TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

TẠP CHÍ Toán học & Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG

Số 571
Tháng 1 - 2025
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 62 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com



Được quét bằng CamScanner

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



Năm 2010
Khổ 19 × 26,5 cm
Giá bìa: 99.000 đồng

Năm 2014
Khổ 19 × 26,5 cm
Giá bìa: 185.000 đồng

Năm 2015
Khổ 19 × 26,5 cm
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2016
Khổ 19 × 26,5 cm
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2017
Khổ 19 × 26,5 cm
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2018
Khổ 19 × 26,5 cm
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2019
Khổ 19 × 26,5 cm
Giá bìa: 199.000 đồng

Năm 2020
Khổ 19 × 26,5 cm
Giá bìa: 210.000 đồng

Năm 2021
Khổ 19 × 26,5 cm
Giá bìa: 240.000 đồng

Năm 2022
Khổ 19 × 26,5 cm
Giá bìa: 260.000 đồng

Năm 2023
Khổ 19 × 26,5 cm
Giá bìa: 260.000 đồng

Năm 2024
Khổ 19 × 26,5 cm
Giá bìa: 300.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Hà Nội
- Điện thoại: 024.35121606 - 024.35121607
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

Thông báo: Do điều kiện khách quan, Lễ kỉ niệm 60 năm Toán học và Tuổi trẻ, 30 năm Văn học và Tuổi trẻ, 25 năm Toán Tuổi thơ sẽ không tổ chức trong tháng 1 năm 2025 mà sẽ dời tới thời điểm thích hợp trong năm 2025.
Vậy Tạp chí Toán học và Văn học trong nhà trường trân trọng thông báo.

TH&VH TNT

Được quét bằng CamScanner



PHƯƠNG PHÁP ĐẾM BẰNG HAI CÁCH TRONG CÁC BÀI TOÁN TỔ HỢP Ở THCS

CAO VĂN DŨNG (GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)
NGUYỄN ĐỨC HẢI (GV Trường Liên cấp TH, THCS Ngôi Sao, Hà Nội)

Với một tập hợp S hữu hạn, có hai phép đếm số phần tử của S. Phép đếm thứ nhất cho kết quả m, phép đếm thứ hai cho kết quả n. Thế thì ta có ngay $m = n$. Nguyên lý đếm bằng hai cách tưởng chừng hết sức đơn giản và dễ hiểu này lại là chìa khóa của những bài toán Tổ hợp hay, đẹp và hóc búa. Trong khuôn khổ bài viết này, các tác giả chỉ giới hạn với các bài toán Tổ hợp ở cấp THCS.

Trước tiên, ta cần điểm qua các kiến thức đầu tiên về phép đếm sẽ được sử dụng trong bài viết:

• **Quy tắc cộng:** *Một công việc có hai phương án: phương án A có m cách thực hiện, phương án B có n cách thực hiện, thì để làm công việc đó, có tất cả* $m+n$ *cách thực hiện.*

• **Quy tắc nhân:** *Một công việc có hai công đoạn: công đoạn thứ nhất có m cách thực hiện, với mỗi công đoạn đó công đoạn thứ hai có n cách thực hiện. Vậy để làm công việc đó, có tất cả m.n cách thực hiện.*

• *Số tập con có 2 phần tử của một tập có n phần tử* $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ *là* $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Ta xét bài toán đầu tiên:

Bài 1. *Lớp 9A có 45 học sinh. Biết rằng mỗi học sinh thích đúng 2 môn thể thao, và mỗi môn thể thao là sở thích của đúng 18 bạn học sinh trong lớp. Hỏi số môn thể thao mà các bạn học sinh lớp 9A thích là bao nhiêu?*

Phân tích. Gọi số môn thể thao là m. Một cách trực quan, ta có thể "phiên dịch" ngôn ngữ của bài toán thành một bảng hình chữ nhật có m hàng và 45 cột như dưới đây:

Môn \ HS	1	2	3	4	…	45
1	x	x		x		
2	x		x			x
…				x		
m		x	x			x

Ta đánh dấu "x" vào giao của cột a và hàng b, nếu bạn học sinh thứ a thích môn thể thao thứ b.

Có 45 học sinh, mỗi học sinh thích đúng 2 môn thể thao, nên số dấu "x" được đánh trên bảng là $45 \cdot 2 = 90$ (dấu)

Mặt khác, do mỗi môn thể thao có đúng 18 bạn học sinh yêu thích, nên mỗi hàng của bảng có đúng 18 dấu "x", do đó số hàng của bảng (giá trị của m) là $90 : 18 = 5$ (hàng)

Vậy có đúng 5 môn thể thao. Bây giờ, ta hãy quan sát lời giải sau:

Lời giải. Ta đếm số lượng các bộ (A, B), trong đó học sinh A thích môn thể thao B. Giả sử kết quả đếm là S. Ta có hai cách đếm như sau:

Cách 1: Đếm theo A.

Vì có tất cả 45 học sinh nên có tất cả 45 cách chọn A. Với mỗi cách chọn A, có tất cả 2 cách chọn B (vì mỗi học sinh thích đúng 2 môn thể thao). Do đó, theo quy tắc nhân, $S = 45 \cdot 2 = 90$.

Được quét bằng CamScanner

Cách 2: Đếm theo B.

Gọi số môn thể thao là m thì có m cách chọn B. Với mỗi cách chọn B, có đúng 18 cách chọn A. Do đó, theo quy tắc nhân thì $S = m \cdot 18$.

So sánh hai cách đếm, ta có $18m = 90$, hay $m = 5$.

Bình luận. Số các bộ (A,B) mà lời giải trên đề cập đến, chính là số dấu "x" trong Phân tích ta đã làm ở trên. Tuy rằng số bộ (A,B) là một khái niệm khó tưởng tượng, nhưng ở những bài toán phức tạp hơn, nó lại tỏ ra rất hữu hiệu. Ta hãy xem tiếp thí dụ sau đây:

Bài 2. *Một lớp học có 25 học sinh. Thầy giáo muốn giao cho lớp một số đề tài nghiên cứu Toán học, sao cho mỗi đề tài có 5 bạn phụ trách, và hai bạn bất kì trong lớp làm chung nhau đúng một đề tài. Hỏi thầy giáo đã giao bao nhiêu đề tài?*

Lời giải. Ta gọi S là số bộ $(\{A;B\},C)$, trong đó A,B là hai học sinh cùng phụ trách đề tài C.

Cách 1: Đếm theo tập $\{A;B\}$. Số cách chọn 2 bạn (không kể đến thứ tự) từ 25 bạn là $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$.

Vì mỗi cặp học sinh bất kì đều làm chung nhau đúng 1 đề tài nên $S = 300$.

Cách 2: Đếm theo C. Có tất cả m đề tài, mỗi đề tài có 5 bạn phụ trách, nên số cặp[$\{A;B\}$ cùng làm đề tài C là $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ (cặp). Từ đó $S = 10m$.

Do đó: $10m = 300$, suy ra $m = 30$.

Vậy thầy giáo đã giao 30 đề tài.

Bình luận. Trong lời giải trên, ta cần đếm số tập $\{A;B\}$ là số tập con có hai phần tử của tập có 25 phần tử. Sở dĩ ta đếm như vậy vì không cần quan tâm đến thứ tự hai bạn học sinh A,B. Nói cách khác, tập $\{A;B\}$ và $\{B;A\}$ ta tính là một. Nếu tính đến thứ tự, ta sẽ đếm bộ (A,B) và $(B;A)$, kết quả phải là $25 \cdot 24 = 600$.

Ngoài các bài toán thiết lập đẳng thức, phương pháp đếm bằng hai cách còn có thể dùng để chứng minh bất đẳng thức và giải các bài toán cực trị tổ hợp. Ta xem xét thí dụ sau đây:

Bài 3. *Một nhóm gồm k $(k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$ học sinh vào quán ăn và chọn món. Biết rằng thực đơn của quán có đúng 10 món, mỗi học sinh chọn đúng 5 món và hai bạn bất kì chọn giống nhau không quá 2 món. Chứng minh rằng $k \leq 6$.*

Lời giải. Gọi S là số bộ $(\{A;B\},C)$, trong đó hai học sinh A,B cùng chọn món ăn C.

Cách 1: Đếm theo tập $\{A;B\}$: Có $\frac{k(k-1)}{2}$ cặp học sinh, ứng với mỗi cặp có không quá 2 cách để chọn món ăn C, nên $S \leq \frac{k(k-1)}{2} \cdot 2 = k(k-1)$.

Cách 2: Đếm theo C: Ta gọi $x_1, x_2, ..., x_{10}$ lần lượt là số học sinh chọn món thứ 1,2,...,10.

Vì có k học sinh mà mỗi học sinh chọn đúng 5 món nên $x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 5k$.

Ta tiến hành đếm S: Với C là món thứ nhất, ta có $\frac{x_1(x_1-1)}{2}$ tập $\{A;B\}$. Tương tự với các món số 2,3,...,10 và cộng lại, ta được:

$$S = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{10}^2\right) - \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 + ... + x_{10}\right).$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky, ta có:

$$S \geq \frac{1}{20}\left(x_1 + x_2 + ... + x_{10}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 + ... + x_{10}\right).$$

Thay $x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 5k$, ta được:

$$S \geq \frac{5k^2}{4} - \frac{5k}{2}.$$

So sánh hai cách đếm, ta thấy:

$$k(k-1) \geq \frac{5k^2}{4} - \frac{5k}{2}, \text{ dẫn đến } k \leq 6.$$

Được quét bằng CamScanner

Bình luận. Điều phức tạp của bài toán này là mỗi món ăn không có cùng một số lượng học sinh chọn. Vì thế thay vì dùng quy tắc nhân, ta bắt buộc phải gọi các ẩn $x_1, x_2, ..., x_{10}$ và đánh giá BĐT như trên. Để bài toán trở nên trọn vẹn hơn, ta cần tìm điều kiện để đẳng thức $k = 6$ xảy ra. Phần này xin dành cho bạn đọc.

Bài 4 (Đề thi thử vào lớp 10 chuyên Toán, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, năm học 2022-2023). *Một trường học có 2020 học sinh nam và 2020 học sinh nữ. Trong trường, người ta có tổ chức một số câu lạc bộ, biết rằng mỗi học sinh tham gia không quá 16 câu lạc bộ và mỗi cặp gồm một học sinh nam và và một học sinh nữ bất kì thì cùng tham gia vào ít nhất một câu lạc bộ. Chứng minh rằng có một câu lạc bộ trong trường mà trong đó có ít nhất 64 học sinh nam và 64 học sinh nữ.*

Lời giải. Giả sử phản chứng, không tồn tại câu lạc bộ nào chứa ít nhất 64 nam và ít nhất 64 nữ.

Gọi S là số bộ $((B,G),C)$ trong đó bạn nam B và bạn nữ G cùng tham gia vào câu lạc bộ C. Ta đếm S bằng hai cách:

Cách 1: Đếm theo bộ (B,G). Vì có 2020 bạn nam và 2020 bạn nữ nên theo quy tắc nhân, có tất cả 2020^2 bộ (B,G). Ứng với mỗi bộ này, ta chọn được ít nhất một câu lạc bộ C, do đó $S \geq 2020^2$.

Cách 2: Đếm theo C. Ta xét hai khả năng của C.

- Khả năng 1: C chứa không quá 63 bạn nam. Có 2020 cách chọn G, mỗi cách chọn G có không quá 16 cách chọn C và mỗi cách chọn C có không quá 63 cách chọn B.

Số bộ cần đếm của khả năng này không vượt quá

$$2020 \cdot 16 \cdot 63.$$

- Khả năng 2: C chứa từ 64 bạn nam trở lên. Theo giả sử phản chứng, C có không quá 63 bạn nữ.

Có 2020 cách chọn B, mỗi cách chọn B có không quá 16 cách chọn C và mỗi cách chọn C có không quá 63 cách chọn G. Số bộ cần đếm của khả năng này không vượt quá $2020 \cdot 16 \cdot 63$.

Theo quy tắc cộng, ta có:

$$S \leq 2020 \cdot 16 \cdot 63 + 2020 \cdot 16 \cdot 63.$$

So sánh hai cách đếm, dẫn đến

$$2020^2 \leq 2 \cdot 2020 \cdot 16 \cdot 63$$

Hay $1010 \leq 16 \cdot 63 = 1008$, mâu thuẫn.

Vậy giả sử là sai, tức là phải tồn tại một câu lạc bộ chứa ít nhất 64 nam và 64 nữ.

Bài 5. *Viết các số 1, 2, ..., 10 vào một bảng ô vuông 10×10, mỗi số xuất hiện đúng 10 lần. Chứng minh rằng tồn tại một cột hoặc một hàng của bảng chứa ít nhất 4 số phân biệt.*

Lời giải. Giả sử phản chứng, mỗi hàng và mỗi cột của bảng đều chứa không quá 3 số phân biệt. Gọi T là số cặp (A,b), trong đó A là một hàng hoặc một cột và b là số xuất hiện trên hàng (cột) A. Ta đếm T theo 2 cách:

Cách 1: Có 20 cách chọn A, mỗi cách chọn A có không quá 3 cách chọn b nên $T \leq 20 \cdot 3 = 60$.

Cách 2: Có 10 cách chọn b. Giả sử trên bảng có m hàng và n cột chứa số b thì số lượng số b trên toàn bộ bảng là: $10 \leq mn \leq \frac{1}{4}(m+n)^2 \Rightarrow m+n \geq 7$.

Tức là ứng với mỗi cách chọn b có ít nhất 7 cách chọn A, từ đó $T \geq 10 \cdot 7 = 70$. So sánh hai cách đếm ta thấy mâu thuẫn. Vậy giả sử là sai, tức là tồn tại một cột hoặc một hàng của bảng chứa ít nhất 4 số phân biệt.

Bây giờ, ta hãy xem xét một bài toán Hình học Tổ hợp.

Được quét bằng CamScanner

Bài 6. *Cho 2023 điểm trên mặt phẳng, không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh số tam giác có ba đỉnh là ba điểm đã cho, và có diện tích bằng 1 không vượt quá* $4046 \cdot 674$ *tam giác.*

Lời giải. Gọi S là số các bộ (AB,C) trong đó A,B,C là ba trong số các điểm đã cho và tam giác ABC có diện tích bằng 1.

Chọn đoạn thẳng AB, ta có:

$$\frac{2023 \cdot 2022}{2} = 1011 \cdot 2023 \text{ (cách).}$$

Với mỗi cách chọn AB, ta cần tìm các điểm C thỏa mãn. Để diện tích tam giác ABC bằng 1, thì khoảng cách từ C đến AB phải bằng $\frac{2}{AB}$, tức là C phải nằm trên hai đường thẳng song song với AB. Tuy nhiên vì không có ba điểm nào thẳng hàng nên số điểm C có thể chọn được không quá 4. Do đó $S \le 1011 \cdot 2023 \cdot 4$.

Với mỗi tam giác thỏa mãn, có thể tạo ra 3 bộ (AB,C) như trên, do đó số tam giác là:

$$\frac{S}{3} \le 337 \cdot 2023 \cdot 4 = 4046 \cdot 674 \text{ (tam giác)}$$

Bình luận. Một cách chọn khéo léo đối tượng cần đếm sẽ giải quyết được bài toán. Dữ kiện diện tích không ảnh hưởng đến kết quả bài toán. Với bài toán tổng quát cho n điểm, số tam giác có diện tích A cho trước không vượt quá $\frac{2n(n-1)}{3}$.

Cuối cùng là một số bài tập tự luyện

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Một lớp học có 45 học sinh. Thầy giáo muốn giao cho lớp một số đề tài nghiên cứu Toán học, sao cho mỗi đề tài có 5 bạn phụ trách, nhưng hai bạn bất kì trong lớp không được chung nhau quá một đề tài.

a) Chỉ ra một cách sắp xếp các bạn học sinh để phụ trách 11 đề tài.

b) Chứng minh rằng thầy giáo không thể giao cho lớp quá 100 đề tài.

Bài 2. Trên mặt phẳng cho n điểm phân biệt và 10 đường thẳng phân biệt, biết rằng mỗi đường thẳng đi qua đúng 10 điểm đã cho. Gọi $x_i \ (1 \le i \le n)$ là số đường thẳng đi qua điểm thứ i trong số n điểm đã cho.

c) Tính tổng $x_1 + x_2 + ... + x_n$.

d) Chứng minh $n > 50$.

Bài 3. (*Đề chọn HSG Toán 9 quận Hoàn Kiếm, Hà Nội, năm học 2023-2024*) Cho bảng ô vuông $n \times n \ (n \in \mathbb{N}, n \ge 4)$. Ta tiến hành điền vào mỗi ô vuông 1×1 của bảng một số nguyên (các số được điền không nhất thiết phân biệt) thỏa mãn tổng các số trong mỗi mảng 3×3 luôn dương, đồng thời tổng các số trong mỗi mảng 4×4 luôn âm.

e) Chỉ ra một cách điền số thỏa mãn với $n = 5$.

f) Tìm giá trị lớn nhất của n để tồn tại một cách điền số thỏa mãn.

Bài 4. (*Đề chọn HSG Toán 9 thành phố Hà Nội, năm học 2022 - 2023*) Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2023}$. Gọi S là tập hợp các trung điểm của các đoạn thẳng $A_iA_j \ (1 \le i < j \le 2023)$ và M là tổng độ dài của tất cả các đoạn thẳng có hai đầu mút là hai điểm thuộc S. Gọi N là tổng độ dài của tất cả các đoạn thẳng $A_iA_j \ (1 \le i < j \le 2023)$. Chứng minh $M < 1011^2 N$.

Bài 5. (*Đề thi Olympic Toán Quốc tế IMO 1998*) Trong một cuộc thi, có a thí sinh và b giám khảo, với $b \ge 3$ và là số lẻ. Mỗi giám khảo chỉ có thể đánh giá thí sinh một trong hai khả năng "đỗ" hoặc "trượt". Giả sử rằng với hai giám khảo bất kỳ, họ đánh giá giống nhau ở nhiều nhất k thí sinh. Chứng minh rằng $\frac{k}{a} \ge \frac{b-1}{2b}$.

Được quét bằng CamScanner

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9, TP. QUẢNG NGÃI NĂM HỌC 2023 - 2024

Bài 1. 1) *Tìm tất cả các số có hai chữ số $\overline{ab}$ sao cho $\dfrac{ab}{|a-b|}$ là số nguyên tố.*

2) *Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn*

$$y^2+2xy-5x-6=0.$$

3) *Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn*

$$a+b=c^3-2024c.$$

Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 6.

Lời giải. 1) Vì a, b có vai trò như nhau nên ta giả sử $a>b$.

