-2}\geq c^{k-2}\geq 0,\ (a-b)\geq 0,\ (b-c)\geq 0,$$

$$(c-a)\leq 0.$$

Suy ra: $a^{k-2}.a^2b(a-b)\geq b^{k-2}a^2b(a-b)$ (14).

$$b^{k-2}b^2c(b-c)=b^{k-2}b^2c(b-c) \quad (15).$$

$$c^{k-2}.c^2a(c-a)\geq b^{k-2}c^2a(c-a) \quad (16).$$

Cộng vế với vế của (14), (15), (16) và sử dụng bài toán mở rộng 2 sẽ được:

$$a^kb(a-b)+b^kc(b-c)+c^ka(c-a)$$

$$\geq b^{k-2}\left[a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\right]\geq 0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $a=b=c$ hoặc $a=b>0$, $c=0$ hoặc $a>0$, $b=c=0$.

Bài toán được chứng minh.

Cách 2 (của bạn *Phạm Đức Nam*, TP. Hồ Chí Minh). Với giả thiết đã cho, dễ thấy:

$$a^kb\geq ab^k\Rightarrow a^kb(a-b)\geq ab^k(a-b).$$

Do đó ta có:

$$\text{VT}\geq ab^k(a-b)+b^kc(b-c)+c^ka(c-a)$$

$$=b^k\left(a^2-ab+bc-c^2\right)-c^ka(a-c)$$

$$\Rightarrow \text{VT}\geq (a-c)\left[b^k(a+c-b)-c^ka\right].$$

Đến đây ta chỉ cần chứng minh:

$$b^k(a+c-b)-c^ka\geq 0 \text{ là đủ.}$$

Thật vậy, ta có:

$$b^k(a+c-b)-c^ka=a\left(b^k-c^k\right)-b^k(b-c)$$

$$\geq b\left(b^k-c^k\right)-b^k(b-c)=b^kc-bc^k$$

$$\Leftrightarrow b^k(a+c-b)-c^ka\geq bc\left(b^{k-1}-c^{k-1}\right)\geq 0.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Được quét bằng CamScanner

Mở rộng 5. *Cho* $a \ge b \ge c > 0, k \ge 2, \alpha \ge 0$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a^k(a-b)}{b^{\alpha-1}} + \frac{b^k(b-c)}{c^{\alpha-1}} + \frac{c^k(c-a)}{a^{\alpha-1}} \ge 0.$$

Lời giải.

• Khi $\alpha = 0$, bài toán trở thành bài mở rộng 4.

• Khi $\alpha > 0$, ta đưa bất đẳng thức về dạng:

$$\frac{a^k b(a-b)}{b^\alpha} + \frac{b^k c(b-c)}{c^\alpha} + \frac{c^k a(c-a)}{a^\alpha} \ge 0 \quad (17).$$

Từ $a \ge b \ge c > 0,\ \alpha > 0 \Rightarrow a^\alpha \ge b^\alpha \ge c^\alpha > 0,$

$$a^k b(a-b) \ge 0,\ b^k c(b-c) \ge 0.$$

Do đó:

$$\text{VT}(17) \ge \frac{a^k b(a-b)}{a^\alpha} + \frac{b^k c(b-c)}{a^\alpha} + \frac{c^k a(c-a)}{a^\alpha}$$

$$= \frac{1}{a^\alpha}\left[a^k b(a-b) + b^k c(b-c) + c^k a(c-a)\right] \ge 0 \ (18).$$

Bất đẳng thức (18) đúng là do áp dụng mở rộng 4.

Vậy $\frac{a^k(a-b)}{b^{\alpha-1}} + \frac{b^k(b-c)}{c^{\alpha-1}} + \frac{c^k(c-a)}{a^{\alpha-1}} \ge 0.$

Dấu đẳng thức của bài toán xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$.

Đến đây bài toán mở rộng 5 được chứng minh.

Cuối cùng thêm một số bài toán mở rộng để bạn đọc tự giải

1. Cho $a, b, c > 0$ và

$$\min\{a;b;c\} \ge \frac{1}{4}\max\{a;b;c\}.$$

Chứng minh rằng

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \ge 0.$$

2. Cho $a, b, c > 0$ và $\sqrt{ab}, \sqrt{bc}, \sqrt{ca}$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \ge 0.$$

Trở lại bài toán về bất đẳng thức trong kỳ thi IMO 1983 đã cho chúng ta thấy sức sống mãnh liệt của một bài toán bất đẳng thức kinh điển hoán vị vòng quanh không đối xứng. Chúng ta không chỉ thấy lại vẻ đẹp của một lời giải đạt giải đặc biệt từ Bernhard Leeb, mà còn khám phá ra những tầng sâu của tư duy toán học thông qua các phép biến đổi đại số rất nghệ thuật cho những bài toán hình học, bài toán đại số. Việc tổng quát hoá bài toán IMO 1983 với số mũ $\alpha \ge 2$ và các mở rộng khác đã chứng minh rằng một bài toán kinh điển không bao giờ là đứng yên, nó luôn là mảnh đất màu mỡ cho sự sáng tạo. Hy vọng bài viết này sẽ là nguồn cảm hứng nhỏ bé khích lệ các bạn trẻ tiếp tục đào sâu, lật lại những vấn đề cũ để tìm ra những giá trị mới mẻ và ý nghĩa. Chúc các bạn thành công!

****

HƯỚNG DẪN GIẢI ... *(Tiếp theo trang 14)*

Ký hiệu C là một tập hợp tuỳ ý gồm 5 chú mèo $c_1, c_2, ..., c_5$. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại một trong hai tập A, B chứa ít nhất 3 chú mèo thuộc C. Không giảm tổng quát, giả sử đó là tập A. Xét hai trường hợp sau:

- TH1: Tập A chứa đúng bốn chú mèo thuộc C. Không giảm tổng quát, giả sử đó là bốn chú c_1, c_2, c_3, c_4. Khi đó chú mèo $c_5 \in B$. Mặt khác c_5 lại không liên kết với chú mèo nào trong B. Kết hợp với nhận xét (*), suy ra c_5 liên kết với 3 chú mèo trong A. Vậy ta thậm chí còn tìm được chú mèo c_5 liên kết với cả 3 chú mèo còn lại trong C.

- TH2: Tập A chứa đúng 3 chú mèo thuộc C, giả sử là c_1, c_2, c_3. Khi đó B chứa đúng 2 chú mèo thuộc C là c_4, c_5. Suy ra B chứa đúng 2 chú mèo không thuộc C, ký hiệu là d, e. Ta thấy mỗi chú mèo thuộc A có liên kết với 3 chú mèo thuộc B, như vậy 3 chú mèo c_1, c_2, c_3 tạo ra 9 liên kết. Xét riêng 9 liên kết này. Do mỗi chú mèo liên kết với đúng 3 chú mèo khác, nên hai chú mèo d, e có tối đa 6 lượt liên kết trong 9 liên kết trên. Suy ra hai chú mèo c_4, c_5 có mặt trong tối thiểu 3 liên kết. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại một trong hai chú mèo c_4, c_5 có mặt ở hai liên kết.

Vậy trong mọi trường hợp, ta luôn tìm được một chú mèo liên kết với hai chú còn lại.

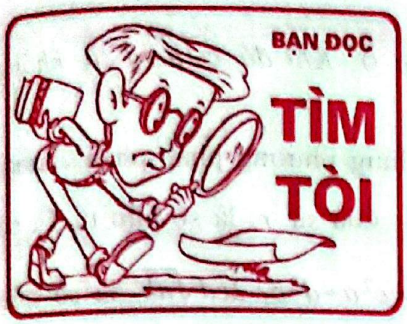
Tóm lại, số nguyên dương k nhỏ nhất thoả mãn đề bài là 5.

TRẦN XUÂN ĐÁNG

(5/7/136 Phan Đình Phùng, phường Nam Định, tỉnh Ninh Bình)

Giới thiệu

Được quét bằng CamScanner



MỘT SỐ BỔ ĐỀ ĐẸP VỀ TÍNH HỮU TỶ CỦA CĂN THỨC

CAO MINH QUANG
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Tóm tắt. Bài viết giới thiệu một số bổ đề đẹp về tính hữu tỉ của các biểu thức chứa căn thức. Từ các kết quả cơ bản về căn bậc hai của số nguyên và tổng các căn bậc hai, ta thu được nhiều công cụ hữu ích để chứng minh tính hữu tỉ, vô tỉ của các biểu thức căn thức trong số học sơ cấp. Bài viết cũng trình bày một số ứng dụng tiêu biểu và mở rộng cho trường hợp căn bậc ba.

Tác giả xin gửi lời cám ơn chân thành đến thầy *Nguyễn Tuấn Ngọc*, giáo viên Trường THPT chuyên Tiền Giang, tỉnh Đồng Tháp, vì đã có những góp ý quý báu giúp tác giả chỉnh lý và hoàn thiện lời giải bài toán 10 trong bài viết.

Giới thiệu. Trong số học sơ cấp, một trong những chủ đề thường gặp là xét tính hữu tỉ hoặc vô tỉ của các biểu thức chứa căn thức. Việc xác định tính chất này thường đòi hỏi lập luận chặt chẽ về quan hệ giữa số nguyên, số hữu tỉ và cấu trúc của các số dưới dấu căn. Các bổ đề dưới đây cung cấp những kết quả then chốt cho loại bài toán này. Chúng giúp trả lời các câu hỏi tự nhiên sau:

1. Khi nào căn bậc hai của một số nguyên là số hữu tỉ?
2. Khi tổng của hai căn bậc hai là số hữu tỉ thì điều gì xảy ra với từng căn?
3. Khi nào tổng hai căn bậc hai của các số nguyên có thể cho kết quả là số hữu tỉ?
4. Các ý tưởng trên có thể mở rộng đến căn bậc ba ra sao?

Những kết quả này không chỉ có giá trị lý thuyết mà còn xuất hiện thường xuyên trong các bài toán thi học sinh giỏi, các bài toán chứng minh tính hữu tỉ, vô tỉ và các phương trình chứa căn.

1. Ba bổ đề

Bổ đề 1. *Cho n là một số nguyên không âm. Nếu $\sqrt{n}$ là một số hữu tỉ thì $\sqrt{n}$ là một số nguyên.*

Chứng minh. Trường hợp $n=0$ thì hiển nhiên. Với $n\geq 1$, vì $\sqrt{n}$ là một số hữu tỉ nên ta viết $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$, trong đó p,q là các số nguyên dương và $(p,q)=1$. Suy ra $n=\frac{p^2}{q^2}$. Vì n là số nguyên nên p^2 chia hết cho q^2. Hơn nữa $(p,q)=1$ nên $q=1$ hay $n=p^2$. Khi đó $\sqrt{n}=p$ là một số nguyên.

Với bổ đề trên, ta có nhận xét: Nếu n là số nguyên không âm thì $\sqrt{n}$ hữu tỉ khi và chỉ khi n là số chính phương. Ngoài ra, bổ đề 1 có thể được mở rộng như sau: *Cho n là một số nguyên không âm và m là số nguyên dương, $m\geq 3$. Nếu $\sqrt[m]{n}$ là một số hữu tỉ thì $\sqrt[m]{n}$ cũng là một số nguyên.*

Bổ đề 2. *Cho a,b là các số hữu tỉ không âm. Nếu $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ là số hữu tỉ thì $\sqrt{a},\sqrt{b}$ đều là các số hữu tỉ.*

Chứng minh. Đặt $r=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ là số hữu tỉ. Trường hợp $a=b=0$ là hiển nhiên. Với $r>0$,

$$2r\sqrt{b}=2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\sqrt{b}$$
$$=\left(b+2\sqrt{a}\sqrt{b}+a\right)+b-a=r^2+b-a$$

Dẫn đến $\sqrt{b}=\frac{r^2+b-a}{2r}$ là số hữu tỉ.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $\sqrt{a}$ là số hữu tỉ.

Được quét bằng CamScanner

Từ bổ đề 1 và bổ đề 2, chúng ta suy ra kết quả sau: *Nếu a,b là các số tự nhiên và $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ là số hữu tỉ thì a,b đều là các số chính phương.*

Thật vậy, theo bổ đề 2, ta có $\sqrt{a},\sqrt{b}$ là các số hữu tỉ. Theo bổ đề 1, $\sqrt{a},\sqrt{b}$ là các nguyên (không âm) nên a,b đều là các số chính phương.

Chúng ta sẽ mở rộng bổ đề 2 bằng một kết quả sau:

Bổ đề 3. *Cho a,b là các số hữu tỉ không âm. Nếu $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab}$ là số hữu tỉ thì $\sqrt{a},\sqrt{b}$ đều là các số hữu tỉ.*

Chứng minh. Trường hợp $a=b=0$ là hiển nhiên.

Ngược lại, vì $r=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab}$ là số hữu tỉ dương nên

$$\begin{aligned}&\sqrt{a}+\sqrt{ab}=r-\sqrt{b}\\&\Leftrightarrow a+2a\sqrt{b}+ab=r^2-2r\sqrt{b}+b\\&\Leftrightarrow 2(a+r)\sqrt{b}=r^2+b-a-ab.\end{aligned}$$

Từ đó, ta tính được $\sqrt{b}=\dfrac{r^2+b-a-ab}{2(a+r)}$ là số hữu tỉ. Điều tương tự cũng có với $\sqrt{a}$.

Từ các bổ đề trên, ta có thể chuyển nhiều bài toán chứa căn về việc xét số chính phương, lũy thừa đúng hoặc phương trình nghiệm nguyên. Các bài toán sau đây minh họa cách vận dụng những kết quả đó để thu được lời giải gọn và chặt chẽ.

2. Các bài toán

Bài toán 1. *Chứng minh rằng $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ là số vô tỉ.*

Lời giải. Giả sử $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ là số hữu tỉ. Theo bổ đề 2, ta suy ra $\sqrt{2},\sqrt{3}$ là các số hữu tỉ. Theo bổ đề 1, ta có 2, 3 là các số chính phương, vô lý. Vậy $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ là số vô tỉ.

Bài toán trên là một trường hợp riêng của bài toán tổng quát hơn như sau: *Cho a,b là hai số tự nhiên phân biệt và đều không chứa bình phương, c,d là hai số hữu tỉ khác 0. Khi đó $c\sqrt{a}+d\sqrt{b}$ không thể là số hữu tỉ.*

Chứng minh. Ta dùng phương pháp phản chứng. Đặt $r=c\sqrt{a}+d\sqrt{b}$. Giả sử r là số hữu tỉ. Ta có $r^2=\left(c\sqrt{a}+d\sqrt{b}\right)^2=c^2a+d^2b+2cd\sqrt{ab}$ là số hữu tỉ, hay $2cd\sqrt{ab}$ là số hữu tỉ. Vì c,d là hai số hữu tỉ khác 0 nên điều này xảy ra khi $\sqrt{ab}$ là số hữu tỉ. Vì ab là số nguyên nên theo Bổ đề 1, ab là số chính phương, tức là $ab=k^2$, với $k\in\mathbb{N}^*$. Khi đó, trong phân tích thành thừa số nguyên tố của $k^2=ab$, mọi số mũ đều phải là số chẵn. Xét một số nguyên tố p. Nếu p xuất hiện trong a mà không xuất hiện trong b, thì trong ab, số mũ của p là 1, không chẵn. Điều này mâu thuẫn với việc ab là số chính phương. Vì vậy, mọi số nguyên tố xuất hiện trong a đều phải xuất hiện trong b. Ngược lại, mọi số nguyên tố xuất hiện trong b cũng phải xuất hiện trong a. Do đó, a và b có cùng tập thừa số nguyên tố. Vì a,b đều không chứa bình phương, nên mỗi thừa số nguyên tố chỉ xuất hiện với số mũ 1. Do đó, $a=b$, mâu thuẫn. Vậy r không thể là số hữu tỉ.

Bài toán 2. *Tồn tại hay không số nguyên dương n sao cho $\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}$ là số hữu tỉ?*

Lời giải. Từ bổ đề 1 và bổ đề 2, ta suy ra $\sqrt{n-1}$ và $\sqrt{n+1}$ đều là các số nguyên (không âm). Đặt $k=\sqrt{n-1}$ và $l=\sqrt{n+1}$, ta nhận được $n=k^2+1=l^2-1$. Dẫn đến $l^2-k^2=2$. Phương trình này không có nghiệm nguyên (không âm) nên không tồn tại số nguyên n thỏa bài toán.

Bài toán 3. *Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên n sao cho $\sqrt{2n-1}+\sqrt{3n+2}$ là số hữu tỉ.*

Lời giải. Từ bổ đề 1 và bổ đề 2, ta suy ra $\sqrt{2n-1}$ và $\sqrt{3n+2}$ đều là các số nguyên (không âm).