Vì $\dfrac{ab}{|a-b|}=p$ với p là số nguyên tố (*), suy ra $ab\vdots p\Rightarrow a\vdots p$ hoặc $b\vdots p$, do đó p là số nguyên tố có một chữ số $\Rightarrow p\in\{2,3,5,7\}$.

Từ (*) ta có: $ab=ap-bp\Rightarrow (a+p)(p-b)=p^2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+p=p^2\\p-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=p^2-p\\b=p-1\end{cases}$$

Với $p=2$ ta có $\overline{ab}=21$ hoặc $\overline{ab}=12$.

Với $p=3$ ta có $\overline{ab}=62$ hoặc $\overline{ab}=26$.

Với $p=5$ và $p=7$ ta có a là số có 2 chữ số (loại).

Vậy các số $\overline{ab}$ cần tìm là 12, 21, 26, 62.

2) Ta có: $y^2+2xy-5x-6=0$

$$\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2=x^2+5x+6\quad(*)$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2=(x+2)(x+3)$$

Vì vế trái là số chính phương; vế phải là tích của 2 số nguyên liên tiếp nên phải có một thừa số bằng 0

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x+2=0\\x+3=0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-2\\x=-3\end{bmatrix}.$$

Với $x=-2\Rightarrow y=2$; Với $x=-3\Rightarrow y=3$. Vậy có 2 cặp số nguyên $(x;y)$ cần tìm là

$$(-2;2)\text{ và }(-3;3).$$

3) Ta có: $a+b=c^3-2024c$

$$\Leftrightarrow a+b+c=c^3-2024c+c$$

$$\Leftrightarrow a+b+c=(c^3-c)-2024c+2c.$$

Vậy $a+b+c=(c^3-c)-2022c$

$$=(c-1)c(c+1)-2022\,c\vdots 6.$$

Xét hiệu: $a^3+b^3+c^3-(a+b+c)$

$$=(a^3-a)+(b^3-b)+(c^3-c)$$

$$=(a-1)a(a+1)+(a-1)a(a+1)+(a-1)a(a+1)\vdots 6.$$

Mà $a+b+c\vdots 6$ nên $a^3+b^3+c^3\vdots 6$.

Bài 2. 1) *Cho biểu thức:*

$$P=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}-1}+\frac{2}{1-4x}\right)\cdot\frac{6\sqrt{x}-9x-1}{1-3\sqrt{x}}$$

với $x\ge 0; x\ne\dfrac{1}{4}; x\ne\dfrac{1}{9}$.

a) *Rút gọn biểu thức P.*

b) *Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.*

2) *Cho biết $a=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{16a^8-51a}>\pi\ (\pi\text{ là số pi}).$$

Lời giải. 1) a) $P=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}-1}+\dfrac{2}{1-4x}\right)\cdot\dfrac{6\sqrt{x}-9x-1}{1-3\sqrt{x}}$

$$=\left[\frac{1}{2\sqrt{x}-1}-\frac{2}{(2\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}\right]\cdot\frac{9x-6\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}+1-2}{(2\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}\cdot\frac{(3\sqrt{x}-1)^2}{3\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}+1}\cdot(3\sqrt{x}-1)=\frac{3\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}+1}.$$

Vậy $P=\dfrac{3\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0; x\ne\dfrac{1}{4}; x\ne\dfrac{1}{9}$.

b) Xét $2P=\dfrac{6\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}=\dfrac{3(2\sqrt{x}+1)-5}{2\sqrt{x}+1}$

$$=3-\frac{5}{2\sqrt{x}+1}.$$

Được quét bằng CamScanner

Với $x \in \mathbb{Z}$ và $x \geq 0$; $x \neq \frac{1}{4}; x \neq \frac{1}{9}$ thì:

$P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2P = 3 - \frac{5}{2\sqrt{x}+1}$ là số nguyên chẵn

$\Leftrightarrow \frac{5}{2\sqrt{x}+1}$ là số nguyên lẻ $\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+1 \in \{1;5\}$.

1) $2\sqrt{x}+1=1 \Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn ĐK).

2) $2\sqrt{x}+1=5 \Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy $x \in \{0;4\}$ là các giá trị cần tìm.

2) Ta có: $a=\frac{1-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2a=1-\sqrt{2} \Rightarrow 1-2a=\sqrt{2}$

$\Rightarrow 4a^2=4a+1 \Rightarrow 16a^4=24a+5$

$\Rightarrow 256a^8=816a+169 \Rightarrow 16a^8-51a=\frac{169}{16}$

$\Rightarrow \sqrt{16a^8-51a}=\frac{13}{4}$.

Vì $\frac{13}{4}=3,25$ và $\pi=3,1416...$ nên $\frac{13}{4}>\pi$.

Vậy $\sqrt{16a^8-51a}>\pi$.

Bài 3. 1) *Giải phương trình*

$$x^2+2022x-2021=2\sqrt{2024x-2023}.$$

2) *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x^2+y^2+2y=4 \\ 2x+y+xy=4 \end{cases}$.

Lời giải. 1) ĐK: $x \geq \frac{2023}{2024}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$x^2-2x+1+2024x-2023-2\sqrt{2024x-2023}+1=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+\left(\sqrt{2024x-2023}-1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \sqrt{2024x-2023}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2024x-2023=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy $x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

2) Ta có: $\begin{cases} x^2+y^2+2y=4 \\ 2x+y+xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2y=4 \\ 4x+2y+2xy=8 \end{cases}$.

Cộng vế với vế hai phương trình ta thu được:

$(x+y)^2+4(x+y)-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=2 \\ x+y=-6 \end{array}\right.$.

+ Giải hệ: $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y+xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x+x(2-x)=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=1 \\ x=2 \Rightarrow y=0 \end{array}\right.$.

+ Giải hệ: $\begin{cases} x+y=-6 \\ 2x+y+xy=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-6 \\ x+x(-6-x)=10 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy HPT có nghiệm: $(x;y) \in \{(1;1),(2;0)\}$.

Bài 4. 1) *Cho tam giác ABC nhọn có ba đường cao AA', BB', CC'. Trên BB' lấy M, trên CC' lấy N sao cho góc $\widehat{AMC}$ và góc $\widehat{ANB}$ là góc vuông. Chứng minh tam giác AB'B đồng dạng với tam giác AC'C và AM = AN.*

2) *Cho đường tròn (O; R), đường kính BC = 2R và điểm A di động trên đường tròn đó (với A khác B và A khác C). Kẻ đường cao AH = h của ΔABC và bán kính OK vuông góc với BC (K khác phía đối với A, có bờ là BC).*

a) *Tìm độ dài h để diện tích của ΔAHK đạt giá trị lớn nhất.*

b) *Chứng minh rằng khi A di chuyển trên đường tròn (O; R) thì tổng AH^2+HK^2 luôn không đổi.*

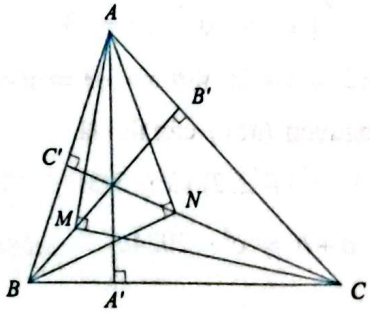
c) *Tính số đo góc $\widehat{ABC}$ của ΔABC khi*

$$5AH^2=3HK^2.$$

Lời giải. 1) Xét tam giác *AB'B* và tam giác *AC'C* có: góc *A* chung, $\widehat{B'}=\widehat{C'}=90^0$. Suy ra tam giác *AB'B* đồng dạng với tam giác *AC'C* (g.g).

Xét ΔAMC vuông tại *M* với đường cao *MB'* có:

$$AM^2=AB'.AC.$$



Được quét bằng CamScanner

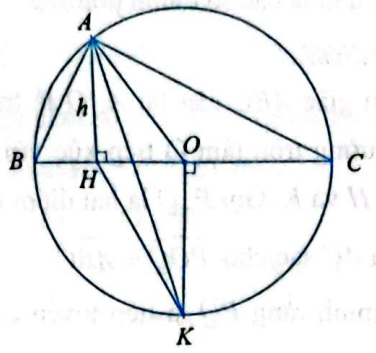
Xét ΔANB vuông tại N với đường cao NC' có:

$$AN^2 = AC'.AB.$$

Do $\Delta AB'B \sim \Delta AC'C$ nên ta có: $AB'.AC = AC'.AB$.

Do đó $AM = AN$.

2)



a) Ta có $OK \perp BC; AH \perp BC \Rightarrow AH // OK$.

Suy ra $S_{AHO} = S_{AHK}$. Mà ΔAOH vuông tại H nên

$$AH^2 + HO^2 = OA^2 \Rightarrow HO^2 = R^2 - h^2$$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{R^2 - h^2}.$$

Lại có $S_{AHO} = \frac{1}{2} AH.OH = \frac{1}{2} h\sqrt{R^2 - h^2}$, nên

$$S_{AHK} = \frac{1}{2} h\sqrt{R^2 - h^2}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương h và $\sqrt{R^2 - h^2}$ ta có:

$$S_{AHK} = \frac{1}{2} h\sqrt{R^2 - h^2} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2 + R^2 - h^2}{2}$$

$$= \frac{1}{4} R^2 \text{ (không đổi).}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} h > 0 \\ h^2 = R^2 - h^2 \end{cases} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2} R.$$

Vậy diện tích tam giác AHK đạt giá trị lớn nhất là $\frac{R^2}{4}$ khi $h = \frac{\sqrt{2}}{2} R$.

b) Ta có ΔOHK vuông tại O.

Suy ra $HK^2 = R^2 + OH^2$, mà $AH^2 = R^2 - OH^2$

do đó: $AH^2 + HK^2 = R^2 + OH^2 + R^2 - OH^2$

$$= 2R^2 \text{ (không đổi).}$$

c) Ta có: $KH^2 = \frac{5}{3} AH^2$,

mà $AH^2 + HK^2 = 2R^2 \Rightarrow AH^2 + \frac{5}{3} AH^2 = 2R^2$

suy ra: $AH^2 = 2R^2 : \frac{8}{3} \Rightarrow AH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Vì ΔOHA vuông tại H nên ta có:

$$AH = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{OA\sqrt{3}}{2}.$$

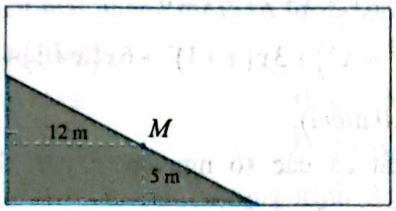
Suy ra ΔOHA là nửa tam giác đều với $\widehat{AOH} = 60^0$.

- Nếu H thuộc đoạn OB, mà ΔOAB cân tại O có 0 $\widehat{AOB} = 60^0$, do đó ΔOAB là tam giác đều, nên $\widehat{ABC} = 60^0$.
- Nếu H thuộc đoạn OC, suy ra:

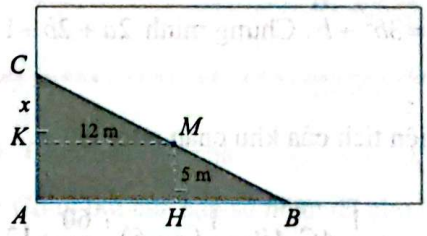
$$\widehat{ACB} = 60^0 \Rightarrow \widehat{ABC} = 90^0 - \widehat{ACB} = 30^0.$$

Vậy $\widehat{ABC} = 60^0$ hoặc $\widehat{ABC} = 30^0$.

Bài 5. *Tại một góc khu vườn hình chữ nhật, có một cây ăn trái ở vị trí M, khoảng cách từ cây đến hai cạnh lần lượt là 5 mét và 12 mét. Người ta làm hàng rào ngăn cách để làm khu chăn nuôi (phần tô đậm), hàng rào là đoạn thẳng đi qua cây ăn trái và hai đầu đoạn thẳng ở hai cạnh của khu vườn. Hỏi diện tích nhỏ nhất có thể làm khu chăn nuôi là bao nhiêu?*



Lời giải.



Đặt $CK = x, (x > 0)$. ΔMKC và ΔBHM đồng dạng nên: $\frac{CK}{MH} = \frac{MK}{BH} \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{12}{BH} \Leftrightarrow BH = \frac{60}{x}$.

Vậy $AC = x + 5$ (mét) và $AB = \frac{60}{x} + 12$ (mét).

Được quét bằng CamScanner

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9
TỈNH HẢI DƯƠNG, NĂM HỌC 2023 – 2024

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1 *(2,0 điểm)*.

1) Rút gọn biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}}+\sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}}.\left(1-\frac{1}{x-1}\right)$$

với $x>1; x\neq 2$.

2) Cho các số thực x, y, z khác 0 thỏa mãn điều kiện $x+y+z=0$. Chứng minh rằng:

$$Q=\sqrt{\frac{6x^2}{x^2-y^2-z^2}+\frac{6y^2}{y^2-z^2-x^2}+\frac{6z^2}{z^2-x^2-y^2}}$$

là số nguyên.

Câu 2 *(2,0 điểm)*.

1) Giải phương trình

$$2x^2+4x+4=(2x+3)\sqrt{x^2+x+2},$$

với $x>1; x\neq 2$.

2) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+2y+5}+2y-1=0\\ 2\left(2y^3+x^3\right)+3y(x+1)^2+6x(x+1)+2=0\end{cases}.$$

Câu 3 *(2,0 điểm)*.

1) Tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa mãn $3x^2+6y^2+2z^2+3y^2z^2-24x=-15$.

2) Cho a, b là các số tự nhiên thỏa mãn: $2a^2+a=3b^2+b$. Chứng minh $2a+2b+1$ và $3a+3b+1$ đều là các số chính phương.

Câu 4 *(3,0 điểm)*.

1) Cho tam giác ABC cân tại A, O là trung điểm của BC. Đường tròn tâm O tiếp xúc với hai cạnh AB, AC tại H và K. Gọi P, Q là hai điểm thuộc các cạnh AB và AC sao cho $\widehat{POQ}=\widehat{ABC}$.

a) Chứng minh rằng PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) HK cắt OQ tại D. Chứng minh PD vuông góc với OQ.

2) Cho tam giác nhọn ABC có ba góc nhọn và trực tâm H. Gọi D, E, F lần lượt là chân ba đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\left(\frac{AB}{HF}\right)^2+\left(\frac{BC}{HD}\right)^2+\left(\frac{CA}{HE}\right)^2\geq 36$.

Câu 5 *(1,0 điểm)*. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c\leq\frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a(bc+1)^2}{c^2(ca+1)}+\frac{b(ca+1)^2}{a^2(ab+1)}+\frac{c(ab+1)^2}{b^2(bc+1)}.$$

LÊ BÁ HOÀNG

(Phòng GD&ĐT TX. Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Giới thiệu

****

☞ Diện tích của khu chăn nuôi là:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC.AB=\frac{1}{2}(x+5).\left(\frac{60}{x}+12\right)$$

$$\Leftrightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}\left(60+12x+\frac{300}{x}+60\right)$$

$$\Leftrightarrow S_{ABC}=6x+\frac{150}{x}+60.$$

Ta có: $6x+\frac{150}{x}\geq 2\sqrt{6x.\frac{150}{x}}=60$ (BĐT Cauchy).

Dấu "=" xảy ra khi

$$6x=\frac{150}{x}\Leftrightarrow x^2=25\Leftrightarrow x=5.$$

Do đó: $S_{ABC}=6x+\frac{150}{x}+60\geq 60+60=120.$

Suy ra diện tích nhỏ nhất có thể làm khu chăn nuôi là 120 (m^2) đạt được khi $x=5$ m.

TRƯƠNG QUANG AN

(Phòng GD&ĐT TX. Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Giới thiệu

Được quét bằng CamScanner

THỬ SỨC TRƯỚC KỲ THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA NĂM 2025

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian làm bài: 90 phút)

PHẦN I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (*Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12, mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án*)

Câu 1. Nếu hàm số $y=f(x)$ có một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ là hàm số $y=F(x)$ thì

A. $f'(x)=F(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

B. $f'(x)=F(x)+C\ (C\in\mathbb{R}),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

C. $F'(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

D. $F'(x)=f(x)+C,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$.

A. $\frac{37}{12}$. **B.** $\frac{9}{4}$.

C. $\frac{81}{12}$. **D.** 13.

Câu 3. Khối lượng của 30 củ khoai tây thu hoạch ở một nông trường được thống kê như bảng sau.

Lớp khối lượng (gam)	Tần số
[70; 80)	3
[80; 90)	6
[90; 100)	12
[100; 110)	6
[110; 120)	3
Cộng	**30**

Tần suất ghép nhóm của lớp $[100;110)$ là

A. 20%. **B.** 40%.

C. 60%. **D.** 80%.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Oy có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=t\\y=t\ (t\in\mathbb{R}).\\z=t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=0\\y=2+t\ (t\in\mathbb{R}).\\z=0\end{cases}$

C. $\begin{cases}x=0\\y=0\ (t\in\mathbb{R}).\\z=t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=t\\y=0\ (t\in\mathbb{R}).\\z=0\end{cases}$

Câu 5. Số nghiệm của phương trình $2\sin x-\sqrt{3}=0$ trên đoạn $[0;2\pi]$ là

A. 3. **B.** 1.

C. 4. **D.** 2.

Câu 6. Phương trình $\log_2 x+\log_2(x-1)=1$ có tập nghiệm là

A. $\{-1;3\}$. **B.** $\{1;3\}$.

C. $\{2\}$. **D.** $\{1\}$.

Câu 7. Mặt phẳng $(P):\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-2}=1$ có một vectơ pháp tuyến là:

A. $\vec{n}=(3;2;3)$. **B.** $\vec{n}=(2;3;-2)$.

C. $\vec{n}=(2;3;2)$. **D.** $\vec{n}=(3;2;-3)$.

Câu 8. Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vị trí tương đối của hai đường thẳng đó là

A. song song. **B.** cắt nhau.

C. vuông góc. **D.** chéo nhau.

Câu 9. Nghiệm của bất phương trình $3^{2x+1}>3^{3-x}$ là

A. $x>-\frac{2}{3}$. **B.** $x<\frac{2}{3}$.

C. $x>\frac{2}{3}$. **D.** $x>\frac{3}{2}$.

Câu 10. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=3$ và $u_2=12$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

A. 4. **B.** 9.

C. $\frac{1}{4}$. **D.** 2.

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}$. **B.** $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}$.

Được quét bằng CamScanner

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=x+\dfrac{1}{x+2}$.

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

b) Đạo hàm của hàm số là

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x+2)^2},\ \forall x\neq -2.$$

c) Nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ trên $\left[-\dfrac{3}{2};0\right]$ là $x=-1$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x+\dfrac{1}{x+2}$ trên $\left[-\dfrac{3}{2};0\right]$ là $\dfrac{1}{2}$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=-x^2+1$.

a) Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục Ox là nghiệm của phương trình $f(x)=0$.

b) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

c) Nếu D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục Ox thì khối tròn xoay có được khi quay D quanh trục Ox một vòng có thể tích được tính theo công thức $V=\int\limits_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^2dx$.

d) Nếu D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục Ox thì khối tròn xoay có được khi quay D quanh trục Ox một vòng có thể tích bằng $\dfrac{16\pi}{15}$.