Được quét bằng CamScanner

Đặt $2n-1=a^2, 3n+2=b^2$ (a,b là các số nguyên dương).

Dẫn đến: $n=\dfrac{a^2+1}{2}=\dfrac{b^2-2}{3}$ hay $2b^2-3a^2=7$.

Điều này không thể xảy ra khi xét quan hệ đồng dư theo modulo 3.

Bài toán 4. (Problem O704, Mathematical Reflection) *Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n+2}$ là một số nguyên.*

Lời giải. Từ bổ đề 1 và bổ đề 2, ta suy ra $\sqrt{n^3+1}$ và $\sqrt{n+2}$ đều là các số nguyên (không âm).

Đặt $s=\sqrt{n^3+1}$ và $t=\sqrt{n+2}$, trong đó s,t là các số nguyên dương. Từ đó, ta nhận được:

$$s^2=n^3+1 \text{ và } t^2=n+2.$$

Dẫn đến $s^2=(t^2-2)^3+1$. Khai triển biểu thức, ta có $s^2=(t^3-3t)^2+3t^2-7$.

Nếu $t\geq 3$ thì $s^2>(t^3-3t)^2$. Hơn nữa, với $t\geq 3$, ta còn có $s^2<(t^3-3t+1)^2$. Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương

$$(t^3-3t)^2+3t^2-7<(t^3-3t+1)^2$$

hay $$2t^3-3t^2-6t+8>0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng, vì với mọi $t\geq 3$, ta có:

$$2t^3-3t^2-6t+8=(t-2)(2t^2+t-4)>0.$$

Vậy khi $t\geq 3$, ta luôn có:

$$(t^3-3t)^2<s^2<(t^3-3t+1)^2.$$

Điều trên mâu thuẫn, vì $(t^3-3t)^2, (t^3-3t+1)^2$ là hai số chính phương liên tiếp.

Do đó $t\in\{1,2\}$. Xét trực tiếp, ta có $t=2, n=2, s=3$.

Vậy $n=2$.

Bài toán 5. *Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $\sqrt{n-2}+\sqrt{n+7}+\sqrt{(n-2)(n+7)}$ là một số hữu tỉ.*

Lời giải. Với $n\geq 2$, từ bổ đề 3 kết hợp bổ đề 1, suy ra $\sqrt{n-2}, \sqrt{n+7}$ là các số nguyên.

Đặt $k=\sqrt{n-2}, l=\sqrt{n+7}$ $(k,l\in\mathbb{N})$.

Dẫn đến $l^2-k^2=9$. Giải phương trình này, ta được cặp số nguyên (l,k) là $(5,4),(3,0)$. Từ đó, ta tìm được các số nguyên n thỏa bài toán lần lượt là 18 và 2.

Bài toán 6. *Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên n sao cho $\sqrt{n-1}+\sqrt{2n-1}+\sqrt{(n-1)(2n-1)}$ là số hữu tỉ.*

Lời giải. Ta sẽ xây dựng vô hạn số nguyên dương n sao cho cả $n-1$ và $2n-1$ đều là các số chính phương. Đặt $n=a^2+1$ thì $n-1=a^2, a\in\mathbb{N}$. Để $2n-1$ cũng chính phương, ta đặt $2n-1=b^2$, $b\in\mathbb{N}$. Suy ra $n=a^2+1$. Từ đó $b^2=2n-1=2(a^2+1)-1$ hay $b^2-2a^2=1$. Đây là phương trình Pell loại 1, có nghiệm cơ sở là $(b_0,a_0)=(3,2)$ và nghiệm (b_k, a_k) cho bởi công thức:

$$\begin{cases} b_{k+1}=3b_k+4a_k \\ a_{k+1}=2b_k+3a_k \end{cases}, k\in\mathbb{N}^*.$$

Vì $(b_k), (a_k)$ là các dãy nguyên nên tồn tại vô số số nguyên dương n thỏa mãn bài toán.

Bài toán 7 [S709, Mathematical Reflection, Titu Andreescu]. *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m,n) sao cho $m+4\sqrt{n-1}$ và $n+4\sqrt{m-1}$ đều là số chính phương.*

Lời giải. Đặt $m+4\sqrt{n-1}=r^2$ và $n+4\sqrt{m-1}=s^2$, trong đó $m,n\in\mathbb{N}^*$. Từ đó, suy ra $\sqrt{n-1}, \sqrt{m-1}$ đều là các số hữu tỉ. Từ bổ đề 2, suy ra $\sqrt{n-1}, \sqrt{m-1}$ đều là các số nguyên (không âm). Do đó, ta có đặt

$\sqrt{m-1}=a, \sqrt{n-1}=b$, trong đó $a,b\in\mathbb{N}$.

Khi đó $m=a^2+1, n=b^2+1$. Suy ra:

Được quét bằng CamScanner

$$r^2=a^2+4b+1, s^2=b^2+4a+1 \quad (1).$$

Nếu a là số lẻ thì $a^2+1\equiv 2 \pmod 4$, dẫn đến $r^2\equiv 2 \pmod 4$, vô lý. Vậy a là số chẵn. Tương tự, ta cũng có b là số chẵn. Từ (1), ta có:

$$(r-a)(r+a)=4b+1,\ (s-b)(s+b)=4a+1 \quad (2).$$

Nếu $r-a\geq 3$ và $s-b\geq 3$ thì

$$4b+1\geq 3(2a+3)=6a+9$$

và $$4a+1\geq 3(2b+3)=6b+9.$$

Dẫn đến $4a\geq 9a+20$, mâu thuẫn, vì $a\geq 0$.

Chú ý, từ (2) ta có $r-a$ và $s-b$ đều lẻ. Do đó, ít nhất một trong hai số $r-a$ hoặc $s-b$ bằng 1.

Trường hợp 1. $r-a=1$. Từ (2), ta có $r+a=4b+1$ hay $r=2b+1$. Suy ra $a=2b$. Do đó:

$$s^2=b^2+8b+1\Leftrightarrow s^2=(b+4)^2-15$$
$$\Leftrightarrow (s-(b+4))(s+(b+4))=-15.$$

Giải phương trình nghiệm nguyên trên, ta có $b=0$ hoặc $b=4$. Từ đó (m,n) nhận $(1,1)$ và $(65,17)$.

Trường hợp 2. $s-b=1$. Tương tự, (m,n) nhận $(1,1)$ và $(17,65)$.

Tóm lại, tất cả các cặp (m,n) là

$$(1,1),(17,65),(65,17).$$

Bài toán 8 [S693, Mathematical Reflection, Dorin Andrica]. *Cho a, b là các số nguyên dương phân biệt.*

a) Chứng minh tồn tại hữu hạn các số nguyên dương n sao cho $\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}$ là một số nguyên.

b) Tìm tất cả các số hữu tỉ r sao cho $\sqrt{r+a}+\sqrt{r+b}$ là số hữu tỉ.

Lời giải.

a) Giả sử $a>b$. Từ bổ đề 1 và bổ đề 2, ta có $\sqrt{n+a}$ và $\sqrt{n+b}$ đều là các số nguyên dương. Đặt $x=\sqrt{n+a}$ và $y=\sqrt{n+b}$. Ta suy ra:

$$x^2-y^2=a-b \text{ hay } (x-y)(x+y)=a-b.$$

Vì $a-b$ là một số nguyên dương nên số cặp ước số (k,l) của $a-b$ thỏa $kl=a-b$ là hữu hạn, với $kl=a-b$ và $k\equiv l \pmod 2$. Khi đó, ta có thể biểu diễn $x=\frac{k+l}{2}$, $y=\frac{l-k}{2}$. Vì số cặp ước là hữu hạn nên cặp (x,y) cũng hữu hạn, do đó, có hữu hạn giá trị n.

Nhận xét. Với mỗi cặp (a,b) với $a>b$, ta có thể tìm số lượng giá trị của n thông qua số lượng ước (dương) của $a-b$ theo các bước làm trên.

b) Giả sử $a>b$. Xét số hữu tỉ r sao cho $\sqrt{r+a}+\sqrt{r+b}$ là số hữu tỉ. Từ bổ đề 2, ta có $\sqrt{r+a},\sqrt{r+b}$ là các số hữu tỉ. Đặt $s=\sqrt{r+a}, t=\sqrt{r+b}$ thì $s^2-t^2=a-b$. Tiếp tục đặt $p=s+t, q=s-t$, thì p,q đều là các số hữu tỉ và $pq=a-b$. Khi đó $s=\frac{p+q}{2}$, $t=\frac{p-q}{2}$ và $r=s^2-a=\left(\frac{p+q}{2}\right)^2-a$ là số hữu tỉ.

Ngược lại, với hai số hữu tỉ p, q bất kì sao cho $pq=a-b$. Đặt $s=\frac{p+q}{2}$, $t=\frac{p-q}{2}$ (chọn p,q sao cho $s,t\geq 0$) và $r=\left(\frac{p+q}{2}\right)^2-a$, ta có $r+a=s^2$ và $r+b=t^2$ nên $\sqrt{r+a}+\sqrt{r+b}=s+t\in\mathbb{Q}$.

Vì có vô hạn cặp hữu tỉ (p,q) thỏa $pq=a-b$ nên có vô hạn số hữu tỉ r thỏa bài toán. Ta có thể chỉ ra sự xác định số hữu tỉ r thỏa bài toán như sau:

$r=\frac{\left(\frac{a-b}{p}+p\right)^2}{4}-a$, với p là số hữu tỉ bất kì khác 0.

Bài toán 9 [Problem of the month, Bilkent, 4-2010]. *Cho $a_1, a_2, \ldots$ là một cấp số cộng (không phải hằng số) gồm các số tự nhiên. Giả sử tồn tại số tự nhiên n sao cho $\sqrt[2010]{a_n}$ là số hữu tỉ. Chứng*

Được quét bằng CamScanner

minh rằng tồn tại số tự nhiên m sao cho $\sqrt[3]{a_m}$ là số hữu tỉ nhưng $\sqrt{a_m}$ là số vô tỉ.

Lời giải. Vì a_n là số tự nhiên và $\sqrt[2010]{a_n}$ là số hữu tỉ nên theo kết quả sau bổ đề 1, suy ra $\sqrt[2010]{a_n}$ là một số tự nhiên. Ta viết $\sqrt[2010]{a_n}=t$ hay $a_n=t^{2010}$, dẫn đến $\sqrt[3]{a_n}=t^{670}$. Gọi d là công sai của cấp số cộng, $d>0$. Đặt $x=\sqrt[3]{a_n}\in\mathbb{N}$. Xét số:

$$\begin{aligned}s&=\left(x\left(1+d^2\right)\right)^3=x^3\left(1+d^2\right)^3\\&=a_n\left(1+3d^2+3d^4+d^6\right)\\&=a_n+d\left(3a_nd+3a_nd^3+a_nd^5\right).\end{aligned}$$

Ta chú ý rằng số $\left(3a_nd+3a_nd^3+a_nd^5\right)$ là một số nguyên nên s là một số hạng nào đó trong cấp số cộng. Do đó, tồn tại số tự nhiên m sao cho $s=a_m$. Khi đó, $\sqrt[3]{a_m}=x\left(1+d^2\right)\in\mathbb{N}$.

Tiếp theo, giả sử $\sqrt{a_m}$ là số hữu tỉ. Từ bổ đề 1, suy ra $\sqrt{a_m}$ là số tự nhiên, đặt $k=\sqrt{a_m}\in\mathbb{N}$. Ta có a_m là số chính phương, hơn nữa, $a_m=s=\left(x\left(1+d^2\right)\right)^3$ là một lập phương. Do đó, mọi số mũ trong phân tích thành thừa số nguyên tố của a_m đều là bội số của 6, suy ra $x\left(1+d^2\right)$ là một số chính phương. Nhưng $x=t^{670}$ là chính phương, nên $1+d^2$ cũng là số chính phương.

Mặt khác, vì (a_n) là cấp số cộng tự nhiên khác hằng nên $d\geq 1$. Từ đó, ta có đánh giá:

$$d^2<1+d^2<(d+1)^2.$$

Do đó, $1+d^2$ không thể là số chính phương. Dẫn đến $\sqrt{a_m}$ là số vô tỉ.

Tóm lại, tồn tại số tự nhiên m sao cho $\sqrt[3]{a_m}$ là số hữu tỉ nhưng $\sqrt{a_m}$ là số vô tỉ.

Các kết quả trên chủ yếu xoay quanh căn bậc hai. Một câu hỏi tự nhiên là có kết quả tương tự như trên đúng với căn bậc ba hay không? Câu trả lời là khẳng định.

Bài toán 10. *Cho $a,b>1$ là các số nguyên dương và không chứa lập phương, tức là trong phân tích thừa số nguyên tố của a, b mọi số mũ đều thuộc tập $\{0,1,2\}$; c, d là các số hữu tỉ khác 0. Chứng minh rằng $c\sqrt[3]{a}+d\sqrt[3]{b}$ là số hữu tỉ khi và chỉ khi $a=b$ và $c=-d$.*

Lời giải. Ta đặt $r=c\sqrt[3]{a}+d\sqrt[3]{b}$. Nếu $a=b$ và $c=-d$ thì $r=0$, là số hữu tỉ. Ngược lại, giả sử r là số hữu tỉ. Ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1: $r=0$. Khi đó $c\sqrt[3]{a}+d\sqrt[3]{b}=0$ hay $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=-\dfrac{d}{c}$ là số hữu tỉ. Suy ra tồn tại hai số nguyên dương, nguyên tố cùng nhau là u,v sao cho $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{u}{v}$ hay $\dfrac{a}{b}=\dfrac{u^3}{v^3}$. Do đó $av^3=bu^3$.

Xét một số nguyên tố bất kì p. Kí hiệu $v_p(n)$ là số mũ đúng của p trong phân tích thừa số nguyên tố của n. Ta có $v_p\left(av^3\right)=v_p\left(bu^3\right)$ hay $v_p(a)-v_p(b)=3\left(v_p(u)-v_p(v)\right)$. Mặt khác, vì a,b không chứa lập phương nên $v_p(a),v_p(b)\in\{0,1,2\}$. Do đó, $v_p(a)-v_p(b)$ thuộc tập $\{-2,-1,0,1,2\}$. Vì $v_p(a)-v_p(b)$ chia hết cho 3 nên $v_p(a)-v_p(b)=0$, dẫn đến $a=b$. Thay vào $r=0$, ta nhận được $(c+d)\sqrt[3]{a}=0$, dẫn đến $c+d=0$. Vậy trong trường hợp $r=0$, ta có $a=b$ và $c=-d$.

Trường hợp 2: $r\neq 0$. Ta sẽ chứng minh trường hợp này không thể xảy ra. Thật vậy, ta có:

$$r^3=c^3a+d^3b+3c^2d\sqrt[3]{a^2b}+3cd^2\sqrt[3]{ab^2}$$ hay

$$r^3-c^3a-d^3b=3cd\sqrt[3]{ab}\left(c\sqrt[3]{a}+d\sqrt[3]{b}\right)=3cdr\sqrt[3]{ab}.$$

Được quét bằng CamScanner

Từ đó, chú ý c,d,r đều là các số hữu tỉ khác 0 nên suy ra $\sqrt[3]{ab}$ là số hữu tỉ. Từ nhận xét sau bổ đề 1, ta có $\sqrt[3]{ab}$ là số nguyên dương. Do đó tồn tại số nguyên dương m sao cho $ab=m^3$. Đặt $k=\sqrt[3]{a}$ thì $\sqrt[3]{b}=\frac{m}{k}$. Thay vào r, ta có $r=ck+d\frac{m}{k}$ hay $Q(k)=0$, trong đó $Q(x)=cx^2-rx+dm$ (*).

Mặt khác, vì $a>1$ và a không chứa lập phương nên a không phải là một lập phương hoàn hảo. Ta nhận thấy đa thức $P(x)=x^3-a$ không có nghiệm hữu tỉ. Thật vậy, vì $P(x)$ là đa thức monic có hệ số nguyên nên nếu nó có nghiệm hữu tỉ thì nghiệm đó là một số nguyên, tức là tồn tại t nguyên sao cho $t^3-a=0$, hay $a=t^3$, tức là a là một lập phương hoàn hảo, mâu thuẫn với nhận xét a không phải là một lập phương hoàn hảo. Vậy $P(x)$ không có nghiệm hữu tỉ và $\sqrt[3]{a}$ là số vô tỉ.

$P(x)$ là đa thức bậc ba, nếu $P(x)$ phân tích được trên $\mathbb{Q}[x]$ thì $P(x)$ phải có nhân tử bậc nhất trên $\mathbb{Q}[x]$, tức là $P(x)$ có một nghiệm hữu tỉ, mâu thuẫn. Do đó $P(x)$ bất khả quy trên $\mathbb{Q}[x]$.