Câu 3. Kiểm tra thị lực của 240 học sinh khối 12 ở một trường phổ thông được kết quả như hình dưới đây. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh.

Thị lực \ Giới tính	Nam	Nữ
Bị cận thị	47	42
Không bị cận thị	85	66

a) Xác suất của biến cố chọn được học sinh bị cận thị bằng $\dfrac{89}{240}$.

b) Xác suất của biến cố chọn được học sinh nữ bằng $\dfrac{132}{240}$.

c) Xác suất của biến cố chọn được học sinh bị cận thị, biết học sinh đó là nữ bằng $\dfrac{47}{89}$.

d) Xác suất của biến cố chọn được học sinh là nữ, biết học sinh đó bị cận thị bằng $\dfrac{47}{132}$.

Câu 4. Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;9)$ trong 10 phút.

a) Đường thẳng AB có phương trình tham số là

$$\begin{cases}x=800+70t\\y=500+25t.\\z=7+t\end{cases}$$

b) Độ dài quãng đường AB là $\sqrt{70^2+25^2+1^2}$.

c) Vận tốc của máy bay là 800 km/h.

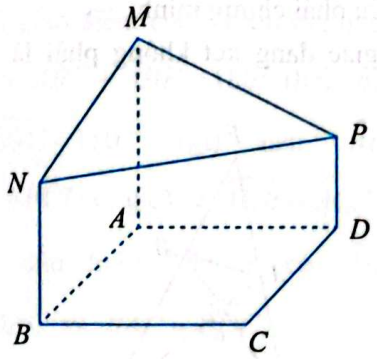
d) Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $C(1010;575;10)$.

Được quét bằng CamScanner

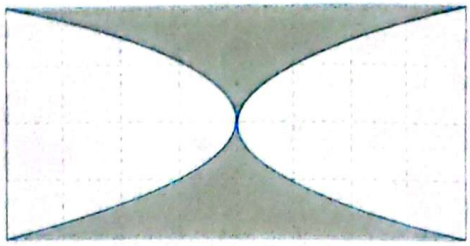
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 1, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác SAB đến mặt phẳng (SAC) (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 2. Một phần thiết kế của một công trình đang xây dựng có dạng như hình bên, trong đó $ABCD$ là hình vuông có cạnh $6m$, AM, BN, DP cùng vuông góc với mp$(ABCD)$, $AM = 4$m, $BN = 3$m, $DP = 2$m. Góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (MNP) là n^0 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ) với n là số nguyên dương. Tính giá trị của n.

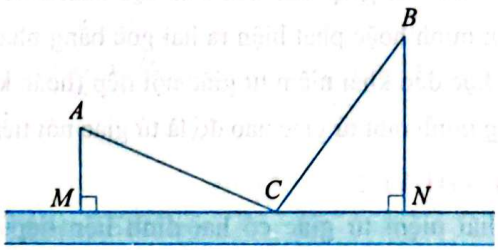


Câu 3. Một nhà thiết kế cần làm một cái logo có dạng hình chữ nhật kích thước 40cm × 80cm. Trong logo có hai đường parabol chung đỉnh, cùng trục đối xứng chứa đường trung bình của hình chữ nhật và hai parabol đi qua đỉnh của hình chữ nhật (hình dưới). Nhà thiết kế có kế hoạch làm màu nền là màu sẫm phần phía trên của cả hai đường parabol và phần phía dưới của cả hai đường parabol, phần còn lại không có màu. Diện tích phần màu sẫm là bao nhiêu dm^2 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Câu 4. Trong hệ trục toạ độ (Oxy), cho đồ thị hàm số (C): $y = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$; $x > -1$ mô tả chuyển động của một chiếc thuyền trên biển, một trạm phát sóng đặt tại điểm $I(-1;-1)$. Biết hoành độ điểm M thuộc đồ thị (C) mà tại đó thuyền thu được sóng tốt nhất là $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} - b$ (loại trừ các điều kiện ảnh hưởng đến việc thu phát sóng). Tính $a.n+b$?

Câu 5. Một thành phố dự định xây dựng một trạm nước sạch để cung cấp cho hai khu dân cư A và B. Trạm nước sạch đặt tại vị trí C trên bờ sông. Biết $AB = 3\sqrt{17}$ km, khoảng cách từ A và B đến bờ sông lần lượt là $AM = 3$km, $BN = 6$km (hình vẽ). Gọi T là tổng độ dài đường ống từ trạm nước đến A và B. Khi T đạt giá trị nhỏ nhất, hãy tính khoảng cách AC.



Câu 6. Hai bạn Việt và Nam mỗi người thực hiện một thí nghiệm một cách độc lập với nhau. Xác suất thực hiện thí nghiệm thành công của Việt và Nam lần lượt là 0,6 và 0,7. Biết rằng có ít nhất 1 người thực hiện thành công thí nghiệm, tính xác suất của biến cố có đúng một trong hai người thực hiện thành công thí nghiệm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

QUÁCH THỊ TUYẾT NHUNG
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

Được quét bằng CamScanner

CHỨNG MINH HAI GÓC BẰNG NHAU

NGUYỄN ANH TUẤN
(GV THCS Hòa Hiếu 2, TX. Thái Hòa, Nghệ An)

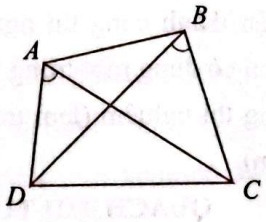
(Kỳ 1)

Một trong những công cụ để chứng minh hoặc phát hiện ra hai góc bằng nhau là sử dụng tứ giác nội tiếp đường tròn. Tuy nhiên, trong *Chương trình Giáo dục phổ thông 2018* nội dung kiến thức về tứ giác nội tiếp (ở các bộ sách giáo khoa như: *Kết nối tri thức với cuộc sống*; *Chân trời sáng tạo*, ...) được giới thiệu ở cuối chương trình lớp 9 và phần dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp chỉ dừng lại ở những tứ giác đơn giản chứ không có các dấu hiệu nhận biết như sách giáo khoa trong chương Chương trình giáo dục phổ thông 2006. Sự thay đổi này làm cho rất nhiều giáo viên gặp khó khăn khi biên soạn các đề kiểm tra cuối kì, đề thi chọn học sinh giỏi hay việc chuẩn bị các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi ở bộ môn hình học. Hy vọng bài viết này sẽ giúp cho các thầy cô giáo giải quyết được những khó khăn như đã nêu ở trên và giúp cho các em học sinh biết cách chứng minh hoặc phát hiện ra hai góc bằng nhau khi chưa học đến khái niệm tứ giác nội tiếp (hoặc không chứng minh một tứ giác nào đó là tứ giác nội tiếp).

I. LÝ THUYẾT

1) Khái niệm tứ giác có hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn một đoạn cạnh dưới hai góc bằng nhau

Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{DAC}=\widehat{DBC}$, khi đó ta nói hai đỉnh A và B cùng nhìn cạnh CD dưới hai góc bằng nhau.



Hình 1

2) Dấu hiệu nhận biết tứ giác có hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau.

2.1) *Nếu một tứ giác có hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau thì:*

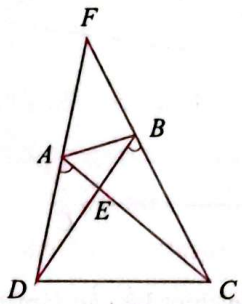
a) *Hai đỉnh liên tiếp còn lại cũng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau.*

b) *Góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong đối diện với góc kề của nó và tổng số đo hai góc đối bằng* 180°.

Chứng minh.

TH1: Nếu tứ giác đang xét là hình chữ nhật thì ta có ngay điều phải chứng minh.

TH2: Tứ giác đang xét không phải là hình chữ nhật



Hình 2

Xét tứ giác $ABCD$ có $\widehat{DAC}=\widehat{DBC}$, gọi E là giao điểm của AC và BD; F là giao điểm của AD và BC (h.2). Ta có:

$\Delta AED \backsim \Delta BEC (g.g)$

$\Rightarrow \widehat{BCA}=\widehat{BDA}, \dfrac{AE}{BE}=\dfrac{DE}{CE} \Rightarrow \widehat{ABD}=\widehat{ACD}$ và $\widehat{BAC}=\widehat{BDC}$.

Vì $\widehat{BCA}=\widehat{BDA} \Rightarrow \Delta FBD \backsim \Delta FAC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{FB}{FA}=\dfrac{FD}{FC} \Rightarrow \Delta FBA \backsim \Delta FDC$ (c.g.c)

Được quét bằng CamScanner

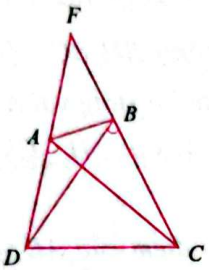
$\Rightarrow \widehat{FBA} = \widehat{FDC}$, mà $\widehat{FBA} + \widehat{ABC} = 180°$ (hai góc kề bù). Do đó $\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180°$.

2.2) *Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối bằng 180° thì hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau.*

Chứng minh.

TH1: Nếu tứ giác đang xét là hình chữ nhật thì ta có ngay điều phải chứng minh.

TH2: Tứ giác đang xét không phải là hình chữ nhật



Hình 3

Xét tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180°$ (h.3). Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC, ta có $\widehat{ABC} + \widehat{ABF} = 180°$ (hai góc kề bù) và $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180°$ (gt) nên $\widehat{ADC} = \widehat{ABF}$ $\Delta FAB \backsim \Delta FCD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACB}$, đến đây sử dụng dấu hiệu 2.1) ta có $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$, $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$.

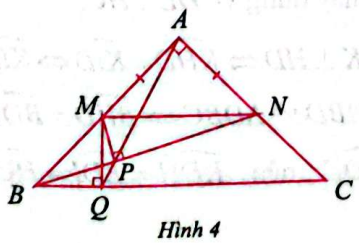
II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1 (Lớp 8). *Cho tam giác ABC vuông cân tại A Trên AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho AM = AN. Gọi P, Q lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ M xuống BN và BC. Chứng minh:*

a) $\widehat{APN} = 45°$;

b) *Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng.*

Lời giải.



Hình 4

a) Vì $AM = AN$ nên tam giác AMN vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ANM} = 45°$. Xét tứ giác $AMPN$ có: $\widehat{MAN} + \widehat{MPN} = 90° + 90° = 180°$

$\Rightarrow \widehat{APN} = \widehat{AMN} = 45°$.

b) Xét tứ giác $BMPQ$ có:

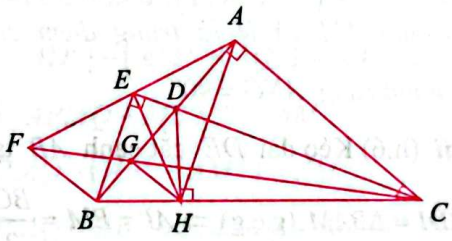
$\widehat{BQM} = \widehat{BPM} = 90° \Rightarrow \widehat{MBQ} + \widehat{MPQ} = 180°$

$\Rightarrow \widehat{MPQ} = 180° - \widehat{MBQ} = 180° - 45° = 135°$

Mặt khác: $\widehat{MPA} = \widehat{MNA} = 45°$ (do tứ giác $AMPN$ có $\widehat{MAN} + \widehat{MPN} = 90° + 90° = 180°$). Từ đó suy ra $\widehat{MPQ} + \widehat{MPA} = 135° + 45° = 180°$ nên ba điểm A, P và Q thẳng hàng.

Bài 2 (Toán 8). *Cho tam giác ABC vuông tại A. Tia phân giác của góc $\widehat{ACB}$ cắt cạnh AB tại D. Kẻ BE vuông góc với tia CD tại E. Qua B kẻ đường thẳng song song với AC cắt AE tại F, CF cắt AB tại G. Kẻ DH vuông góc với BC tại H. Chứng minh AB là tia phân giác của góc $\widehat{FAH}$ và GH song song với AC.*

Lời giải.



Hình 5

Xét tứ giác $AEBC$ có:

$\widehat{BEC} = \widehat{BAC} = 90° \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{BCE}$.

Xét tứ giác $ADHC$ có:

$\widehat{DAC} + \widehat{DHC} = 90° + 90° = 180° \Rightarrow \widehat{DAH} = \widehat{BCE}$.

Từ đó suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{DAH}$ nên AB là tia phân giác của góc $\widehat{FAH}$. Xét tứ giác $AEBC$ có:

$\widehat{BEC} = \widehat{BAC} = 90° \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{BEF}$ (1).

Xét tứ giác $ADHC$ có:

$\widehat{DAC} + \widehat{DHC} = 90° + 90° = 180° \Rightarrow \widehat{BDH} = \widehat{ACB}$ (2).

Xét tứ giác $DHBE$ có:

Được quét bằng CamScanner

$\widehat{DHB}+\widehat{DEB}=90°+90°=180°\Rightarrow \widehat{BDH}=\widehat{BEH}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{BEF}=\widehat{BEH}$.

Ta lại có $\widehat{EBA}=\widehat{ECA}=\widehat{ECB}=\widehat{EAB}\Rightarrow \Delta EAB$ cân tại $E\Rightarrow EB=EA$ (4).

Vì $BF//AC\Rightarrow \widehat{ABF}=\widehat{BAC}=90°$. Ta có:

$90°=\widehat{EBA}+\widehat{EBF}=\widehat{FAB}+\widehat{AFB}$ và $\widehat{EBA}=\widehat{EAB}$ nên $\widehat{EBF}=\widehat{EFB}\Rightarrow \Delta EBF$ cân tại $E\Rightarrow EF=EB$ (5).

Từ (4) và (5) suy ra $EF=EB=EA$.

Ta có $\Delta DAC=\Delta DHC$ (cạnh huyền - góc nhọn) nên suy ra DC là đường trung trực của $AH\Rightarrow EA=EH$.

Từ $\widehat{BEF}=\widehat{BEH}$ và $EF=EB=EA=EH$ suy ra:

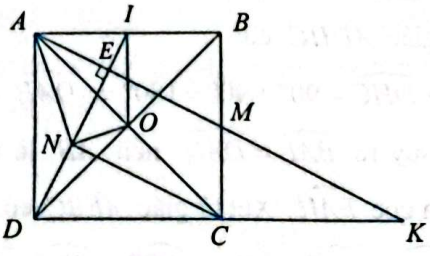
$$\Delta BEH=\Delta BEF\,(\text{c.g.c})\Rightarrow BH=BF.$$

Vì $BF//AC\Rightarrow \dfrac{BF}{AC}=\dfrac{BG}{GA}\Rightarrow \dfrac{BH}{HC}=\dfrac{BG}{GA}$ (do $BH=BF$ và $AC=HC$) $\Rightarrow HG//AC$.

Bài 3 (Lớp 8). *Cho hình vuông $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, E là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống AM và N là trung điểm của DE. Chứng minh rằng $\widehat{ANO}=90°$.*

Lời giải. (h.6) Kéo dài DE cắt cạnh AB tại I, ta có $\Delta ADI=\Delta BAM$ (g.c.g) $\Rightarrow AI=BM=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{AB}{2}$

$\Rightarrow I$ là trung điểm của $AB\Rightarrow IO$ là đường trung bình của tam giác $ABD\Rightarrow OI//AD\Rightarrow OI\perp AB$.



Hình 6

Gọi K là giao điểm của hai tia AM và DC, ta có $\Delta ABM=\Delta KCM$ (g.c.g).

$CK=AB=CD\Rightarrow CN$ là đường trung bình của tam giác $DEK\Rightarrow CN//KE\Rightarrow CN\perp DE$.

Xét tứ giác $DNOC$ có $\widehat{DNC}=\widehat{DOC}=90°$ $\Rightarrow \widehat{NDC}=\widehat{NOA}$. Mặt khác $AB//DC\Rightarrow \widehat{NDC}=\widehat{NIA}$ (so le trong). Do đó $\widehat{NIA}=\widehat{NOA}$. Tứ giác $ANOI$ có: $\widehat{NIA}=\widehat{NOA}\Rightarrow \widehat{ANO}+\widehat{AIO}=180°$

$\Rightarrow \widehat{ANO}=180°-\widehat{AIO}=180°-90°=90°$.

Bài 4 (Lớp 8). *Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB<AC$), đường cao AH (H thuộc BC).*

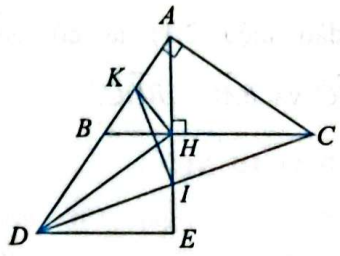
a) *Chứng minh rằng $BH.BC=BA^2$.*

b) *Gọi D là điểm đối xứng với A qua B, E là điểm đối xứng với A qua H. Chứng minh rằng $\Delta BHD\backsim\Delta BDC$.*

c) *Gọi I là giao điểm của AE và CD. K là điểm thuộc cạnh AD sao cho IK vuông góc với CD. Chứng minh rằng $\dfrac{HI}{HA}=\dfrac{CI}{CD}$ và HK vuông góc với HD.*

(Đề khảo sát CLB Toán 9, Q. Cầu Giấy, Hà Nội, năm học 2022-2023)

Hướng dẫn giải câu c. (h.7)



Hình 7

• Ta có:

$$\frac{HI}{HA}=\frac{CI}{CD}\Leftrightarrow\frac{HI}{HE}=\frac{CI}{CD}\Leftrightarrow\frac{HI}{HE-HI}=\frac{CI}{CD-CI}$$
$$\Leftrightarrow\frac{HI}{EI}=\frac{CI}{ID},$$

đẳng thức này đúng vì $DE//HC$.

• Ta có: $HK\perp HD\Leftrightarrow\widehat{KHD}=\widehat{KID}\Leftrightarrow\widehat{KIH}=\widehat{KDH}$.

Vì $\Delta HBD\backsim\Delta DBC\Rightarrow\widehat{BHD}=\widehat{BDC}$, mà $\widehat{BHD}=\widehat{HDE}$ nên $\widehat{KDH}=\widehat{EDI}=\widehat{HCI}$. Do đó

Được quét bằng CamScanner

chúng ta cần chứng minh $\widehat{KIH} = \widehat{HCI}$, kết quả này đúng do hai góc này cùng bù với $\widehat{HIC}$.