Thực hiện phép chia $P(x)$ cho $Q(x)$, ta có:

$$P(x)=Q(x)H(x)+R(x),$$

trong đó $H(x),R(x)\in\mathbb{Q}[x]$ và $\deg R\le 1$.

Ta có $P(k)=Q(k)=0$ nên $R(k)=0$.

Nếu $R(x)\not\equiv 0$ thì $R(x)$ là đa thức hằng khác 0, dẫn đến $R(k)\neq 0$, vô lý; hoặc $R(x)$ là đa thức bậc nhất có dạng $R(x)=ux+v$ với u,v là các số hữu tỉ, $u\neq 0$. Vì $R(k)=0$ nên $k=-\frac{v}{u}$ là số hữu tỉ, vô lý vì $k=\sqrt[3]{a}$ là số vô tỉ. Vậy $R(x)\equiv 0$ hay $P(x)=Q(x)H(x)$, tức là $P(x)$ khả quy trên $\mathbb{Q}[x]$, mâu thuẫn với khẳng định trước đó về tính bất khả quy trên $\mathbb{Q}[x]$ của $P(x)$.

Vậy trường hợp $r\neq 0$ không thể xảy ra. Bài toán được chứng minh xong.

Nhận xét. Lập luận trên thực chất cho thấy $\sqrt[3]{a}$ không thể là nghiệm của bất kì đa thức khác không nào có bậc nhỏ hơn 3 và có hệ số hữu tỉ. Hơn nữa, nếu $T(x)\in\mathbb{Q}[x]$ là đa thức bậc ba nhận $\sqrt[3]{a}$ là nghiệm thì $T(x)$ phải là một bội của $P(x)$, tức là tồn tại số hữu tỉ $\lambda\neq 0$ sao cho $T(x)=\lambda(x^3-a)$.

Kết luận. Các bổ đề trên là những công cụ đơn giản nhưng hữu hiệu trong việc nghiên cứu tính hữu tỉ, vô tỉ của các biểu thức chứa căn. Từ các kết quả cơ bản về căn bậc hai của số nguyên, ta có thể xử lý nhiều bài toán về số chính phương, phương trình căn thức và cả những mở rộng liên quan đến căn bậc cao. Việc vận dụng linh hoạt các bổ đề này giúp học sinh rèn luyện tư duy logic, khả năng nhận diện cấu trúc số học và kỹ năng chứng minh trong các bài toán sơ cấp.

Cuối cùng là bài tập tự luyện dành cho bạn đọc.

BÀI TẬP

1. Có tồn tại số nguyên n sao cho $\sqrt{n-2}+\sqrt{n+2}$ là số hữu tỉ hay không?

2. Có tồn tại số nguyên n sao cho $\sqrt{n-3}+\sqrt{n+5}$ là số hữu tỉ hay không?

3. Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên n sao cho $\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n+1}$ là số hữu tỉ.

4. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $\sqrt{n-1}+\sqrt{2n+5}$ là một số nguyên.

5. Tồn tại hay không số hữu tỉ x khác 0 sao cho $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}$ là số hữu tỉ?

Được quét bằng CamScanner

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 130

PROBLEM. *There are infinitely many prime numbers of the form* $4n+3$.

Solution: Now consider the integer $N=4p_1p_2\cdots p_k-1$. Observe that $N\equiv -1\equiv 3\pmod 4$. Since $N>1$, it must have at least one prime divisor. Let q be a prime divisor of N.

Every odd prime is congruent to either 1 or 3 (mod 4). By the special form of N, it has at least one prime divisor q satisfying $q\equiv 3\pmod 4$.

We can show that q is not among the primes $p_1,p_2,\ldots,p_k$ (why?). And this contradicts the assumption that $p_1,p_2,\ldots,p_k$ were all such primes.

Therefore, there must be infinitely many prime numbers of the form $4n+3$.

TỪ VỰNG/KÍ HIỆU

infinitely many : *vô số*

prime number : *nguyên tố*

assume for the sake of contradiction that : *giả sử phản chứng rằng*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 128

BÀI TOÁN. *Cho hai dãy số* $a_1,a_2,\ldots,a_n$ *và* $b_1,b_2,\ldots,b_n$ *thỏa mãn* $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n$ *và* $b_1\ge 0$, $b_1+b_2\ge 0,\ldots,b_1+b_2+\ldots+b_n\ge 0$.

Chứng minh rằng

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\ge 0.$$

Lời giải. Đặt $B_1=b_1, B_2=b_1+b_2,\ldots,$

$$B_n=b_1+b_2+\ldots+b_n.$$

Sử dụng phép biến đổi Abel, được giới thiệu trong số 585, ta có:

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=(a_1-a_2)B_1+(a_2-a_3)B_2$$
$$+\ldots+(a_{n-1}-a_n)B_{n-1}+a_nB_n$$

Theo giả thiết mọi số hạng của vế phải là không âm do đó vế trái cũng không âm, ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Bạn *Lê Bạch Hải Đăng*, lớp 3B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz, **Cộng hòa Áo** đã gửi sớm và có bài dịch tốt. Xin hoan nghênh bạn.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

****

THÔNG BÁO

Bạn đọc có thể đặt mua các ấn phẩm của Tạp chí Toán học và Văn học trong nhà trường tại các bưu cục của VNPT trên cả nước với mã đặt như sau: *Toán học và Tuổi trẻ* (C168); *Toán Tuổi thơ 1* (C169); *Toán Tuổi thơ 2* (C169.1); *Văn học và Tuổi trẻ* (C668); *Văn Tuổi thơ* (C668.1).

****

Được quét bằng CamScanner



BÀI TOÁN 19. *Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$$

Lời giải. Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $b+c-a>0, c+a-b>0, a+b-c>0$ (*).

Do đó: $\frac{2a}{b+c-a}>0, \frac{2b}{c+a-b}>0, \frac{2c}{a+b-c}>0.$

Tiếp theo ta có các cách giải sau:

Cách 1. Hiển nhiên ta có: $\left(\frac{2a}{b+c-a}-2\right)^2\geq 0$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2a}{b+c-a}\right)^2+\left(\frac{2a}{b+c-a}\right)\geq 10\left(\frac{a}{b+c-a}\right)-4$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2a}{b+c-a}\right)\left(\frac{2a}{b+c-a}+1\right)\geq\frac{10a-4b-4c+4a}{b+c-a}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{b+c-a}\geq\frac{7a-2b-2c}{a+b+c}\quad(1).$$

Tương tự: $\frac{b}{c+a-b}\geq\frac{7b-2c-2a}{a+b+c}$ (2).

$$\frac{c}{a+b-c}\geq\frac{7c-2a-2b}{a+b+c}\quad(3).$$

Cộng vế với vế (1), (2), (3) và rút gọn sẽ được:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$, hay tam giác đã cho đều. Bài toán được chứng minh.

Cách 2. Theo BĐT Cauchy đối với hai biến ta có:

$$1+\frac{b+c-a}{a}\geq 2\sqrt{\frac{b+c-a}{a}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\geq\frac{2a}{b+c}\Leftrightarrow\frac{a}{b+c-a}\geq\frac{4a^2}{(b+c)^2}.$$

Mặt khác $2\left(b^2+c^2\right)\geq(b+c)^2$ là bất đẳng thức đúng quen thuộc, suy ra: $\frac{a}{b+c-a}\geq\frac{2a^2}{b^2+c^2}$ (4).

Tương tự có: $\frac{b}{c+a-b}\geq\frac{2b^2}{c^2+a^2}$ (5);

$$\frac{c}{a+b-c}\geq\frac{2c^2}{a^2+b^2}\quad(6).$$

Cộng vế với vế của (4), (5), (6) sẽ được:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}$$

$$\geq 2\left(\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\right)\geq\frac{2.3}{2}=3\ (**)$$

((**) đúng là do ta áp dụng bất đẳng thức Nesbitt).

Cách 3. Theo BĐT Cauchy cho hai biến ta có:

$$4a^2+(b+c)^2\geq 4a(b+c)$$

$$\Leftrightarrow(b+c)^2\geq 4a(b+c-a)\Leftrightarrow\frac{a}{b+c-a}\geq\frac{4a^2}{(b+c)^2}.$$

Đến đây tiếp tục làm như *cách 2*.

Cách 4. Bài toán đề ra là BĐT có các biến đối xứng, không mất tính tổng quát giả sử $a\geq b\geq c>0$, khi đó:

$$\frac{1}{b+c-a}\geq\frac{1}{c+a-b}\geq\frac{1}{a+b-c}>0.\quad(***)$$

Suy ra: $\frac{a-b}{b+c-a}\geq\frac{a-b}{c+a-b}$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}\geq\frac{a}{c+a-b}+\frac{b}{b+c-a}\quad(7).$$

Chứng minh tương tự, có:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{c}{a+b-c}\geq\frac{a}{a+b-c}+\frac{c}{b+c-a}\quad(8).$$

$$\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq\frac{b}{a+b-c}+\frac{c}{c+a-b}\quad(9).$$

Cộng vế với vế của (7), (8), (9) và đặt vế trái của bài ra là B sẽ được:

$$2B\geq\frac{a+c}{c+a-b}+\frac{c+b}{b+c-a}+\frac{b+a}{a+b-c}$$

$$\Leftrightarrow B\geq\frac{a+c}{c+a-b}-\frac{b}{c+a-b}+\frac{c+b}{b+c-a}$$

$$-\frac{a}{b+c-a}+\frac{b+a}{a+b-c}-\frac{c}{a+b-c}=3\ (\text{đpcm}).$$

Cách 5. BĐT đã cho tương đương với BĐT sau:

$$\frac{a}{b+c-a}-1+\frac{b}{c+a-b}-1+\frac{c}{a+b-c}-1\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2a-b-c}{b+c-a}+\frac{2b-c-a}{c+a-b}+\frac{2c-a-b}{a+b-c}\geq 0\quad(10).$$

Theo (*) và (***) ta có: $\frac{2a-b-c}{b+c-a}\geq\frac{2a-b-c}{c+a-b}$ (11);

Được quét bằng CamScanner

$$\frac{2b-c-a}{c+a-b}=\frac{2b-c-a}{c+a-b} \quad (12).$$

$$\frac{2c-a-b}{a+b-c}\geq\frac{2c-a-b}{c+a-b} \quad (13).$$

Cộng theo vế (11), (12), (13) rồi rút gọn lại được BĐT (10), từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Cách 6. Theo BĐT Cauchy cho ba số sẽ được:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}.$$

Đến đây bài toán được chứng minh nếu ta chứng minh được $abc\geq(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $a=\max\{a,b,c\}$. Dễ thấy:

$$a^2\geq a^2-(b-c)^2=(a+b-c)(a-b+c).$$

Tương tự: $b^2\geq(b+c-a)(b-c+a)$;

$$c^2\geq(c+a-b)(c-a+b).$$

Suy ra: $a^2b^2c^2\geq\left[(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\right]^2$

$$\Leftrightarrow abc\geq(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

Vậy suy ra: $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$

NGÔ VĂN THÁI (*Hưng Yên*)

Nhận xét. 1) Ngoài 6 cách giải do tác giả bài toán đưa ra, còn có một số cách giải hay của các bạn tham gia gửi bài về toà soạn như sau.

Cách 7. Đặt $T=\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}$.

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab;\ \frac{b^2+c^2}{2}\geq bc;\ \frac{c^2+a^2}{2}\geq ca.$$

Từ đó: $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca.$

Hay $ab+bc+ca-(a^2+b^2+c^2)\leq 0$ (1)

và $(a+b+c)^2\geq 3ab+3bc+3ca$ (2).

Áp dụng BĐT Schwarz, ta có:

$$T=\frac{a^2}{ab+ac-a^2}+\frac{b^2}{bc+ab-b^2}+\frac{c^2}{ac+bc-c^2}$$

$$\geq\frac{(a+b+c)^2}{ab+ca+bc+ab+ca+bc-a^2-b^2-c^2}$$

$$\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)}.$$

Từ (1) và (2), suy ra: $T\geq\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\geq 3$ (đpcm).

Cách 8. (Theo *Nguyễn Hoàng Hải*, cựu SV Khoa CNTT, HV Bưu chính Viễn Thông và một số bạn)

Đặt $b+c-a=x;c+a-b=y;a+b-c=z.$

Suy ra: $a=\frac{y+z}{2};\ a=\frac{z+x}{2};\ c=\frac{x+y}{2}.$

Khi đó: $T=\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}$

và $2T=\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}.$

Suy ra: $2T+3=\frac{x+y+z}{x}+\frac{x+y+z}{y}+\frac{x+y+z}{z}$

$=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$. Ta có:

$$x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz};\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}.$$

Do đó: $2T+3\geq 3\sqrt[3]{xyz}.3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}=9$ hay $T\geq 3.$

2) Các bạn: *Phùng Quang Minh*, p.Hạc Thành, **Thanh Hoá** đóng góp 13 cách giải, *Nguyễn Hoàng Hải*, cựu SV Khoa CNTT, HV Bưu chính Viễn Thông đóng góp 6 cách giải, *Lê Hoàng Long*, p. Tây Hiếu, **Nghệ An** đóng góp 8 cách giải, *Vũ Đức Duy*, phường Bình Lợi Trung, **TP. Hồ Chí Minh** đóng góp 5 cách giải, *Đoàn Minh Phúc*, 9/1, THCS Nguyễn Khuyến, p. Tân Ngãi, **Vĩnh Long** đóng góp 3 cách giải, *Nguyễn Xuân Tùng*, 10E1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, **TP. Hồ Chí Minh** đóng góp 2 cách giải; *Trần Gia Phú*, p. Phố Hiến, **Hưng Yên**, *Phan Minh Quân*, 9I, THCS Trần Hưng Đạo, p. Đông Hà, **Quảng Trị** và *Đào Hữu Thiện*, 10A1, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, **Sóc Trăng** mỗi bạn đóng góp 1 cách giải. Hoan nghênh tất cả các bạn.

KHÁNH BÌNH (Hà Nội)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 111 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31/8/2026.

BÀI TOÁN 111. *Đội thanh niên tình nguyện của một trường gồm có 2 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 6 học sinh lớp C. Trong đợt tham gia tiếp sức mùa thi, họ đứng ngẫu nhiên thành một hàng ngang để chụp ảnh kỷ niệm. Tính xác suất mà đứng giữa hai học sinh lớp A không có học sinh lớp C.*

NGUYỄN THANH HẢI
(*GV THPT Triệu Sơn 4, Thanh Hoá*)

Được quét bằng CamScanner



BÀI TOÁN 117 (Vô địch Quốc gia Toán Hungary, 1997). *Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình:*

$$x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 + \ldots + (x+7)^3 = y^3.$$

Lời giải. Đặt

$$P(x) = x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 + (x+3)^3 + (x+4)^3 + (x+5)^3 + (x+6)^3 + (x+7)^3$$
$$= x^3 + (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) + (x^3 + 9x^2 + 27x + 27) + (x^3 + 12x^2 + 48x + 64) + (x^3 + 15x^2 + 75x + 125) + (x^3 + 18x^2 + 108x + 216) + (x^3 + 21x^2 + 147x + 343)$$
$$= 8x^3 + 84x^2 + 420x + 784.$$

• Nếu $x \geq 0$, ta có:

$$(2x+7)^3 = 8x^3 + 84x^2 + 294x + 343 < P(x) < 8x^3 + 120x^2 + 600x + 1000 = (2x+10)^3,$$

do đó: $2x + 7 < y < 2x + 10$.

Suy ra: $y = 2x + 8$ hoặc $y = 2x + 9$.

Tuy nhiên các phương trình:

$$P(x) - (2x+8)^3 = -12x^2 + 36x + 272 = 0$$
$$P(x) - (2x+9)^3 = -24x^2 - 66x + 55 = 0$$

không thể có bất cứ nghiệm nguyên nào. Vậy với $x \geq 0$ thì phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

• Ta xét trường hợp $x < 0$.

Ta có: $P(-x-7) = (-x-7)^3 + (-x-6)^3 + \ldots + (-x-5)^3 + \ldots + (-x)^3 = -P(x)$

nên nếu $(x; y)$ là một nghiệm của phương trình thì $(-x-7; -y)$ (*) cũng là một nghiệm của phương trình.

Do đó phương trình sẽ không có nghiệm nguyên nếu $-x - 7 \geq 0$ hay $x \leq -7$.

Vậy ta chỉ cần xét $-6 \leq x \leq -1$.