Bài 5 (Lớp 8). *Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC và D là điểm bất kì trên cạnh AB (D khác A và B). Trên cạnh CD lấy các điểm E và F sao cho AE vuông góc với CD và AE = CF.*

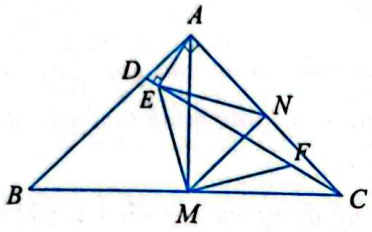
a) *Chứng minh* $AC.AD = CF.CD$.

b) *Chứng minh tam giác MEF vuông cân.*

c) *Tính góc* $\widehat{ACD}$ *biết rằng* $S_{ABC} = 4.S_{MEF}$.

(Đề thi HSG Toán 9 vòng 2, ĐHSP Hà Nội, năm học 2023-2024)

Hướng dẫn giải câu b, c. (h.8)



Hình 8

b) Xét tứ giác $AEMC$ có $\widehat{AEC} = \widehat{AMC} = 90°$, suy ra: $\widehat{EAM} = \widehat{ECM}$

$\Rightarrow \Delta AEM = \Delta CFM$ (c.g.c) $\Rightarrow ME = MF$;

$\widehat{EMC} + \widehat{EAC} = 180° \Rightarrow \widehat{EMC} + \widehat{ADC} = 180°$

$\Rightarrow \widehat{EMC} = \widehat{BDC}$. Vậy ΔMEF vuông cân tại M.

c) Gọi N là trung điểm của AC, ta có $EN = MN = \dfrac{AC}{2}$ (1). Vì $S_{ABC} = 4.S_{MEF}$

$\Rightarrow \dfrac{AB^2}{2} = 4.\dfrac{ME^2}{2} \Rightarrow \dfrac{AB}{2} = ME$ (2). Từ (1) và (2) suy ra ΔMEN đều $\Rightarrow \widehat{MEN} = 60°$

$\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{NEC} = \widehat{MEN} - \widehat{MEC} = 60° - 45° = 15°$.

Bài 6 (Lớp 8). *Cho tam giác ABC cân tại A* ($\widehat{BAC} < 90°$), *D là chân đường vuông góc hạ từ A xuống BC, đường thẳng qua B vuông góc với AB cắt AD tại O. Lấy M bất kì trên đoạn DC* ($M \neq D$ *và* $M \neq C$), *N là trung điểm của AM, điểm P nằm trong tam giác ADB sao cho OB = OP và* $\widehat{OPN} = 90°$, *trên tia AP lấy điểm Q khác P sao cho OP = OQ.*

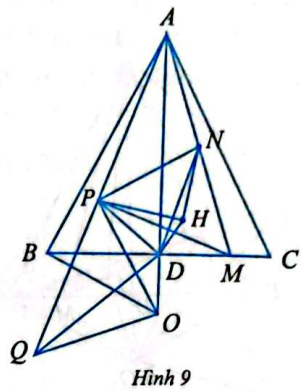
a) *Chứng minh* $AP.AQ - MB.MC = AM^2$.

b) *Chứng minh* $\widehat{APM} = 90°$.

c) *Các đường trung trực của PB và PC cắt PM lần lượt tại K, L. Chứng minh tam giác AKL cân.*

(Đề thi chọn đội tuyển HSG lớp 9, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, vòng 2, năm học 2023-2024)

Lời giải. (h.9)



Hình 9

a) Ta có:

$MB.MC = (BD + DM)(CD - DM)$

$= (BD + DM)(BD - DM) = BD^2 - DM^2$

$(AB^2 - AD^2) - (AM^2 - AD^2) = AB^2 - AM^2$.

Do đó: $AP.AQ - MB.MC = AM^2$

$\Leftrightarrow AP.AQ - (AB^2 - AM^2) = AM^2$

$\Leftrightarrow AP.AQ = AB^2 \Leftrightarrow AP.AQ = AD.AO$

(do $AB^2 = AD.AO$)

$\Leftrightarrow \dfrac{AP}{AD} = \dfrac{AO}{AQ} \Leftrightarrow \Delta PAD \backsim \Delta OAQ$

$\Leftrightarrow \widehat{PDA} = \widehat{OQA} \Leftrightarrow \widehat{OQD} = \widehat{OPD}$. Kết quả này đúng vì ta có: $\widehat{OQD} = \widehat{OAQ}$

(do $OQ^2 = OB^2 = OD.OA \Rightarrow \Delta OQD \backsim \Delta OAQ$)

và $\widehat{OPD} = \widehat{OAP}$

(do $OP^2 = OB^2 = OD.OA \Rightarrow \Delta OPD \backsim \Delta OAP$).

b) Kẻ $PH \perp ON$ ($H \in ON$), ta có:

$\widehat{MPA} = 90° \Leftrightarrow PN = \dfrac{AM}{2}$

Được quét bằng CamScanner

$\Leftrightarrow PN = AN \Leftrightarrow PN^2 = AN^2$

$\Leftrightarrow NH.NO = AN^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{NH}{AN} = \dfrac{AN}{NO} \Leftrightarrow \Delta HNA \backsim \Delta ANO$

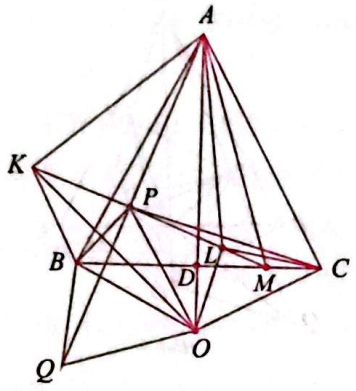
$\Leftrightarrow \widehat{NHA} = \widehat{NAO} \Leftrightarrow \widehat{NHA} = \widehat{NDA}$ (do $\widehat{NDA} = \widehat{NAO}$)

$\Leftrightarrow \widehat{OHD} = \widehat{OAN} \Leftrightarrow \Delta ODN \backsim \Delta OHA$

$\Leftrightarrow \dfrac{OD}{ON} = \dfrac{OH}{OA}$

$\Leftrightarrow OD.OA = ON.OH$ (kết quả này đúng do $ON.OH = OP^2 = OB^2 = OD.OA$).

c) (xem h.10)



Hình 10

Ta có $90° = \widehat{ACL} + \widehat{LCO} = \widehat{OPL} + \widehat{OPQ}$ và $\widehat{LCO} = \widehat{OPL}$ (vì OL là đường trung trực của PC) nên $\widehat{ACL} = \widehat{OPQ}$.

Mà $\widehat{OPQ} = \widehat{OQP} = \widehat{ADP} = \widehat{AMP}$, suy ra:

$$\widehat{ACL} = \widehat{AMP} \Rightarrow \widehat{CAL} = \widehat{BMK} \ (1).$$

Mặt khác: $AB^2 = AP.AQ \Rightarrow \dfrac{AB}{AP} = \dfrac{AQ}{AB}$

$\Rightarrow \Delta BAP \backsim \Delta QAB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{APB} = \widehat{ABQ}$

$\Rightarrow \widehat{APK} + \widehat{KPB} = \widehat{ABO} + \widehat{OBQ} = 90° + \widehat{KPB}$

$= 90° + \widehat{OBQ}$

$\Rightarrow \widehat{KPB} = \widehat{OBQ} \Rightarrow \widehat{KBP} = \widehat{OQB}$

$\Rightarrow \widehat{KBA} + \widehat{PBA} = \widehat{OQA} + \widehat{BQA}$,

mà $\widehat{PBA} = \widehat{BQA}$ (do $\Delta BAP \backsim \Delta QAB$) nên $\widehat{KBA} = \widehat{OQA}$

$\Rightarrow \widehat{KBA} = \widehat{OQA} = \widehat{PDA} = \widehat{PMA} = \widehat{ACL} = \widehat{AMP}$

$\Rightarrow \widehat{BMK} = \widehat{BAK}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\Delta ALC = \Delta AKB$ (g.c.g)

$\Rightarrow LC = KB$. Mà theo tính chất đường trung trực ta có $KB = KP$ và $LC = PL$ suy ra $KP = PL$

$\Rightarrow \Delta AKL$ cân tại A.

Bài 7 (Lớp 8). *Cho hình vuông ABCD. Gọi O là giao điểm của AC và BD, điểm M nằm giữa hai điểm B và C. Hai đường thẳng AM và CD cắt nhau tại P. Hai đường thẳng DM và AB cắt nhau tại K.*

a) *Chứng minh tam giác BCK đồng dạng với tam giác CPD.*

b) *Kẻ* $CH \perp BP (H \in BP)$, *hai đường thẳng AB và CH cắt nhau tại K. Chứng minh ba điểm D, M, K thẳng hàng.*

c) *Tia phân giác trong của góc* $\widehat{CBK}$ *cắt đường thẳng MH tại R. Chứng minh tam giác BRK là tam giác vuông cân.*

d) *Các đường thẳng vuông góc với OH kẻ từ O và H, cắt đường thẳng AB lần lượt tại X và Y. Lấy điểm Q thuộc tia đối của tia BC sao cho* $BQ = CM$. *Gọi N là giao điểm của DK và QR. Chứng minh* $\widehat{YXN} = \widehat{YMN}$.

Lời giải. (h.11)

a) $\Delta BCK \backsim \Delta CPB \Leftrightarrow \dfrac{BC}{BK} = \dfrac{CP}{CB} \Leftrightarrow \dfrac{CD}{BK} = \dfrac{CP}{AB}$,

kết quả này đúng vì theo hệ quả của định lí Thales ta có $\dfrac{CD}{BK} = \dfrac{CM}{BM}$ và $\dfrac{CM}{BM} = \dfrac{CP}{AB}$.

b) Ta có: $BO.BD = BC^2 = BP.BH$

$\Rightarrow \dfrac{BO}{BP} = \dfrac{BH}{BD} \Rightarrow \Delta OBH \backsim \Delta PBD$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BHO} = \widehat{BDP} = 45°$

$\Rightarrow \widehat{BHO} = \widehat{CHO} = 45°$.

Gọi M' là giao điểm của OH và BC suy ra:

$$\frac{CH}{BH} = \frac{CM'}{BM'}.$$

Mà $\Delta CHB \backsim \Delta PCB \Rightarrow \dfrac{CH}{BH} = \dfrac{PC}{BC}$, do đó:

Được quét bằng CamScanner

$$\frac{CM'}{BM'}=\frac{PC}{BC}=\frac{PC}{AB}=\frac{CM}{BM}$$

$$\Rightarrow \frac{CM'}{BC}=\frac{CM}{BC}\Rightarrow CM'=CM\Rightarrow M\equiv M'.$$

Ta có ba điểm D, M và K thẳng hàng $\Leftrightarrow \Delta BKM \backsim \Delta CDM \Leftrightarrow \frac{BK}{CD}=\frac{BM}{CM}$ (*).

Vì $\Delta BHK \backsim \Delta CHB (g.g) \Rightarrow \frac{BK}{CB}=\frac{BH}{CH}$

$\Rightarrow \frac{BK}{CD}=\frac{BH}{CH}$ (1). Mặt khác HM là tia phân giác trong của góc $\widehat{BHC}$ nên $\frac{BM}{CM}=\frac{BH}{CH}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra (*) được chứng minh.

c) Ta có: $\widehat{RHK}=\widehat{CHO}=45^\circ=\widehat{RBK}$

$\Rightarrow \widehat{RKB}=\widehat{BHO}=45^\circ\Rightarrow \Delta RBK$ vuông cân tại R.

d) Ta có: $\widehat{XOH}=\widehat{BOC}=90^\circ\Rightarrow \widehat{XOB}=\widehat{MOC}$

$\Rightarrow \Delta OBX=\Delta OCM (g.c.g)\Rightarrow BX=CM=BQ.$

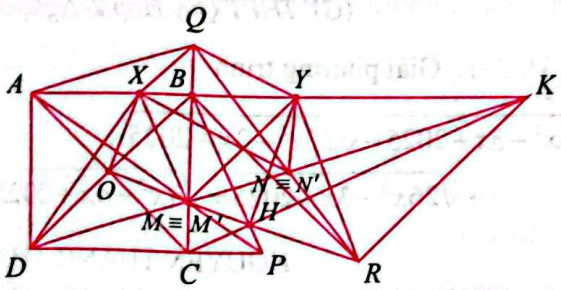
Tứ giác $HMBY$ có $\widehat{MBY}=\widehat{MHY}=90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BYM}=\widehat{BHM}=45^\circ$

$\Rightarrow \Delta BYM$ vuông cân tại B

$\Rightarrow BY=BM$

$\Rightarrow XY=XB+BY=MC+BM=BC.$



Hình 11

Ta có: $\widehat{ABD}=\widehat{BYM}=45^\circ\Rightarrow MY // BD$

$\Rightarrow \frac{KY}{YM}=\frac{BK}{BD}=\frac{KR.\sqrt{2}}{BC.\sqrt{2}}=\frac{KR}{XY}$

$\Rightarrow \Delta YKR \backsim \Delta MYX$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{KRY}=\widehat{YXM}$ (3).

Lấy N' trên tia KD sao cho $\widehat{KN'Y}=\widehat{YXM}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra: $\widehat{KN'Y}=\widehat{KRY}$

$\Rightarrow \widehat{YN'R}+\widehat{YKR}=180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{YN'R}=180^\circ-\widehat{YKR}=135^\circ.$

Ta có: $\Delta XBM=\Delta QBY$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MQY}=\widehat{MXY}=\widehat{KRY}=\widehat{KN'Y}.$

Xét tứ giác $QMN'Y$ có:

$$\widehat{MQY}=\widehat{KN'Y}\Rightarrow \widehat{YN'Q}=\widehat{YMQ}=45^\circ.$$

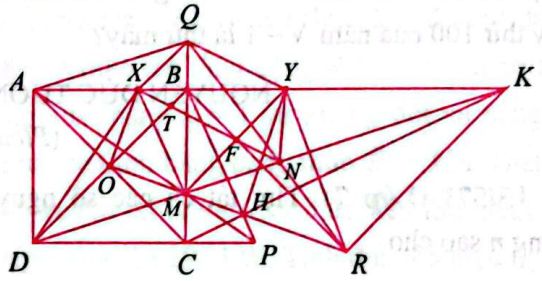
Do đó $\widehat{YN'R}+\widehat{YN'Q}=135^\circ+45^\circ=180^\circ$ nên ba điểm Q, N' và R thẳng hàng $\Rightarrow N\equiv N'$. Xét tứ giác $XMNY$ có:

$$\widehat{KNY}=\widehat{YXM}\Rightarrow \widehat{YXN}=\widehat{YMN}.$$

Nhận xét. 1) Bài 5 thực chất là đề tuyển sinh vào lớp 10 môn Toán (chuyên) TP. Hà Nội năm học 2024 – 2025 nhưng tác giả đã phát biểu lại cho phù hợp với nội dung kiến thức của lớp 8.

2) Từ câu d) ta có suy ra được XN đi qua trung điểm của MY và $XN // OP$.

Chứng minh (h.12)



Hình 12

- Gọi F, T lần lượt là giao điểm của XN với MY và BD. Ta có:

$$\widehat{YXF}=\widehat{YMN}=\widehat{BDM}$$

$$\Rightarrow \Delta XYF \backsim \Delta DBM (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{YF}{BM}=\frac{XY}{BD}\Rightarrow \frac{YF}{\frac{MY}{\sqrt{2}}}=\frac{BC}{BC.\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow MY=2.YF.$$

- Ta có: $\widehat{YXM}=\widehat{BOM}=\widehat{BPD}$

$\Rightarrow \Delta YXM \backsim \Delta DPB$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{XY}{DP}=\frac{YM}{BD}=\frac{2.FY}{2.OD}=\frac{FY}{OD}$

$\Rightarrow \Delta XYF \backsim \Delta PDO$ (c.g.c)

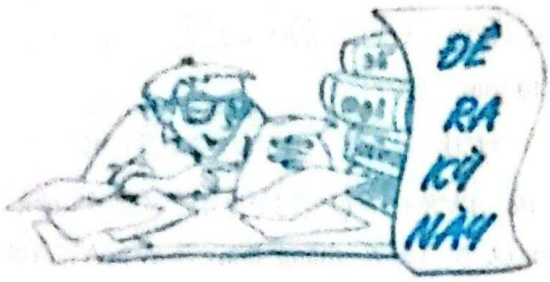
$\Rightarrow \widehat{DOP}=\widehat{YFX}.$

Mà $BD // MY\Rightarrow \widehat{YFX}=\widehat{DTF}$ nên

$$\widehat{DOP}=\widehat{DTF}\Rightarrow XN // OP.$$

(Kỳ sau đăng tiếp)

Được quét bằng CamScanner



CÁC LỚP THCS

Bài T1/571 (Lớp 6). Cho x, y là các số nguyên dương thỏa mãn x^2+y^2-x chia hết cho xy. Chứng minh x là số chính phương.

TẠ MINH HIẾU
(GV THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc)

Bài T2/571. Ngày thứ 300 trong năm N là thứ Ba. Ngày thứ 200 của năm $N+1$ cũng là thứ Ba. Hỏi ngày thứ 100 của năm $N-1$ là thứ mấy?

NGUYỄN ĐỨC TƯỞNG
(Pleiku)

Bài T3/571 (Lớp 7). Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho

$$\left[\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}\right]=\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]$$

trong đó kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T4/571. Cho tam giác ABC vuông tại A. M là điểm trên cạnh AB. Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt cạnh AC tại Q. Gọi N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, Q trên BC. Tìm vị trí của M để $MNPQ$ là hình vuông

BÙI VĂN CHI
(Số nhà 21/2, đường Lê Hồng Phong, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T5/571. Giải phương trình

$$x\sqrt{x+7}+\sqrt{9-x}=4\sqrt{x^2+1}.$$

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/571. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-7)\sqrt{x^2+y^2}=5x+y\\(y-4)\sqrt{x^2+y^2}=-x+5y\end{cases}.$$

LA ĐẠI CƯƠNG
(GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị)

Bài T7/571. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $3x^2+4y^2+4xy-9x-10y+8=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{7x+11y+13}{2x+3y+5}.$$

TRẦN VĂN HẠNH
(GV Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

Bài T8/571. Cho hình chóp $O.ABC$ có tam giác OBC đều cạnh a, $OA\perp(OBC)$, $OA=a$, I là trung điểm BC, M là điểm thay đổi trên đoạn thẳng AI. Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ điểm M đến các đường thẳng OA, OB, OC. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=3d_1^2+2d_2^2+2d_3^2$ theo a.