Với $-3 \leq x \leq -1$ ta có:

$P(-1) = -8 + 84 - 420 + 784 = 440;$

$P(-2) = 8.(-8) + 84.4 + 420.(-2) + 784 = 216 = 6^3;$

$P(-3) = 8.(-27) + 84.9 + 420.(-3) + 784 = 64 = 4^3.$

Suy ra $(-2; 6)$ và $(-3; 4)$ là các nghiệm nguyên thỏa mãn $-3 \leq x \leq -1$.

Do (*) nên $(-5; -6)$ và $(-4; -4)$ cũng là các nghiệm của phương trình thỏa mãn $-6 \leq x \leq -1$.

Tóm lại, các nghiệm nguyên của phương trình đã cho là: $(-2; 6)$, $(-3; 4)$, $(-5; -6)$, $(-4; -4)$.

Nhận xét. Rất tiếc là Tòa soạn không nhận được lời giải nào cho bài toán này.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30/6/2026.

BÀI TOÁN 117. *Với những tứ giác lồi $ABCD$ nào thì ta có thể tìm được một điểm P trong mặt phẳng của tứ giác đó sao cho cả bốn tam giác PAB, PBC, PCD, PDA đều có cùng diện tích. Với một tứ giác cho trước, số lớn nhất các điểm như thế là bao nhiêu?*

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

****

MATH JOKES

π to i: *Get real!*

i to π: *Get rational!*

An infinite crowd of mathematicians enters a bar. The first one orders a pint, the second one a half pint, the third one a quarter pint ... "*I understand*", says the bartender - and pours two pints.

Q: *Why do you rarely find mathematicians spending time at the beach?*

A: *Because they have sine and cosine to get a tan and don't need the sun!*

Được quét bằng CamScanner



GIẢI ĐÁP: ĐÚNG HAY KHÔNG?

(Đề đăng trên TH&TT số 585, tháng 3 năm 2026)

Phân tích sai lầm. Mỗi nghiệm của phương trình $a+b+c=91$ là một bộ số có tính thứ tự $(a;b;c)$, trong khi mỗi kết quả có thể xảy ra của phép thử (hay mỗi phần tử của không gian mẫu), mỗi kết quả thuận lợi của biến cố (hay mỗi phần tử của biến cố) có dạng $\{a;b;c\}$, ở đó a,b,c không tính thứ tự. Do đó $|\Omega|=C_{90}^2-45\cdot3=3870$ trong lời giải của bạn Giang là không đúng.

Lời giải đúng. Gọi M là biến cố cần tính xác suất. Ta thấy rằng, phương trình $a+b+c=91$ có C_{90}^2 nghiệm nguyên dương.

Trong số các nghiệm nguyên dương $(a;b;c)$ đó, không có nghiệm nào thỏa mãn $a=b=c$.

Nếu $\begin{cases}a=b\neq c\\a+b+c=91\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\neq c\\2a+c=91\end{cases}$ thì có 45 cách chọn a (là số nguyên dương từ 1 đến 45) và mỗi cách chọn a có một cách chọn b và c. Do đó, trong số các nghiệm nguyên dương $(a;b;c)$ của phương trình $a+b+c=91$, có 45 nghiệm thỏa mãn $a=b\neq c$. Tương tự, cũng sẽ có 45 nghiệm thỏa mãn $a\neq b=c$, có 45 nghiệm thỏa mãn $b\neq a=c$. Từ đó suy ra số nghiệm nguyên dương $(a;b;c)$ của phương trình $a+b+c=91$ sao cho a,b,c đôi một phân biệt là $C_{90}^2-45\cdot3$. Ta lưu ý rằng, mỗi kết quả có thể xảy ra của phép thử (tức là mỗi phần tử của không gian mẫu) có dạng $\{a;b;c\}$ và ứng với 3! nghiệm nguyên dương $(a;b;c)$ của phương trình $a+b+c=91$ (a,b,c đôi một phân biệt).

Vậy $|\Omega|=\dfrac{C_{90}^2-45.3}{3!}=\dfrac{3870}{6}=645.$

Nếu ba số a,b,c có tổng bằng 91 và lập thành cấp số nhân có công bội q nguyên dương thì

$$a+aq+aq^2=91$$

$$\Rightarrow 1+q+q^2\in U(91)=\{1;7;13;91\}\Rightarrow q\in\{2;3;9\}.$$

Từ đó tìm ra các tập con gồm 3 phần tử của A sao cho 3 phần tử đó có tổng bằng 91 và chúng lập thành cấp số nhân có công bội là số nguyên dương là $\{1;9;81\},\{7;21;63\},\{13;26;52\}$.

Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố M, $|M|=3$.

Vậy $P(M)=\dfrac{|M|}{|\Omega|}=\dfrac{3}{645}=\dfrac{1}{215}.$

Nhận xét. Các bạn: *Nguyễn Hùng Cường*, phường An Nhơn, **Gia Lai**, *Vũ Đức Duy*, phường Bình Lợi Trung, **TP. Hồ Chí Minh**, *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**, *Lê Nguyễn Khánh Triều*, 12/5, THPT Thái Phiên, **Đà Nẵng** đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng. Xin hoan nghênh các bạn.

KIHIVI

PHƯƠNG TRÌNH CÓ VÔ NGHIỆM KHÔNG?



Trong đề kiểm tra có bài toán sau: *Giải phương trình*: $\sqrt{2}(\cos x+\sin x)=\tan3x+\cot3x$ (*).

Một học sinh đã có lời giải như sau:

Điều kiện: $\sin3x\cos3x\neq0\Leftrightarrow\sin6x\neq0$

$\Leftrightarrow x\neq\dfrac{k\pi}{6}$ $(k\in\mathbb{Z})$. Với $x\neq\dfrac{k\pi}{6}$ ta có:

$$VT=\sqrt{2}(\cos x+\sin x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow VT\leq2;$$

$$VP=\tan3x+\cot3x=\tan3x+\frac{1}{\tan3x}\geq2.$$

Do đó: $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}\tan3x+\dfrac{1}{\tan3x}=2\\\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\tan^23x-2\tan x+1=0\\\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(\tan3x-1)^2=0\\x-\dfrac{\pi}{4}=n2\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\tan3x=1\\x=\dfrac{\pi}{4}+n2\pi\end{cases}.$$

Ta thấy $\tan3\left(\dfrac{\pi}{4}+n2\pi\right)=\tan\dfrac{3\pi}{4}=-1\neq1.$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Theo bạn phương trình có vô nghiệm không?

NGUYỄN THANH GIANG

(Trường THPT chuyên Hưng Yên)

Được quét bằng CamScanner

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 589 (7.2026)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
NGUYỄN TIẾN THANH
Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam
PHẠM VĨNH THÁI
Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD
LÊ HỒNG SƠN

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

***Tổng biên tập*: NGUYỄN HỮU BẮC** ***Thư kí Tòa soạn*: VÕ THỊ HỒNG THU**

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* TRẦN HỮU NAM, *TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Nguyễn Anh Tuấn, Nguyễn Công Lợi – Sử dụng tính chất của số dư để giải một số bài toán về số chính phương.

10 Hướng dẫn giải đề thi vào lớp 10 THPT chuyên tỉnh Ninh Bình, năm học 2026 – 2027.

15 Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Hà Nội, môn Toán (chuyên Toán) năm học 2026 – 2027.

16 **Diễn đàn dạy học Toán**
Nguyễn Văn Nho – Tính xác suất theo phương pháp đếm lọc không gian mẫu.

20 **Đề ra kỳ này** *Problems in This Issue*
T1/589, ..., T12/589, L1/589, L2/589.

23 **Giải bài kì trước**
Solutions to Previous Problems
T1/585, ..., T12/585, L1/585, L2/585

33 **Phương pháp giải toán**
Ngô Văn Thái – Trở lại bài toán về bất đẳng thức trong kỳ thi IMO năm 1983.

37 **Bạn đọc tìm tòi**
Cao Minh Quang – Một số bổ đề đẹp về tính hữu tỷ của căn thức.

43 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 130 – Bài dịch số 128.

44 **Nhiều cách giải cho một bài toán** – Giải bài toán 109 – Đề bài toán 111.

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay** – Giải bài toán 117. Đề bài toán 119.

47 **Sai lầm ở đâu?**

***Biên tập*:** KIM THANH, NHƯ HOÀNG
***Trị sự, phát hành*:** TRẦN THỊ MINH HIỀN
***Mĩ thuật*:** QUỐC HIỆP, THANH LONG
***Thiết kế, chế bản*:** MINH HÒA

Được quét bằng CamScanner

OLYMPIC TOÁN TUỔI THƠ ONLINE... (Tiếp theo bìa 4)

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đồng hành phát triển nguồn nhân lực chất lượng cao

Ngay trong năm đầu tiên tổ chức theo hình thức trực tuyến, Olympic Toán Tuổi thơ Online toàn quốc 2026 đã thu hút hơn 40.000 học sinh từ lớp 4 đến lớp 8 trên khắp cả nước đăng ký tham gia.

Sau 2 vòng thi trực tuyến sôi nổi, 250 học sinh xuất sắc nhất đã giành quyền góp mặt tại vòng chung kết toàn quốc tổ chức trực tiếp trên máy tính tại Hà Nội.

Việc tổ chức thi trực tiếp trên nền tảng số không chỉ bảo đảm tính khách quan, minh bạch mà còn giúp học sinh làm quen với phương thức đánh giá hiện đại, phù hợp với xu thế giáo dục trong thời đại số.

Phát biểu tại lễ tổng kết và trao giải, PGS.TS Nguyễn Văn Tùng, Thành viên Hội đồng thành viên Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam khẳng định: "Trong nhiều năm qua, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam luôn kiên định sứ mệnh đồng hành cùng ngành Giáo dục không chỉ thông qua sách giáo khoa và học liệu mà còn bằng những hoạt động góp phần phát triển văn hóa đọc, khơi dậy niềm say mê học tập và bồi dưỡng nhân tài. Những giải thưởng hôm nay là sự ghi nhận xứng đáng đối với nỗ lực của các em học sinh, sự tận tâm của đội ngũ thầy cô giáo và sự đồng hành bền bỉ của các bậc phụ huynh. Dù kết quả có khác nhau, tất cả các em đều là những người chiến thắng khi đã dám thử thách bản thân và không ngừng vươn lên".

Ông Tùng cũng nhấn mạnh, Olympic Toán Tuổi thơ Online toàn quốc 2026 không đơn thuần là một cuộc thi, mà là hành trình nuôi dưỡng tư duy logic, khơi dậy niềm yêu thích Toán học và tạo động lực để các em chinh phục những đỉnh cao tri thức trong tương lai.

Bên cạnh các phần thi chuyên môn, vòng chung kết còn mang đến nhiều hoạt động trải nghiệm ý nghĩa như tham quan Di tích Quốc gia đặc biệt Văn Miếu – Quốc Tử Giám, giao lưu với các chuyên gia trong lĩnh vực khoa học – công nghệ, trải nghiệm các ứng dụng trí tuệ nhân tạo và công nghệ giáo dục hiện đại.

Những hoạt động này giúp học sinh mở rộng hiểu biết, khơi dậy tinh thần sáng tạo và truyền cảm hứng khám phá khoa học trong bối cảnh chuyển đổi số đang diễn ra mạnh mẽ.

Thành công của mùa giải cũng ghi nhận sự đồng hành tích cực của các Sở Giáo dục và Đào tạo, các trường Tiểu học, THCS trên cả nước, Hội đồng chuyên môn, các đơn vị phối hợp gồm VietED và Fast Lane, cùng các nhà tài trợ và cơ quan truyền thông.

Mở rộng hệ sinh thái Olympic học thuật từ năm học 2026 – 2027

Từ những kết quả tích cực của năm đầu tiên triển khai trực tuyến, Viện Nghiên cứu Sách và Học liệu giáo dục cùng Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam sẽ tiếp tục hoàn thiện mô hình tổ chức để mở rộng quy mô cuộc thi từ năm học 2026 – 2027 và trong những năm tiếp theo.

Để biết danh sách thí sinh đoạt giải cuộc thi, bạn đọc truy cập trang web: ***olympictuoitho.vn*** *hoặc quét mã QR.*



Các thí sinh tham dự vòng thi Chung kết Olympic Toán tuổi thơ Online toàn quốc 2026



Các bạn học sinh đoạt giải Nhất tại vòng chung kết Olympic Toán Tuổi thơ Online toàn quốc 2026

Ban Truyền thông và Đối ngoại

Được quét bằng CamScanner

OLYMPIC TOÁN TUỔI THƠ ONLINE TOÀN QUỐC 2026

DẤU MỐC CHUYỂN ĐỔI SỐ CỦA SÂN CHƠI TRÍ TUỆ HƠN 20 NĂM TUỔI

(NXBGDVN) – Trong suốt hơn hai thập kỷ qua, Olympic Toán Tuổi thơ đã trở thành một trong những sân chơi học thuật uy tín dành cho học sinh phổ thông trên cả nước. Được khởi nguồn từ Tạp chí Toán Tuổi thơ (nay thuộc Viện Nghiên cứu Sách và Học liệu giáo dục – Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam), cuộc thi được tổ chức thường niên với sự phối hợp của các Sở Giáo dục và Đào tạo, góp phần lan tỏa tình yêu Toán học, phát hiện và bồi dưỡng nhiều học sinh có năng lực nổi bật.

Tiếp nối hành trình ấy, năm học 2025 – 2026 đánh dấu một bước chuyển mình quan trọng khi Viện Nghiên cứu Sách và Học liệu giáo dục phối hợp cùng Công ty Cổ phần Công nghệ Giáo dục thông minh (VietED) triển khai thí điểm **Olympic Toán Tuổi thơ Online toàn quốc 2026**.

Đây không chỉ là sự đổi mới về hình thức tổ chức mà còn là bước đi cụ thể trong thực hiện chủ trương chuyển đổi số của ngành Giáo dục, hướng tới xây dựng một môi trường học tập hiện đại, minh bạch và bình đẳng cho học sinh trên mọi miền đất nước.

Một sân chơi mở rộng cơ hội cho mọi học sinh

Cuộc thi dành cho học sinh từ lớp 4 đến lớp 8 trên phạm vi toàn quốc, được tổ chức hoàn toàn trên nền tảng LMS, cho phép thí sinh tham gia bằng máy tính, máy tính bảng hoặc điện thoại thông minh có kết nối Internet.

Điểm mới nổi bật của mùa giải năm nay là mô hình thi ba vòng linh hoạt. Ở vòng sơ loại, mỗi thí sinh được dự thi tối đa ba lần và lấy kết quả cao nhất để xét vào vòng tiếp theo. Cách thức này giúp giảm áp lực thi cử, tạo thêm cơ hội để học sinh phát huy đúng năng lực, đồng thời rèn luyện kỹ năng tư duy và quản lý thời gian.

Đề thi được thiết kế theo hình thức trắc nghiệm, tăng cường các câu hỏi gắn với thực tiễn, khuyến khích học sinh vận dụng kiến thức



PGS.TS Nguyễn Văn Tùng - Thành viên Hội đồng thành viên NXBGD Việt Nam chúc mừng thành công của cuộc thi

thay vì ghi nhớ máy móc. Đây cũng là định hướng phù hợp với yêu cầu đổi mới kiểm tra, đánh giá trong Chương trình Giáo dục phổ thông 2018.

Ứng dụng AI – Bước tiến mới trong đánh giá năng lực học sinh

Một trong những điểm nhấn nổi bật của Olympic Toán Tuổi thơ Online toàn quốc 2026 là việc lần đầu tiên ứng dụng trí tuệ nhân tạo (AI) vào phân tích kết quả bài thi.

Ngay sau khi hoàn thành bài làm, mỗi thí sinh không chỉ nhận được điểm số mà còn có báo cáo chi tiết về năng lực tư duy, nhóm kỹ năng nổi trội, tốc độ xử lý, những dạng bài còn hạn chế cũng như các nội dung cần tiếp tục bồi dưỡng.

Việc ứng dụng AI giúp giáo viên và phụ huynh có thêm dữ liệu khoa học để đồng hành cùng học sinh, từng bước hiện thực hóa mục tiêu cá nhân hóa việc học – một xu hướng quan trọng của giáo dục hiện đại.

Đồng thời, cuộc thi cũng giúp học sinh nhận thức rõ hơn mối liên hệ giữa Toán học với các lĩnh vực công nghệ như lập trình, khoa học dữ liệu, robot và trí tuệ nhân tạo, từ đó truyền cảm hứng theo đuổi các ngành khoa học – công nghệ trong tương lai.

(Xem tiếp bìa 3)

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT7M26
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2026

Giá: 22.000 đồng
Hai mươi hai nghìn đồng

Được quét bằng CamScanner