NGUYỄN QUANG NAM
(GV THPT Quỳ Hợp 2, Nghệ An)

Bài T9/571. Giải phương trình

$$\sqrt{8x^2-3x+2025}-\sqrt{27x^2-2x+2025}+\sqrt{26x^2-3x+2025}=\sqrt{7x^2-4x+2025}.$$

NGUYỄN THANH TUẤN
(GV THPT Phạm Ngũ Lão, Ân Thi, Hưng Yên)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/571. Cho $f(x)=3x^4-7x^3+ax^2+bx+c$ là đa thức với hệ số thực có bốn nghiệm thực trong khoảng $(0;2)$. Chứng minh rằng

$$(2a+b-14)^2+(b+c+2)^2\ge 9.\left(\frac{13}{12}\right)^8.$$

NGUYỄN DUY LIÊN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Được quét bằng CamScanner

Bài T11/571. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) = f\left(\frac{x^2+6x-2}{4}\right) - x^2 - 2x + 2$$

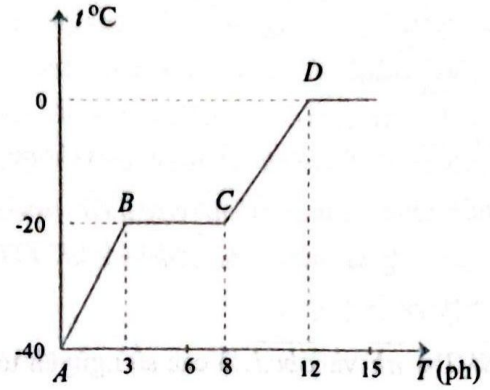
với mọi $x \in \mathbb{R}$.

NGUYỄN VĂN ÁI
(GV THPT Triệu Phong, Quảng Trị)

Bài T12/571. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn ω và có trực tâm H. MN và PQ là hai dây cung của ω vuông góc với nhau tại S. Gọi giao điểm của đường thẳng Simson ứng với M, N của tam giác ABC là K. Gọi giao điểm của đường thẳng Simson ứng với P, Q của tam giác ABC là L. Chứng minh rằng $HKSL$ là hình bình hành.

TRẦN QUANG HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài L12/571. Một bình cách nhiệt có dây đốt nóng bên trong, chứa 2 kg nước đá và 2 kg một chất X dễ nóng chảy và không hoà tan trong nước. Nhiệt độ ban đầu của cả bình là -40°C, dây đốt nóng bắt đầu hoạt động (công suất toả nhiệt của dây không đổi). Nhiệt độ trong bình biến thiên theo thời gian như ở đồ thị hình dưới. Nhiệt dung riêng của nước đá là $c_đ = 2000$ J/kg.K, của chất rắn X là $c = 10000$ J/kg.K. Hãy xác định nhiệt nóng chảy của chất rắn X và nhiệt dung riêng c_x của chất X ở trạng thái lỏng.



VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L12/571. Từ một máy phát điện người ta muốn truyền tới nơi tiêu thụ bằng đường dây tải điện có điện trở tổng cộng $R = 40\ \Omega$ và có hệ số công suất bằng $k = 1$ và không đổi và công suất được xác định bằng cụng thức $\mathcal{P} = kUI$. Biết hiệu suất truyền tải là 98% và mức tiêu thụ nhận được công suất điện 196 kW. Tính điện áp hiệu dụng U được đưa lên đường dây.

THANH LÂM (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/571 (Grade 6). Let x and y be positive integers so that $x^2 + y^2 - x$ is divisible by xy. Prove that x is a perfect square.

Problem T2/571. The 300th day of year N is Tuesday. The 200th day of year $N + 1$ is also Tuesday. What is the 100th day of year $N - 1$?

Problem T3/571 (Grade 7). Find all positive integers n such that

$$\left[\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2+1}\right] = \left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right]$$

where $[x]$ is the largest integer not exceeding x.

Problem T4/571. Given a right triangle ABC with the right angle A and M is a point on the side AB. Through M, draw a line parallel to BC intersecting the side AC at Q. Let N and P be the perpendicular projections of M and Q on BC respectively. Find the position of M so that $MNPQ$ is a square .

Problem T5/571. Solve the equation

$$x\sqrt{x+7} + \sqrt{9-x} = 4\sqrt{x^2+1}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/571. Solve the following system of equations

$$\begin{cases} (x-7)\sqrt{x^2+y^2} = 5x + y \\ (y-4)\sqrt{x^2+y^2} = -x + 5y \end{cases}.$$

(Xem tiếp trang 43)

Được quét bằng CamScanner



Bài T1/567. *Tìm các chữ số a, b, c, d (không nhất thiết khác nhau) sao cho $\overline{ab}$ và $\overline{abcd}$ là các số nguyên tố. Ngoài ra c là chữ số khác 0 và $b^2 = b + 9c + d$.*

Lời giải. Do $\overline{ab}$ và $\overline{abcd}$ là các số nguyên tố nên b, d chỉ lấy giá trị trong tập hợp $\{1; 3; 7; 9\}$(*). Từ điều kiện $b^2 = b + 9c + d$ có $b(b-1) = 9c + d > 9$ nên $b > 3$, do đó b chỉ có thể là 7 hoặc 9.

Nếu $b = 7$ thì có $9c + d = 42 = 36 + 6$, suy ra $d - 6 = 9(4 - c)$ chia hết cho 9, không có d thỏa mãn (*) (loại).

Nếu $b = 9$ thì có $9c + d = 72 = 63 + 9$, suy ra $d - 9 = 9(7 - c)$ chia hết cho 9, thỏa mãn (*) chỉ khi $d = 9$, lúc đó $c = 7$. Số phải tìm có dạng $\overline{a979}$.

Do $\overline{a9}$ là số nguyên tố nên chữ số a chỉ có thể là 1; 2; 5; 7; 8.

Nếu a bằng 2; 5; 8 thì $a + 9 + 7 + 9 = a + 25$ chia hết cho 3 nên $\overline{a979}$ là hợp số (loại).

Nếu a bằng 7 thì số $7979 = 79.101$ là hợp số (loại). Còn số lẻ 1979 không chia hết cho mọi số nguyên tố từ 3 đến 43 (chú ý rằng nếu một số nhỏ hơn 2000 thì có ước số nguyên tố nhỏ hơn 47), do đó số 1979 là số nguyên tố, số 19 cũng là số nguyên tố. Vậy $a = 1, b = 9, c = 7, d = 9$.

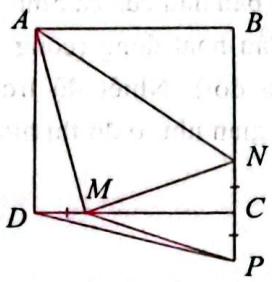
Nhận xét. Một số bạn viết tắt, không giải thích từng kết quả. Một số bạn tìm được dạng $\overline{a979}$ thì cho kết luận ngay $a = 1$, mà không xét các giá trị của chữ số a. Các bạn sau có lời giải đúng.

Phú Thọ: *Triệu Vân Nhi*, 7E, THCS Cao Mại, TTr. Lâm Thao, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Thế Anh, Phạm Quỳnh Chi, Bùi Thiên Long*, 6A6, *Phạm Trần Mạnh Quang*, 7A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Bắc Ninh**: *Nguyễn Quang Minh, Nguyễn Hoàng Minh*, 7A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo, TP. Bắc Ninh; **Nghệ An**: *Trương Đình Quốc Anh*, 6E, *Phạm Hồng Quân, Hà Quang Phú Hưng, Phạm Nguyễn Nguyệt Linh*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh**: *Lương Đức Duy, Trần Đình Bảo Duy, Nguyễn Ngọc Thiên Nhi, Đậu Hà Ngọc Khánh, Lê Huyền Bảo Ngọc, Lê Vân Giang, Lê Hoàng Anh, Nguyễn Hoàng Quân, Nguyễn Hoàng Bảo Châu, Nguyễn Hồng Minh*, 6B, THCS Xuân Diệu, Can Lộc, **Quảng Ngãi**: *Trần Văn Phụng*, 6C, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành; **Cộng Hòa Áo**: *Lê Bạch Hải Đăng*, 2B Trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS TP. Graz.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/567. *Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh CD lấy điểm M tùy ý không trùng với C và D. Trên cạnh BC lấy điểm N sao cho $CN = DM$. Chứng minh $AM > \frac{AN}{2}$.*

Lời giải.



Trên tia đối của tia CB lấy điểm P sao cho $CN = CP$. Hai tam giác vuông ADM và DCP có $AD = DC$, $DM = CP$ nên $\Delta ADM = \Delta DCP$ (c.g.c) suy ra $AM = PD$ (1).

Mặt khác do $CN = CP$ và $MC \perp NP$ suy ra tam giác MNP cân tại M, dẫn đến $MN = PM$ (2).

Vì M nằm trên cạnh CD (M khác C và M khác D) nên rõ ràng $CM < CD \Rightarrow PM < PD$ (mối quan hệ giữa độ dài đường xiên và độ dài hình chiếu tương ứng) (3).

Từ (1), (2), (3) ta thu được $AM > MN$. Lại thấy trong tam giác AMN thì $AM + MN > AN$, suy ra $2AM > AM + MN > AN$. Do đó $AM > \frac{AN}{2}$.

Được quét bằng CamScanner

Nhận xét. Đối với bài toán yêu cầu so sánh độ dài hai đoạn thẳng có chung một đầu mút chúng ta thường so sánh độ dài các hình chiếu vuông góc của chúng trên một đường thẳng nào đó (*sử dụng mối quan hệ giữa độ dài đường xiên và độ dài hình chiếu tương ứng*). Các bạn học sinh sau có lời giải tốt:

Bắc Ninh: *Nguyễn Hoàng Minh, Nguyễn Quang Minh*, 7A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo, TP. Bắc Ninh; **Quảng Ngãi**: *Huỳnh Diễm Quỳnh*, 6B, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Cộng hoà Áo**: *Lê Bạch Hải Đăng*, 2B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz.

HỒ HẢI

Bài T3/567. *Tìm các số nguyên dương a, b thỏa mãn $(a+b+1)(a^2+b^2+1)(a^3+b^3+1)$ là lũy thừa với số mũ nguyên dương của một số nguyên tố.*

Lời giải. Giả sử a,b là các số nguyên dương sao cho $(a+b+1)(a^2+b^2+1)(a^3+b^3+1)$ là lũy thừa với số mũ nguyên dương của số nguyên tố p. Khi đó $a+b+1, a^2+b^2+1, a^3+b^3+1$ cũng là các lũy thừa của p. Hơn nữa

$$a+b+1 \le a^2+b^2+1 \le a^3+b^3+1$$

nên a^3+b^3+1 và a^2+b^2+1 đều chia hết cho $a+b+1$. Mặt khác ta có:

$$a^3+b^3+1-3ab=(a+b+1)(a^2+b^2+1-ab-a-b);$$

$$a^2+b^2+1=(a+b+1)(a+b-1)+2-2ab.$$

Do đó $3ab$ và $2-2ab$ đều chia hết cho $a+b+1$. Suy ra $6=3(2-2ab)+2.3ab$ chia hết cho $a+b+1$. Hơn nữa $a+b+1\ge 3$ và $a+b+1$ là lũy thừa của số nguyên tố p nên phải có $a+b+1=3$ và do đó $a=b=1$. Thử lại ta thấy $(a;b)=(1;1)$ là cặp số nguyên dương duy nhất thỏa mãn đề bài.

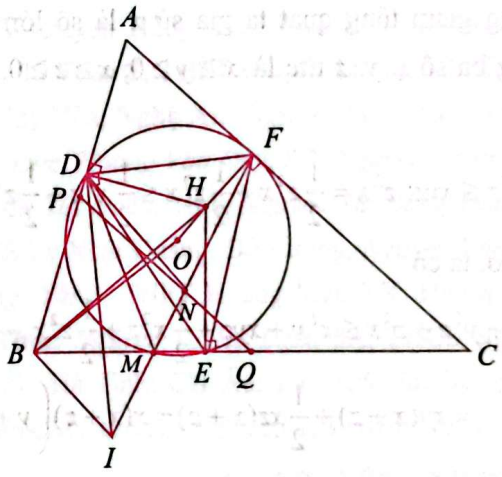
Nhận xét. Đa số các bạn có lời giải tương tự như lời giải trên. Tuy nhiên có một vài bạn cho lời giải sai vì còn nhầm lẫn các tính chất về chia hết. Một số bạn giải theo hướng xét mod 4 và mod 9 cũng cho lời giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Nguyễn Hưng Phát*, 8A , THCS Cao Mại, *Trần Anh Đức*, 8A3, THCS Vũ Duệ, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc**: *Trương Khánh Chi*, 7A8, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên, *Vũ Tiến Đạt, Nguyễn Đăng Quang, Nguyễn Gia Hưng*, 8A6, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh**: *Nguyễn Hoàng Minh*, 7A1, THCS *Nguyễn Đăng Đạo*, TP. Bắc Ninh; **Nghệ An**: *Nguyễn Đình Đức, Đào Tuấn Vũ, Nguyễn Văn Phúc, Hoàng Văn Duy*, 8D, *Nguyễn Tất Han, Hoàng Văn Nhân*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

HOÀNG NGỌC MINH

Bài T4/567. *Cho tam giác nhọn ABC và H là điểm thuộc miền trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các cạnh AB, BC, CA. Dựng đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF. Đường tròn này cắt cạnh BC tại điểm thứ hai M. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC; N là giao điểm của PQ và MF. Chứng minh tam giác NDF là tam giác cân.*

Lời giải.



Gọi I là giao điểm của MF với đường qua D, vuông góc với DF. Dễ thấy tứ giác $DFEM$ và tứ giác $HDBE$ nội tiếp, ta có: $\widehat{DEM}=\widehat{DFM}$, $\widehat{DHB}=\widehat{DEB}$.

Suy ra $\widehat{DHB}=\widehat{DFM}$, dẫn tới:

$$\Delta IDF \backsim \Delta BDH \text{ (g.g)},$$

do đó: $\dfrac{DF}{DH}=\dfrac{DI}{DB}$ hay $\dfrac{DF}{DI}=\dfrac{DH}{DB}$.

Lại có: $\widehat{BDI}=\widehat{FDH}$ (cùng phụ với góc $\widehat{IDH}$),

Được quét bằng CamScanner

Suy ra: $\Delta DBI \backsim \Delta HDF$. Từ đó:

$$\widehat{DBI} = \widehat{DHF} = 180^\circ - \widehat{DAF}.$$

Mà hai góc $\widehat{DBI}, \widehat{DAF}$ ở vị trí trong cùng phía nên $BI // AC$.

Mặt khác, PQ là đường trung bình của tam giác ABC nên $PQ // AC$, nên PN là đường trung bình của hình thang $BIFA$, do đó N là trung điểm FI.

Tam giác FDI vuông tại D có N là trung điểm cạnh huyền IF nên $ND = NF$, tức là tam giác DNF cân tại N (đpcm).

Nhận xét. Không có bạn nào có lời giải đúng cho bài toán trên.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/567. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2y+y^2z+z^2x=\dfrac{4}{27}. \\ x,y,z\geq 0 \end{cases}$$

Lời giải. Do vai trò x, y, z hoán vị vòng quanh, không giảm tổng quát ta giả sử x là số lớn nhất trong ba số x, y, z tức là $x\geq y\geq 0; x\geq z\geq 0$. Suy ra:

$$y^2z\leq xyz;\ z^2x=\frac{1}{2}z^2x+\frac{1}{2}z^2x\leq\frac{1}{2}x^2z+\frac{1}{2}z^2x.$$

Từ đó, ta có:

$$x^2y+y^2z+z^2x\leq x^2y+xyz+\frac{1}{2}x^2z+\frac{1}{2}z^2x$$

$$=xy(x+z)+\frac{1}{2}xz(x+z)=x(x+z)\left(y+\frac{z}{2}\right)$$

$$=4.\frac{x}{2}.\frac{x+z}{2}.\left(y+\frac{z}{2}\right).$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương, ta có:

$$\frac{x}{2}+\frac{x+z}{2}+\left(y+\frac{z}{2}\right)\geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{2}.\frac{x+z}{2}.\left(y+\frac{z}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}.\frac{x+z}{2}.\left(y+\frac{z}{2}\right)\leq\frac{1}{27}.(x+y+z)^3=\frac{1}{27}$$

(do $x+y+z=1$).

Do đó: $x^2y+y^2z+z^2x\leq\dfrac{4}{27}$ và $x^2y+y^2z+z^2x=\dfrac{4}{27}$ khi $\begin{cases} x+y+z=1 \\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{x+z}{2}=y+\dfrac{z}{2} \\ xyz=y^2z \\ x^2z=z^2x. \end{cases}$ Tìm được $(x;y;z)=\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3};0\right)$.

Hoán vị vòng quanh bộ số $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3};0\right)$, ta được tiếp hai bộ số $\left(\dfrac{1}{3};0;\dfrac{2}{3}\right), \left(0;\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm $(x; y; z)$ là $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3};0\right), \left(\dfrac{1}{3};0;\dfrac{2}{3}\right), \left(0;\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Nhận xét. Một số bạn gửi bài đã quan niệm vai trò x, y, z như nhau, nên sau khi tìm ra $(x;y;z)=\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3};0\right)$ đã nêu các nghiệm còn lại là hoán vị vòng quanh của bộ số $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3};0\right)$. Tuy nhiên, với $(x,y,z)\in\left\{\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};0\right),\left(\dfrac{2}{3};0;\dfrac{1}{3}\right),\left(0;\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)\right\}$ đều không thoả mãn hệ phương trình. Ta cũng có thể coi x là số lớn thứ hai trong ba số x, y, z, tức là $y\geq x\geq 0; z\geq x\geq 0$ để có cách giải khác. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Nguyễn Thanh Mai,* 8A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Cộng hoà Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng,* 2B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/567. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc$. Chứng minh rằng*

$$\frac{ab}{a^3+b^3+a^2c+b^2c}+\frac{bc}{b^3+c^3+b^2a+c^2a}+\frac{ca}{c^3+a^3+c^2b+a^2b}\leq\frac{3}{4}.$$

Lời giải. Ta có giả thiết:

$$ab+bc+ca=3abc\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3.$$

Được quét bằng CamScanner

Áp dụng các bất đẳng thức quen thuộc với a, b là các số dương, ta có:

$$a^3+b^3 \ge ab(a+b);\ a^2+b^2 \ge 2ab$$

và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$. Do đó:

$$\frac{ab}{a^3+b^3+a^2c+b^2c} \le \frac{ab}{ab(a+b)+c(a^2+b^2)}$$

$$\le \frac{ab}{4}\left(\frac{1}{ab(a+b)}+\frac{1}{2abc}\right)=\frac{1}{4}.\frac{1}{a+b}+\frac{1}{8c}.$$

Lại áp dụng $\frac{1}{a+b} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$, suy ra:

$$\frac{ab}{a^3+b^3+a^2c+b^2c} \le \frac{1}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{8c}.$$

Tương tự:

$$\frac{bc}{b^3+c^3+b^2a+c^2a} \le \frac{1}{16}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{8a};$$

$$\frac{ca}{c^3+a^3+c^2b+a^2b} \le \frac{1}{16}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{8b}.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{ab}{a^3+b^3+a^2c+b^2c}+\frac{bc}{b^3+c^3+b^2a+c^2a}$$

$$+\frac{ca}{c^3+a^3+c^2b+a^2b} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{3}{4}.$$

Bất đẳng thức trong đầu bài được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Nhận xét. 1) Điều then chốt của lời giải này là chứng minh $\frac{ab}{a^3+b^3+a^2c+b^2c} \le \frac{1}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{8c}$ cùng với các bất đẳng thức tương tự và giả thiết $ab+bc+ca=3abc \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$ để suy ra kết quả. Hầu hết các bạn làm theo cách này.

2) Có thể giải bài toán bằng cách khác:

Từ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$, $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9$

$\Rightarrow a+b \ge 3-c$ nên

$$a^3+b^3+a^2c+b^2c \ge ab(a+b)+c(a^2+b^2)$$

$$\ge ab(3-c)+2abc=ab(3+c).$$

Do đó: $\frac{ab}{a^3+b^3+a^2c+b^2c} \le \frac{ab}{ab(3+c)}=\frac{1}{1+1+1+c}$

$$\le \frac{1}{16}\left(1+1+1+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{16}\left(3+\frac{1}{c}\right).$$

Viết các BĐT tương tự, cộng theo vế, suy ra kết quả.

3) Ta có:

$a^3+b^3 \ge ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)(a^2+b^2-ab) \ge ab(a+b)$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$. BĐT đúng;

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \ge 4 \Leftrightarrow (a+b)^2 \ge 4ab$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$ (BĐT đúng)

Dấu "=" trong các BĐT trên xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

TP. Hồ Chí Minh: *Trần Nhất Nguyên*, 10E1, *Lương Xuân Thế*, 10A1, TH, THCS, THPT Lê Thánh Tông; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Tấn Phát*, 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Long An:** *Nguyễn Gia Hưng*, *Nguyễn Hải Yến*, 10T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu, TP. Tân An; **Hưng Yên:** *Lê Ngọc Hùng Anh*, *Trần Gia Phú*, *Đỗ Quang Anh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Phú Yên:** *Đoàn Trung Hiếu*, 10 Toán 2, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Phúc*, *Nguyễn Đình Đức*, *Hoàng Văn Duy*, 8D, *Nguyễn Công Lĩnh*, *Nguyễn Tất Hoàng Anh*, *Nguyễn Thị Băng Tâm*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Lê Hà Linh*, 8A, THCS Nguyễn Du, TP. Hà Tĩnh; **CH Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 2B, trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T7/567. *Giải hệ phương trình*

$$(I)\begin{cases} 4x^2+9y^2+\dfrac{48xy}{2x+3y}=16 & (1) \\ \sqrt{x^2+16}+\dfrac{5}{2}\sqrt{2x+3y}=2x+\sqrt{x^2+7} & (2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $2x+3y>0$. Ta có:

$(1) \Leftrightarrow (2x+3y)\left[(2x+3y)^2-12xy\right]+48xy$

$=16(2x+3y)$

Được quét bằng CamScanner

$\Leftrightarrow (2x+3y)\left[(2x+3y)^2-16\right]-12xy(2x+3y-4)=0$

$\Leftrightarrow (2x+3y-4)\left[4x^2+9y^2+4(2x+3y)\right]=0$

$\Leftrightarrow 2x+3y-4=0$

(vì $2x+3y>0$ nên $4x^2+9y^2+4(2x+3y)>0$).

Thay $2x+3y=4$ vào PT(2) ta được:

$$\sqrt{x^2+16}+5=2x+\sqrt{x^2+7}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+16}-\sqrt{x^2+7}=2x-5 \quad (3).$$

Do $\sqrt{x^2+16}>\sqrt{x^2+7}, \forall x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+16}-\sqrt{x^2+7}>0$ nên $2x-5>0\Leftrightarrow x>\frac{5}{2}$. Khi đó:

$$(3)\Leftrightarrow \sqrt{x^2+16}-5=2x-6+\sqrt{x^2+7}-4$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+16}+5}=2(x-3)+\frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}+4}$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{x+3}{\sqrt{x^2+16}+5}-\frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}+4}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+16}+5}-\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+7}+4}-2=0 \quad (4) \end{array}\right.$$

- $x-3=0\Leftrightarrow x=3\Rightarrow y=-\frac{2}{3}$. Vậy hệ (I) có nghiệm $(x;y)=\left(3;-\frac{2}{3}\right)$.
- Giải PT(4): Vì $x>\frac{5}{2}$ nên $x+3>0$ và với mọi x ta có $\sqrt{x^2+16}+5>\sqrt{x^2+7}+4$, suy ra:

$$\frac{x+3}{\sqrt{x^2+16}+5}<\frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}+4}$$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{\sqrt{x^2+16}+5}-\frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}+4}-2<0.$$

Vậy PT(4) vô nghiệm.

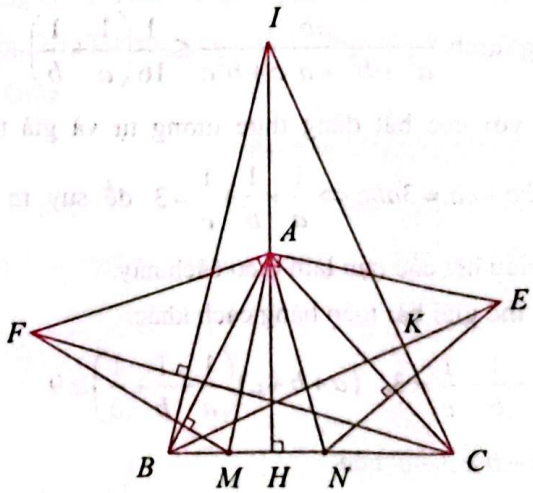
Kết luận: HPT(I) đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(3;-\frac{2}{3}\right)$.

Nhận xét. Đa số các bạn giải theo cách trên. Một vài bạn giải sai và có bạn còn quên viết tên và địa chỉ trên bài làm. Các bạn sau có lời giải tốt: **Vĩnh Long:** *Đặng Thành Trung*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Kiên Giang:** *Nguyễn Hoài Nhanh*, 10T2, *Hoàng Quốc Khánh*, 10T1, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Thanh Anh Thư*, 11T2, *Võ Hải Yến*, 12H, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Thanh Hóa:** *Lê Phú Đạt*, 8C, THCS thị trấn Cành Nàng, H. Bá Thước; **Long An:** *Trương Thanh Bình*, 10T1, *Nguyễn Trọng Nhân*, 11T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, *Trần Minh Hiếu*, *Đỗ Quang Anh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Quảng Bình:** *Vương Khánh Toàn*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Tấn Phát*, 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, lớp 2B, Trường Quốc Tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz; **Phú Thọ:** *Trần Ngọc Tú*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Lâm Đồng:** *Lê Xuân Hải*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, *Ngô Văn Trường*, 11A1, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai.

TRẦN HỮU NAM

Bài T8/567. *Cho tam giác ABC, đường cao AH. Các điểm M, N thuộc đoạn BC. Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt đường thẳng qua N vuông góc với AC tại E; đường thẳng qua A vuông góc với AN cắt đường thẳng qua M vuông góc với AB tại F. Chứng minh AH, BE, CF đồng quy.*

Lời giải.



Chúng ta giải bài toán trong trường hợp tam giác ABC nhọn, trường hợp tam giác ABC vuông hoặc

Được quét bằng CamScanner

tam giác ABC có một góc tù, phép chứng minh hoàn toàn tương tự.

Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với CF cắt AH tại I. Ta có: $\widehat{AIB}=\widehat{MCF}; \widehat{ABI}=\widehat{MFC}$ (các cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc), suy ra:

$$\Delta AIB \sim \Delta MCF \Rightarrow \frac{AI}{AB}=\frac{MC}{MF} \Rightarrow AI=\frac{AB.MC}{MF} \text{ (1).}$$

Mặt khác từ $\widehat{AFM}=\widehat{BAN}; \widehat{AEN}=\widehat{CAM}$ (các cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc) suy ra

$$\frac{NB}{MC}=\frac{S_{ABN}}{S_{ACM}}=\frac{AB.AN.\sin\widehat{BAN}}{AC.AM.\sin\widehat{CAM}}=\frac{AB.AN.\sin\widehat{AFM}}{AC.AM.\sin\widehat{AEN}} \text{ (2).}$$

Sử dụng định lí hàm số sin cho các tam giác AMF, ANE và chú ý rằng $\widehat{MAF}=\widehat{NAE}$ (cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc) ta thấy:

$$\frac{AN.\sin\widehat{AFM}}{AM.\sin\widehat{AEN}}=\frac{AN}{\sin\widehat{AEN}}.\frac{\sin\widehat{AFM}}{AM}$$

$$=\frac{NE}{\sin\widehat{NAE}}.\frac{\sin\widehat{MAF}}{MF}=\frac{NE}{MF} \text{ (3).}$$

Từ (2) và (3) suy ra $\frac{NB}{NE}=\frac{AB}{AC}.\frac{MC}{MF}$ (4).

Từ (1) và (4) thu được $\frac{NB}{NE}=\frac{AI}{AC}$. Kết hợp với $\widehat{IAC}=\widehat{BNE}$ (cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc) ta thấy $\Delta AIC \sim \Delta NBE \Rightarrow \widehat{AIC}=\widehat{NBE}$. Gọi K là giao điểm BE và CI khi đó:

$$\widehat{HIC}=\widehat{CBK} \Rightarrow \widehat{BKC}=180^0-(\widehat{CBK}+\widehat{KCB})$$

$$=180^0-(\widehat{HIC}+\widehat{ICH})=90^0 \Rightarrow CI \perp BE.$$

Vậy AH, BE, CF là các đường thẳng chứa ba đường cao của tam giác BCI, nên AH, BE, CF đồng quy. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Bài toán này cũng có thể giải quyết bằng *định lí Ceva dạng lượng giác*. Số bài giải gửi về Toà soạn không nhiều. Các bạn sau có lời giải đúng: **Quảng Bình**: *Vương Khánh Toàn*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Phú Yên**: *Nguyễn Nguyên Chinh*, 10T2, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hoà; **Long An**: *Kiều Gia Bảo, Thái Nguyễn Thành Nhân*, 10 Toán 1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Kiên Giang**: *Đào Đức Phúc Nguyên*, 10T1, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/567. *Có 9 giáo viên ngồi chung một bàn tham gia chấm kì thi chọn học sinh giỏi ở tỉnh A. Chứng tỏ rằng luôn có 4 giáo viên quen biết nhau hoặc có 3 giáo viên không quen biết nhau.*

Lời giải. Trước hết, ta có bổ đề quen thuộc sau: *Trong mặt phẳng, xét 6 điểm phân biệt trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Tô màu các đoạn thẳng nối 2 điểm bởi một trong hai màu: xanh hoặc đỏ (mỗi đoạn thẳng được tô bởi một màu). Khi đó, tồn tại một tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 6 điểm đã cho và có 3 cạnh cùng màu.*

Bổ đề trên có tên là Bài toán Ramsey và là bổ đề quen thuộc nên chúng tôi không trình bày chứng minh ở đây.

Trở lại bài toán, ta phát biểu lại bài toán bằng ngôn ngữ "đồ thị" như sau: *Xét 9 điểm phân biệt trong mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Tô màu các đoạn thẳng nối hai điểm bởi một trong hai màu: xanh hoặc đỏ (mỗi đoạn thẳng được tô bởi đúng một màu). Khi đó hoặc tồn tại một tam giác có ba cạnh màu xanh hoặc tồn tại một tứ giác có bốn cạnh và các đường chéo màu đỏ.*

Gọi 9 điểm đã cho là A, B, C, D, E, F, G, H, K. Nếu trong 9 điểm đã cho tồn tại 3 điểm tạo thành một tam giác có ba cạnh màu xanh thì ta có ngay điều phải chứng minh. Giờ ta xét trường hợp bất cứ 3 điểm nào cũng là 3 đỉnh của một tam giác có ít nhất một cạnh đỏ.

Xét hai khả năng

(a) Tồn tại một điểm là đầu mút của ít nhất 4 đoạn xanh. Không mất tính tổng quát, gọi 4 đoạn đó là AB, AC, AD, AE (đều có màu xanh). Xét tam giác ABC thì AB, AC có màu xanh và do tam giác nào cũng phải có ít nhất một cạnh đỏ nên BC màu đỏ. Tương tự, ta chứng minh được tứ giác $BCDE$ có các cạnh và các đường chéo đều màu đỏ.

Được quét bằng CamScanner

(b) Mọi điểm là đầu mút của nhiều nhất 3 đoạn xanh. Trong trường hợp này không thể xảy ra mọi điểm là đầu mút của đúng 3 đoạn xanh vì khi đó số đoạn xanh sẽ là $\frac{9.3}{2}$, là điều không thể. Do đó, tồn tại một điểm là đầu mút của nhiều nhất 2 đoạn xanh, tức là điểm này là đầu mút của ít nhất 6 đoạn đỏ. Gọi 6 đoạn đỏ đó là AB, AC, AD, AE, AF, AG. Khi đó, trong 6 điểm B, C, D, E, F, G có 3 điểm là 3 đỉnh của một tam giác có 3 cạnh cùng màu, giả sử là tam giác BCD. Do tam giác nào cũng phải có ít nhất một cạnh đỏ nên tam giác BCD có 3 cạnh đỏ. Khi đó, tứ giác $ABCD$ là tứ giác có các cạnh và đường chéo đều được tô đỏ.

Nếu ta coi 9 người như 9 điểm và các quan hệ quen biết nhau được tô đỏ và không quen biết nhau được tô xanh các đoạn thẳng nối 2 trong 9 điểm, bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Nhận xét. Đây là bài toán không mới. Các bạn sau có lời giải đúng:

Đặng Thành Trung, lớp 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long**; *Trần Thái Dương*, 9B, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**; *Trương Khánh Chi*, Lớp 7A8, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc.**

NGUYỄN TIẾN LÂM

Bài T10/567. *Cho phương trình*

$$3x^6+3x^5-14x^4-18x^3+3x^2+7x+1=0 \quad (1).$$

a) *Chứng minh rằng phương trình (1) có đúng 6 nghiệm thực x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6 đôi một phân biệt và các nghiệm này là các số vô tỷ.*

b) *Tính giá trị của biểu thức*

$$T=\prod_{k=1}^{6}\frac{8x_k^4+18x_k^3-6x_k^2-10x_k+5}{3x_k^2+3x_k-6}.$$

Lời giải (Của bạn *Đỗ Quang Anh*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**)

Ta có $f(x)=3x^6+3x^5-14x^4-18x^3+3x^2+7x+1$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có:

$$f(-2)>0,\ f\left(-\frac{8}{5}\right)<0,\ f(-1)>0,\ f\left(-\frac{1}{5}\right)<0$$

$$f(0)>0,\ f(1)<0,\ f(3)>0.$$

Vậy $f(x)$ có ít nhất 6 nghiệm thực phân biệt nằm trong 6 khoảng rời nhau:

$$\left(-2;-\frac{8}{5}\right),\left(-\frac{8}{5};-1\right),\left(-1;-\frac{1}{5}\right),\left(-\frac{1}{5};0\right),(0;1),(1;3).$$

Vì $f(x)$ là đa thức bậc 6 nên suy ra $f(x)$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt.

Ta sử dụng định lý sau (dễ chứng minh)

Nếu $r=\frac{a}{b}$ là một nghiệm hữu tỷ của đa thức hệ số nguyên thì a phải là ước của hệ số tự do và b phải là ước của hệ số cao nhất.

Như vậy nếu $r=\frac{a}{b}$ với $(a;b)=1$ là nghiệm hữu tỷ của đa thức (1) thì $a\in\{-1;1\}$ và $b\in\{-1;1;-3;3\}$. Vậy nghiệm hữu tỷ (nếu có) là ±1 hoặc $\pm\frac{1}{3}$. Thử trực tiếp ta thấy ±1 và $\pm\frac{1}{3}$ không là nghiệm. Vậy 6 nghiệm của (1) đều là số vô tỷ.

b) Ta có: $3x_k^6+3x_k^5-14x_k^4-18x_k^3+3x_k^2+7x_k+1=0$

$$\Leftrightarrow 8x_k^4+18x_k^3-6x_k^2-10x_k+5=(3x_k^2+3x_k-6)(x_k^4-1)$$

Vậy $T=\prod_{k=1}^{6}\left[\frac{8x_k^4+18x_k^3-6x_k^2-10x_k+5}{3x_k^2+3x_k-6}\right]$

$$=\prod_{k=1}^{6}\left(x_k^4-1\right)=\prod_{k=1}^{6}(x_k^2-1)(x_k^2+1)$$

$$=\prod_{k=1}^{6}(x_k-1)(x_k+1)(x_k-i)(x_k+i)$$

$$=\prod_{k=1}^{6}(x_k-1)\prod_{k=1}^{6}(x_k+1)\prod_{k=1}^{6}(x_k-i)\prod_{k=1}^{6}(x_k+i).$$

Chú ý rằng $f(x)=3\prod_{k=1}^{6}(x-x_k)$. Do đó:

$$\prod_{k=1}^{6}(x_k-1)=\prod_{k=1}^{6}(1-x_k)=\frac{f(1)}{3}=-\frac{15}{3};$$

$$\prod_{k=1}^{6}(x_k+1)=\prod_{k=1}^{6}(-1-x_k)=\frac{f(-1)}{3}=\frac{1}{3};$$

$$\prod_{k=1}^{6}(x_k-i)=\prod_{k=1}^{6}(i-x_k)=\frac{f(i)}{3}=\frac{28i-19}{3};$$

Được quét bằng CamScanner

$$\prod_{k=1}^{6}(x_k+i)=\prod_{k=1}^{6}(-i-x_k)=\frac{f(-i)}{3}=\frac{-28i-19}{3}.$$

Thay vào (2) ta được $T=-\dfrac{5725}{27}$.

Nhận xét. Chỉ có 4 bạn tham gia giải bài toán này: Ngoài bạn *Quang Anh*, hai bạn khác có lời giải tốt là *Nguyễn Lê Minh*, 9, THCS Lâm Đồng, Đà Lạt, **Lâm Đồng** và *Nguyễn Chánh Thiện*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Hồ Chí Minh.** Bạn *Nguyễn Trí Hiền*, 10CT, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Nam** có lời giải đúng ở tất cả các bước, trừ bước cuối lại viết $f(x)=\prod_{k=1}^{6}(x-x_k)$ thành thử dẫn đến đáp số sai.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/567. *Cho $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là một hàm liên tục tuần hoàn có chu kỳ 2π sao cho với mọi số thực x, y thỏa mãn: $f(x+y)f(x-y)=f^2(x)-f^2(y)$ (1). Chứng minh rằng với mọi số thực x thì*

$$f(x)\le\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \ (*).$$

Lời giải. Cho $x=0$, $y=0$ vào (1) ta được $f(0)=0$ nên $f(2\pi)=0$. Trong (1), thay y bởi $-y$ thì

$$f(x-y)f(x+y)=(f(x))^2-(f(-y))^2,\forall x,y\in\mathbb{R} \ (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra: $(f(-y))^2=(f(y))^2,\forall y\in\mathbb{R}$.

Cho $x=0$ vào (1), ta thu được:

$$f(y)f(-y)=-(f(y))^2,\forall y\in\mathbb{R}$$

nên nếu $f(y)\ne 0$ thì $f(-y)=-f(y)$. Do đó, $f(y)$ là hàm lẻ. Mặt khác, lần lượt khi thay $y=\pi$ trong (1) ta được:

$$f(x+\pi)f(x-\pi)=(f(x))^2-(f(\pi))^2,\forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow (f(x+\pi))^2-(f(x))^2=-(f(\pi))^2,\forall x\in\mathbb{R} \ (3)$$

và thay x bởi $x+\pi$, y bởi π ta được:

$$f(x+2\pi)f(x)=(f(x+\pi))^2-(f(\pi))^2,\forall x\in\mathbb{R} \ (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$(f(\pi))^2=-(f(\pi))^2\Leftrightarrow f(\pi)=0.$$

Tiếp theo, ta chứng minh rằng $f(t)\ne 0$ trong khoảng $(0,\pi)$.

Thật vậy, nếu xảy ra $f(a)=0$ với $a\in(0,\pi)$ thì từ (1) suy ra:

$$0=f(2x+a)f(a)=(f(x+a))^2-(f(x))^2$$
$$\Leftrightarrow (f(x+a))^2=(f(x))^2,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Tương tự: $(f(x-a))^2=(f(x))^2,\forall x\in\mathbb{R}$

nên $(f(x+a))^2=(f(x-a))^2,\forall x\in\mathbb{R}$ (5).

Mặt khác, thay $y=a$ vào (1), ta được:

$$f(x+a)f(x-a)=(f(x))^2\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

tức $f(x+a)$ và $f(x-a)$ luôn cùng dấu. Kết hợp với (5), suy ra: $f(x+a)=f(x-a),\forall x\in\mathbb{R}$, tức $f(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $2a<2\pi$, trái với giả thiết.

Như vậy, nếu $f(a)=0$ thì $a=k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Ta chứng minh bất đẳng thức (*).

Trong (1) thay $x=\dfrac{\pi}{2}$ ta thu được:

$$f\left(\frac{\pi}{2}+y\right)f\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2-(f(y))^2,\forall y\in\mathbb{R} \ (6).$$

Vì $f(x)\ne 0$ với mọi $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ và $f(x)$ liên tục nên $f\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)$ và $f\left(\dfrac{\pi}{2}+y\right)$ luôn luôn cùng dấu với $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. Kết hợp với (6) và sử dụng tính chất hàm $f(x)$ lẻ và tuần hoàn chu kỳ cơ sở 2π, ta có ngay (*), đpcm.

Nhận xét. Đây là dạng toán phương trình hàm sinh bởi đồng nhất thức với cặp biến tự do. Do sơ suất, trong đề ra đã không chú dẫn là hàm $f(x)$ hàm tuần hoàn với chu kỳ cơ sở 2π nên lời giải sẽ phức tạp hơn vì việc chứng minh kết luận $f(a)=0$ thì $a=k\pi,k\in\mathbb{Z}$. không thực hiện được.

NGUYỄN VĂN MẬU

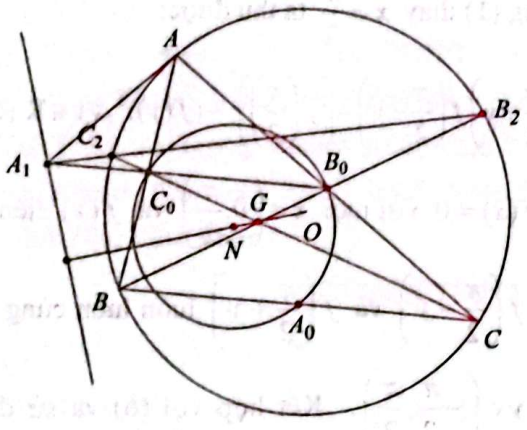
Được quét bằng CamScanner

Bài T12/567. *Cho tam giác ABC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp. A_0, B_0, C_0 theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. (O_a) là đường tròn đi qua B_0, C_0 và tiếp xúc trong với (O) tại A_1 khác A. (O_b) là đường tròn đi qua C_0, A_0 và tiếp xúc trong với (O) tại B_1 khác B. (O_c) là đường tròn đi qua A_0, B_0 và tiếp xúc trong với (O) tại C_1 khác C. Chứng minh rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại một điểm thuộc đường thẳng Euler của tam giác ABC.*

Lời giải. Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. *Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp. A_0, B_0, C_0 theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. A_1 là giao điểm của B_0C_0 và tiếp tuyến với (O) tại A. B_1, C_1 được định nghĩa tương tự. Khi đó A_1, B_1, C_1 cùng thuộc một đường thẳng vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác ABC.*

Chứng minh.



Gọi (N) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_0B_0C_0$; G là trọng tâm của tam giác ABC; B_2, C_2 theo thứ tự là giao điểm thứ hai của BG, CG và (O). Áp dụng định lí Pascal cho sáu điểm $\begin{pmatrix} AC_2B \\ B_2AC \end{pmatrix}$, suy ra: $AA \cap B_2C_2; B_0 = AC \cap BB_2$;

$C_0 = AB \cap CC_2$ thẳng hàng. Do đó

$$AA \cap B_2C_2 \in B_0C_0.$$

Vậy $AA \cap B_2C_2 = AA \cap B_0C_0 = A_1$. Nói cách khác A_1, B_2, C_2 thẳng hàng.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên

$$\overline{GB_0}.\overline{GB_2} = -\frac{1}{2}\overline{GB}.\overline{GB_2} = -\frac{1}{2}\overline{GC}.\overline{GC_2} = \overline{GC_0}.\overline{GC_2}.$$

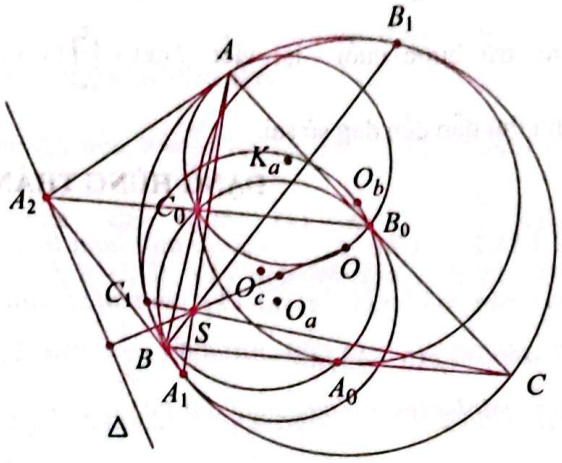
Do đó tứ giác $B_0C_0C_2B_2$ nội tiếp. Vậy

$$\mathcal{P}_{A_1/(O)} = \overline{A_1B_2}.\overline{A_1C_2} = \overline{A_1B_0}.\overline{A_1C_0} = \mathcal{P}_{A_1/(N)}.$$

Tương tự $\mathcal{P}_{B_1/(O)} = \mathcal{P}_{B_1/(N)}$; $\mathcal{P}_{C_1/(O)} = \mathcal{P}_{C_1/(N)}$.

Vậy A_1, B_1, C_1 cùng thuộc một đường thẳng vuông góc với ON, đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Trở lại giải bài toán T12/567.



Gọi A_2 là giao điểm của các tiếp tuyến với (O) tại A và A_1; B_2, C_2 xác định tương tự; (K_a) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_0C_0. Dễ thấy $B_0C_0 // BC$. Do đó (K_a) tiếp xúc với (O) tại A.

Vậy $\mathcal{P}_{A_2/(O_a)} = A_2A_1^2 = A_2A^2 = \mathcal{P}_{A_2/(K_a)}$.

Điều đó có nghĩa là A_2 thuộc B_0C_0. Nói cách khác A_2 là giao điểm của B_0C_0 và tiếp tuyến với (O) tại A. Tương tự, B_2 là giao điểm của C_0A_0 và tiếp tuyến với (O) tại B; C_2 là giao điểm của A_0B_0 và tiếp tuyến với (O) tại C.

Vậy theo bổ đề trên, A_2, B_2, C_2 cùng thuộc một đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác ABC (1).

Dễ thấy AA_1, BB_1, CC_1 theo thứ tự là đường đối cực của A_2, B_2, C_2 đối với (O). Do đó AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại điểm S, cực của Δ (2).

Từ (1) và (2), chú ý rằng O thuộc đường thẳng Euler của tam giác ABC và $OS \perp \Delta$, suy ra S

Được quét bằng CamScanner

thuộc đường thẳng Euler của tam giác ABC (đpcm).

Nhận xét. Bài toán này không khó nhưng chỉ có 4 bạn tham gia giải. 2 bạn cho lời giải quá dài. Xin nêu tên cả 4 bạn: **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Duy Phúc*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Nam:** *Nguyễn Trí Hiền*, 10CT, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Gia Lai:** *Phan Trinh Nguyên*, 12A3, THPT Chi Lăng; **Vĩnh Long:** *Đặng Thành Trung*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/567. *Một trạm phát điện, có hiệu điện thế 500 V truyền đi một công suất $\mathcal{P} = 500$ kW trên một đường dây có điện trở tổng cộng là $R = 4\ \Omega$ tới tải tiêu thụ.*

1. *Tính công suất hao phí trên đường dây, độ giảm thế, hiệu suất của sự truyền tải điện năng và hiệu điện thế tại nơi tiêu thụ.*

2. *Nếu trước khi đưa lên đường dây tải điện, người ta nối hai cực của máy phát điện với một máy biến thế lí tưởng có tỉ số vòng dây của cuộn sơ cấp trên cuộn thứ cấp là* 0,1 *để tăng áp. Hãy tính lại công suất hao phí trên đường dây, độ giảm thế, hiệu suất của sự truyền tải điện năng và hiệu điện thế tại nơi tiêu thụ.*

Lời giải. 1. Khi chưa dùng máy tăng thế, hiệu điện thế đưa lên đường dây là 500 V.

Công suất hao phí trên đường dây:

$$\mathcal{P}_{hp} = \frac{\mathcal{P}^2}{U^2}R = \frac{50000^2}{500^2}.4 = 40000\ \text{W} = 40\ \text{kW}.$$

Hiệu suất truyền tải:

$$H = \frac{\mathcal{P} - \mathcal{P}_{hp}}{\mathcal{P}} = \frac{50000 - 40000}{50000} = 0,20 = 20\%.$$

Độ giảm thế trên đường dây:

$$\Delta U = RI = \frac{\mathcal{P}}{U}R = \frac{50000}{500}.4 = 400\ \text{V}.$$

Hiệu điện thế tại nơi tiêu thụ điện

$$U' = U - \Delta U = 500 - 400 = 100\ \text{V}.$$

2. Khi dùng máy tăng thế với tỉ số vòng dây như đề bài thì hiệu điện thế đưa lên đường dây tăng lên 10 lần (5 000 V), tương tự ta có:

$$\mathcal{P}_{hp} = \frac{\mathcal{P}^2}{U^2}R = \frac{50000^2}{5000^2}.4 = 400\ W = 0,4\ \text{kW}.$$

Hiệu suất truyền tải:

$$H = \frac{\mathcal{P} - \mathcal{P}_{hp}}{\mathcal{P}} = \frac{50000 - 400}{50000} = 0,992 = 99,2\%.$$

Độ giảm thế trên đường dây:

$$\Delta U = RI = \frac{\mathcal{P}}{U}R = \frac{50000}{5000}.4 = 40\ \text{V}.$$

Hiệu điện thế tại nơi tiêu thụ điện:

$$U' = 10U - \Delta U = 10.500 - 40 = 4960\ \text{V}.$$

Nhận xét. Rất tiếc là Tòa soạn không nhận được lời giải nào cho bài này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/567. *Cho một mạng tinh thể sắt hình lập phương. Cho rằng trong mỗi hình lập phương nguyên tố có một nguyên tử sắt. Hãy tìm hằng số mạng tinh thể, tức là khoảng cách gần nhất giữa các nguyên tử sắt. Biết sắt có nguyên tử lượng bằng* 56, *khối lượng riêng* $\rho = 7,9\ \text{g/cm}^3$.

Lời giải. Số nguyên tử sắt trong một cm^3 là:

$$n = \frac{\rho}{\mu}N_A = 8,5.10^{22}\ /\ \text{cm}^3.$$

Thể tích của một hình lập phương nguyên tố: $V_1 = \frac{1}{N}$. Độ dài cạnh của hình lập phương là khoảng cách cần tìm:

$$l = \sqrt[3]{V_1} = \sqrt{\frac{1}{n}} = 2,3.10^{-8}\ \text{cm}.$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Lê Minh Chánh*, *Bùi Thị Tường Lam*, 10A2, TTGDNN-GDTX quận Ô Môn, **Cần Thơ**; *Trương Minh Phúc*, 12 Lý 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Được quét bằng CamScanner



MỘT CÁCH ĐẶT ẨN PHỤ ĐỂ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BÀI TOÁN TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

LÊ HUY
(Cựu SV Khoa sư phạm Toán Tin, ĐH Đồng Tháp)

Đặt ẩn phụ là một trong những phương pháp thường được sử dụng trong giải toán, cách đặt ẩn phụ khéo léo, thông minh sẽ giúp bài toán có hướng giải quyết rõ ràng, hiệu quả. Trong bài viết này, tác giả trình bày một phương pháp đặt ẩn phụ, dựa vào mối quan hệ phép toán nhân, giữa các hằng số trong tập hợp số thực $\mathbb{R}$, để giải hai mảng toán phổ biến, thường hay gặp trong các kì thi là: *Giải hệ phương trình và bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.*

1. CƠ SỞ LÍ THUYẾT

Xét x,y,z,k,l là năm số thuộc tập hợp số thực $\mathbb{R}$. Khi đó, ta có hai nhận xét (NX):

Nhận xét 1. *Cho x, y, k là ba số thuộc tập hợp số thực $\mathbb{R}$, giả sử ta biểu thị x qua y thông qua phép toán nhân với k, tức là $x=ky\,(1)$ khi đó, ta xét các khả năng sau (các khả năng sau là độc lập với nhau):*

$(1.i)$ *$k\neq 0,x\neq 0,y\neq 0$, lúc đó ta luôn biểu thị được (1).*

$(1.ii)$ *$k\neq 0$, bộ số $(x;y)$ có một số bằng 0, một số khác 0 thì ta không biểu thị được (1).*

$(1.iii)$ *$k=0$, lúc đó $x=0,\forall y\in\mathbb{R}$.*

$(1.iv)$ *$k\in\mathbb{R},(x;y)=(0;0)$ lúc đó (1) luôn đúng.*

Chứng minh. Giả sử ta có $x=ky$ (1) với:

• Giả thiết $k\neq 0,x\neq 0,y\neq 0$, rõ ràng phép toán nhân ở (1) được xét trong tập hợp số thực $\mathbb{R}$ luôn tồn tại, tức luôn biểu thị được (1), do đó $(1.i)$ được chứng minh.

• Giả thiết $k\neq 0$, bộ số $(x;y)$ có một số bằng 0, một số khác 0, xét 2 trường hợp sau:

TH1. Nếu $\begin{cases}x=0\\y\neq 0\end{cases}$ thì từ (1), ta có: $0=ky$, rõ ràng với $k\neq 0,y\neq 0$ thì phép toán nhân này không xảy ra, do đó (1) không biểu thị được.

TH2. Nếu $y=0,x\neq 0$ thì từ (1), ta có: $x=k.0\Leftrightarrow x=0$, mâu thuẫn với giả thiết $x\neq 0$, do đó (1) không biểu thị được.

Từ 2 trường hợp trên, rõ ràng (1) không biểu thị được, do đó $(1.ii)$ được chứng minh.

• Giả thiết $k=0$, lúc đó thay $k=0$ vào (1) ta được $x=0y=0,\forall y\in\mathbb{R}$, do đó $(1.iii)$ được chứng minh.

• Giả thiết $k\in\mathbb{R},(x;y)=(0;0)$, lúc đó thay $(x;y)=(0;0)$ vào (1) ta được $0=k.0=0$, luôn đúng $k\in\mathbb{R}$, do đó $(1.iv)$ được chứng minh.

Nhận xét 2. *Cho x, y, z, k, l là năm số thuộc tập hợp số thực $\mathbb{R}$, giả sử ta biểu thị y qua x thông qua phép toán nhân với k và z qua x thông qua phép toán nhân với l tức là $\begin{cases}y=kx\\z=lx\end{cases}(2)$ khi đó, ta xét các khả năng sau (các khả năng sau là độc lập với nhau):*

$(2.i)$ *$\begin{cases}k\neq 0\\l\neq 0\end{cases},x\neq 0,y\neq 0,z\neq 0$, lúc đó ta luôn biểu thị được (2).*

$(2.ii)$ *$\begin{cases}k\neq 0\\l\neq 0\end{cases}$, bộ số $(x;y;z)$ có một số bằng 0, hai số còn lại khác 0 hoặc hai số bằng 0, một số còn lại khác 0 thì ta không biểu thị được (2).*

$(2.iii)$ *$k=l=0$, lúc đó $y=z=0,\forall x\in\mathbb{R}$.*

$(2.iv)$ *$\begin{cases}k\in\mathbb{R}\\l\in\mathbb{R}\end{cases},(x;y;z)=(0;0;0)$ lúc đó (2) luôn đúng.*

Được quét bằng CamScanner

$(2.v)$ *Nếu một trong hai số k hoặc l có một số bằng 0, số còn lại khác 0 thì bộ số $(x;y;z)$ có một số bằng 0, hai số còn lại được biểu thị với nhau thông qua phép toán nhân với hằng số k hoặc l khác 0.*

Chứng minh. Giả sử ta có $\begin{cases} y = kx \\ z = lx \end{cases}$ (2) với:

• Giả thiết $\begin{cases} k \neq 0 \\ l \neq 0 \end{cases}, x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$, rõ ràng phép toán nhân ở (2) được xét trong tập hợp số thực $\mathbb{R}$ luôn tồn tại, tức luôn biểu thị được (2), do đó $(2.i)$ được chứng minh.

• Giả thiết $\begin{cases} k \neq 0 \\ l \neq 0 \end{cases}$, bộ số $(x;y;z)$ có một số bằng 0, hai số còn lại khác 0 hoặc hai số bằng 0, một số còn lại khác 0, xét 2 trường hợp sau:

TH1. Có một số bằng 0, hai số còn lại khác 0.

+ Nếu $x = 0, y \neq 0, z \neq 0$ thì từ (2), ta có $\begin{cases} y = k.0 = 0 \\ z = l.0 = 0 \end{cases}$, mâu thuẫn với giả thiết $\begin{cases} y \neq 0 \\ z \neq 0 \end{cases}$ do đó (2) không biểu thị được.

+ Nếu $x \neq 0, y = 0, z \neq 0$ thì từ (2), ta có $\begin{cases} 0 = k.x = 0 \\ z = l.x \end{cases}$, từ đây ta thấy $k = 0$ hoặc $x = 0$, mâu thuẫn với giả thiết $x \neq 0, k \neq 0$, do đó (2) không biểu thị được.

+ Nếu $x \neq 0, y \neq 0, z = 0$ thì từ (2), ta có $\begin{cases} y = kx \\ 0 = lx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = kx \\ l = 0 \end{cases}$, mâu thuẫn với giả thiết $l \neq 0$, do đó (2) không biểu thị được.

TH2. Có hai số bằng 0, một số còn lại khác 0.

+ Nếu $x \neq 0, y = 0, z = 0$ thì từ (2), ta có $\begin{cases} 0 = kx \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} k = 0 \\ l = 0 \end{cases} \\ 0 = lx \end{cases}$, mâu thuẫn với giả thiết $\begin{cases} k \neq 0 \\ l \neq 0 \end{cases}$, do đó (2) không biểu thị được.

+ Nếu $x = 0, y \neq 0, z = 0$ thì từ (2), ta có $\begin{cases} y = k.0 = 0 \\ 0 = l.0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0$, mâu thuẫn với giả thiết $y \neq 0$, do đó (2) không biểu thị được.

+ Nếu $x = 0, y = 0, z \neq 0$ thì từ (2), ta có $\begin{cases} 0 = k.0 = 0 \\ z = l.0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 0$, mâu thuẫn với giả thiết $z \neq 0$, do đó (2) không biểu thị được.

Từ các khả năng trên, rõ ràng (2) không biểu thị được, do đó $(2.ii)$ được chứng minh.

• Giả thiết $k = l = 0$, lúc đó thay vào (2) ta được $\begin{cases} y = 0.x = 0 \\ z = 0.x = 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$, do đó $(2.iii)$ được chứng minh.

• Giả thiết $k \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}, (x;y;z) = (0;0;0)$, lúc đó thay $(x;y;z) = (0;0;0)$ vào (2) ta được $\begin{cases} 0 = k.0 = 0 \\ 0 = l.0 = 0 \end{cases}$, luôn đúng $k, l \in \mathbb{R}$, do đó $(2.iv)$ được chứng minh.

• Nếu một trong hai số k hoặc l có một số bằng 0, số còn lại khác 0, từ (2) ta xét:

TH1. Nếu $\begin{cases} k = 0 \\ l \neq 0 \end{cases}$ thì $\begin{cases} y = 0.x = 0 \\ z = l.x \end{cases}$, rõ ràng $y = 0$, z và x được biểu thị với nhau thông qua phép toán nhân với hằng số $l \neq 0$.

TH2. Nếu $\begin{cases} l = 0 \\ k \neq 0 \end{cases}$ thì $\begin{cases} y = k.x \\ z = 0.x = 0 \end{cases}$, rõ ràng $z = 0, y$ và x được biểu thị với nhau thông qua phép toán nhân với hằng số $k \neq 0$.

Do đó $(2.v)$ được chứng minh.

Lưu ý: Trong thực hành giải toán, các biến số trong bài toán thỏa mãn NX1 – $(1.i)$ hoặc NX2 – $(2.i)$ thì lúc đó việc đặt ẩn phụ (1) hoặc (2) là hợp lí có cơ sở và tùy vào từng giả thiết cụ thể của bài toán, mà ta cần phải xét thêm các khả năng NX1 – $(1.ii)$ – $(1.iii)$ – $(1.iv)$ hoặc NX2 – $(2.ii)$ – $(2.iii)$ – $(2.iv)$ – $(2.v)$.

Được quét bằng CamScanner

2. CÁC BÀI TOÁN VẬN DỤNG

2.1. Các bài toán giải hệ phương trình (HPT)

Các bài toán trong mục này được xét là HPT hai ẩn số, ba ẩn số được giải trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Phương pháp chung: Dựa vào các ĐK của NX1 hoặc NX2 nêu ở cơ sở lí thuyết và dựa vào đặc điểm của HPT mà ta đặt ẩn số phụ, sau đó thế các ẩn số phụ vào hệ, trước hoặc sau khi biến đổi, đưa HPT về chỉ chứa ẩn số phụ hoàn toàn, hoặc không hoàn toàn, tiếp tục sử dụng phương pháp thế từ một trong hai phương trình (PT) vào PT còn lại, quy về giải PT chỉ chứa một ẩn số phụ, đối chiếu ẩn phụ tìm được với ĐK để tìm ẩn chính của bài toán và kết luận.

Bài toán 1 (Bài T3/482, TH&TT). *Giải hệ phương trình* $(1^*)\begin{cases}2\left(y^2-x^2\right)=\dfrac{14}{x}-\dfrac{13}{y} & (1.1)\\ 4\left(x^2+y^2\right)=\dfrac{14}{x}+\dfrac{13}{y} & (1.2)\end{cases}$.

Lời giải. ĐK: $x\neq 0, y\neq 0$. Với ĐK này ta thực hiện biến đổi như sau:

Cộng theo vế PT(1.1) cho PT(1.2), ta được:

$$6y^2+2x^2=2.\frac{14}{x}\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}x^3+3y^2x=14 \quad (1.3).$$

Trừ theo vế PT(1.1) cho PT(1.2), ta được:

$$-2y^2-6x^2=-2.\frac{13}{y}\overset{y\neq 0}{\Leftrightarrow}y^3+3x^2y=13 \quad (1.4).$$

Từ hai phép biến đổi trên, ta thu được HPT tương đương với hệ PT(1^*): $\begin{cases}x^3+3y^2x=14\ (1.3)\\ y^3+3x^2y=13\ (1.4)\end{cases}$.

Giả sử có $x = ky$, từ ĐK ta có $k\neq 0$, k là ẩn số phụ, khi đó biến số thỏa mãn NX1$-(1.i)$ nên ta có thể đặt $x=ky, k\neq 0$ thay vào PT(1.3) và PT (1.4) thu được hệ: $\begin{cases}k^3y^3+3y^3k=14\ (1.5)\\ y^3+3k^2y^3=13\ (1.6)\end{cases}$.

$(1.6)\Leftrightarrow y^3\left(1+3k^2\right)=13$

$$\Leftrightarrow y^3=\frac{13}{1+3k^2}\ (1.7)\left(1+3k^2>0\right)$$

$$\Leftrightarrow y^3=\frac{13}{1+3k^2}\ (1.7)\left(1+3k^2>0\right)$$

thay vào PT(1.5) ta được: $\dfrac{13k^3}{1+3k^2}+\dfrac{3.13k}{1+3k^2}=14$

$\Leftrightarrow 13k^3-42k^2+39k-14=0$

$\Leftrightarrow (k-2)\left(13k^2-16k+7\right)=0$

$$\Leftrightarrow (k-2)\left[\underbrace{13\left(k-\frac{8}{13}\right)^2+\frac{27}{13}}_{P(k)>0}\right]=0\Leftrightarrow k=2.$$

Với $k=2$ kết hợp PT(1.7) và cách đặt $x=ky$, ta có: $\begin{cases}y^3=\dfrac{13}{1+3.(2)^2}=1\\ x=2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ x=2\end{cases}$. Kiểm tra lại bộ số $(x;y)=(2;1)$ vào hệ PT(1^*) thấy thỏa mãn.

Kết luận: HPT(1^*) có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;1)$.

Bài toán 2 (Bài 6 (236+237),TTT2). *Giải hệ phương trình*

$$(2^*)\begin{cases}4x^2y-2xy^2+3y^3-2(x+y)=0 & (2.1)\\ (2-xy)\left(x^2+y^2\right)=4-2xy & (2.2)\end{cases}.$$

Lời giải. Tập xác định $\mathbb{R}$, ta có PT:

$$(2.2)\Leftrightarrow(2-xy)\left(x^2+y^2-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}xy=2 & (2.2.1)\\ x^2+y^2=2 & (2.2.2)\end{bmatrix}.$$

Ta xét hai trường hợp sau:

TH1. Xét PT $xy=2$ $(2.2.1)$. Dễ thấy $x=0$ hoặc $y=0$ không thỏa mãn PT$(2.2.1)$, do đó với $x\neq 0$, ta có PT $(2.2.1)\Leftrightarrow y=\dfrac{2}{x}$, thay vào PT (2.1), ta nhận được:

$$4x^2.\frac{2}{x}-2x\left(\frac{2}{x}\right)^2+3\left(\frac{2}{x}\right)^3-2\left(x+\frac{2}{x}\right)=0$$

$$\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}6x-\frac{12}{x}+\frac{24}{x^3}=0\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}6x^4-12x^2+24=0$$

$\Leftrightarrow 6\left(x^2-1\right)^2+18=0$, PT này vô nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Được quét bằng CamScanner

Do đó, ở trường hợp 1 HPT (2^*) vô nghiệm.

TH2. Xét PT $x^2+y^2=2$ $(2.2.2)$.

Dễ thấy $(x;y)=(0;0)$ không thỏa mãn PT $(2.2.2)$, giả sử có $x=ky$ và vì $(x;y)\neq(0;0)$ nên $k\neq 0$, k là ẩn số phụ, khi đó các biến số thỏa mãn NXl $-(1.i)$, nên ta có thể đặt $x=ky, k\neq 0$ thay vào PT $(2.2.2)$ và PT (2.1) thu được hệ:

$$\begin{cases} (ky)^2+y^2=2 \\ 4(ky)^2y-2(ky)y^2+3y^3-2(ky+y)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2=\dfrac{2}{k^2+1},(k^2+1>0) & (2.3) \\ y\left[y^2\left(4k^2-2k+3\right)-2(k+1)\right]=0 & (2.4) \end{cases}.$$

Ta có PT:

$$(2.4)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y=0 & (2.4.1) \\ y^2\left(4k^2-2k+3\right)=2(k+1) & (2.4.2) \end{array}\right.$$

Ta xét các trường hợp sau:

- **TH2.1.** Từ $(2.4.1)$ ta có $y=0\overset{x=ky}{\Rightarrow}x=0$, bộ số $(x;y)=(0;0)$ không thỏa mãn hệ PT (2^*).
- **TH2.2.** Từ (2.3) ta có $y^2=\dfrac{2}{k^2+1}$ thay vào PT $(2.4.2)$ ta được:

$$\frac{2}{k^2+1}\times\left(4k^2-2k+3\right)=2(k+1)$$

$$\Leftrightarrow k^3-3k^2+3k-2=0\Leftrightarrow(k-2)\underbrace{\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)}_{P(k)>0}=0$$

$$\Leftrightarrow k=2\overset{x=ky}{\Rightarrow}x=2y \quad (2.5).$$

Thay $k=2$ vào PT (2.3) ta được:

$$y^2=\frac{2}{2^2+1}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow y=\pm\frac{\sqrt{10}}{5}\overset{(2.5)}{\Rightarrow}x=\pm\frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

Thử lại 2 bộ số $\left(\dfrac{2\sqrt{10}}{5};\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right);\left(\dfrac{-2\sqrt{10}}{5};\dfrac{-\sqrt{10}}{5}\right)$ vào lại hệ PT (2^*) ta thấy thỏa mãn.

Kết luận: HPT (2^*) có hai nghiệm là

$$(x;y)\in\left\{\left(\frac{2\sqrt{10}}{5};\frac{\sqrt{10}}{5}\right);\left(\frac{-2\sqrt{10}}{5};\frac{-\sqrt{10}}{5}\right)\right\}.$$

Bài toán 3 (Câu 8, đề số 1, đề khởi động trước kì thi THPTQG năm 2015). *Giải hệ phương trình* (3^*) $\begin{cases} 2x^2-5xy-y^2=1 & (3.1) \\ y\left(\sqrt{xy-2y^2}+\sqrt{4y^2-xy}\right)=1 & (3.2) \end{cases}$.

Lời giải. ĐK: $\begin{cases} xy-2y^2\geq 0 \\ 4y^2-xy\geq 0 \\ y>0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow 4y^2\geq xy\geq 2y^2>0\Leftrightarrow 4y\geq x\geq 2y>0.$$

Trừ theo vế PT (3.1) cho PT (3.2) ta nhận được:

$$2x^2-5xy-y^2=y\left(\sqrt{xy-2y^2}+\sqrt{4y^2-xy}\right)(3.3).$$

Giả sử có $x=ky$, theo ĐK ta có $x>0, y>0$ thì $k>0, k$ là ẩn số phụ, khi đó biến số thỏa mãn NXl $-(1.i)$ nên ta có thể đặt $x=ky$, $k>0$, thay vào PT (3.3) ta được:

$$2(ky)^2-5ky^2-y^2=y\left(\sqrt{ky^2-2y^2}+\sqrt{4y^2-ky^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y^2\left(2k^2-5k-1-\sqrt{4-k}-\sqrt{k-2}\right)=0,$$

(với $y>0, k\in[2;4]$)

$$\overset{y>0}{\Leftrightarrow}\underbrace{2k^2-5k-1-\sqrt{4-k}-\sqrt{k-2}}_{f(k)}=0 \quad (3.4)$$

$$\Leftrightarrow 2k^2-5k-3-\left(\sqrt{4-k}-1\right)-\left(\sqrt{k-2}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(2k+1)(k-3)+\frac{k-3}{1+\sqrt{4-k}}-\frac{k-3}{\sqrt{k-2}+1}=0$$

$$\left(\text{với }\begin{cases} 1+\sqrt{4-k}>0 \\ 1+\sqrt{k-2}>0 \end{cases},\forall k\in[2;4]\right)$$

$$\Leftrightarrow(k-3)\left(2k+1+\frac{1}{1+\sqrt{4-k}}-\frac{1}{\sqrt{k-2}+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(k-3)\underbrace{\left(2k+\frac{1}{1+\sqrt{4-k}}+\frac{\sqrt{k-2}}{\sqrt{k-2}+1}\right)}_{P(k)>0,\forall k\in[2;4]}=0$$

$\Leftrightarrow k=3$ (thỏa mãn $k\in[2;4]$).

Được quét bằng CamScanner

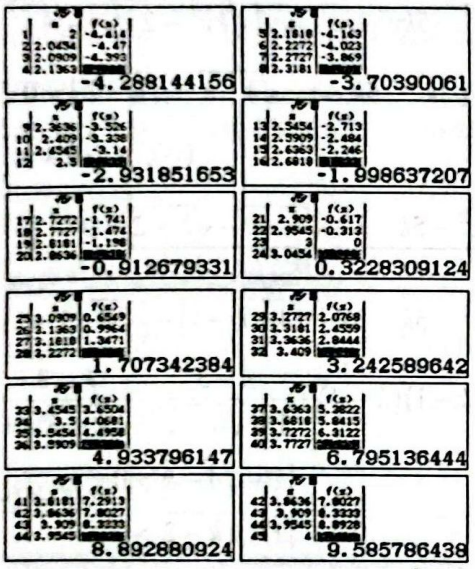
Với $k=3 \overset{x=ky}{\Rightarrow} x=3y$, thay vào PT$(3.1)$, kết hợp ĐKXĐ ta có: $\begin{cases} 2(3y)^2-5.(3y).y-y^2=1 \\ y>0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2=1 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{2}} \overset{x=3y}{\Rightarrow} x=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

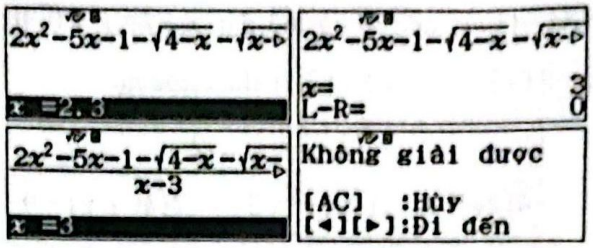
Kiểm tra lại bộ số $(x;y)=\left(\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ vào hệ PT (3^*) thấy thỏa mãn.

Kết luận: HPT(3^*) có nghiệm duy nhất là $(x;y)=\left(\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Bình luận: Để có hướng giải như trên, ta sử dụng máy tính *Casio* $f(x)-580VNX$ để dò đoán số nghiệm, ta đặt vế trái PT(3.4) là $f(k)$ với chức năng bảng **TABLE** ta tính 45 giá trị trong đoạn $[2;4]$, thu được kết quả hiển thị trên màn hình như sau:



Quan sát bảng giá trị, tính từ thứ tự 1 đến 22 và 24 đến 45, $f(x)$ (lưu ý vai trò ẩn k bây giờ là ẩn x) chỉ đổi dấu từ "−" sang "+" một lần và tại thứ tự 23 của x thì $f(x)$ nhận $x=3$ làm nghiệm, vì vậy $f(k)=0$ chỉ có một nghiệm duy nhất trên $[2;4]$. Ngoài ra, ta có thể giải tìm lại nghiệm bằng chức năng **SOLVE (SHIFT CALC)** khi đã biết chắc chắn có một nghiệm, về màn hình tính toán thông thường, nhập biểu thức $f(x)$ và ấn **SHIFT CALC**, chọn giá trị "*khởi tạo*" có thể ngẫu nhiên trong $[2;4]$, chẳng hạn $x=2.3$ ta tìm được nghiệm $x=3$, tiếp tục tìm nghiệm còn lại ta chia $f(x)$ cho $(x-3)$ ấn **SHIFT CALC** chờ máy giải thì kết quả màn hình hiển thị "*không giải được*".



Ta thay $k_0=3$ vào mỗi căn thức thì được $\begin{cases} \sqrt{4-k_0}=1 \\ \sqrt{k_0-2}=1 \end{cases} \blacklozenge \begin{cases} \sqrt{4-k_0}-1=0 \\ \sqrt{k_0-2}-1=0 \end{cases}$ đây chính là hai số hạng trong lời giải sau khi tách các số hạng từ PT(3.4), tiếp theo ta điều chỉnh lại hệ số tự do và liên hợp như trên.

Bài toán 4 (Câu 9, đề thi thử THPTQG lần 2, THPT Nông Cống I, Thanh Hóa, năm 2015). *Giải hệ phương trình*

$$(4^*)\begin{cases} \sqrt{x^2+xy+2y^2}+\sqrt{y^2+xy+2x^2}=2(x+y) \quad (4.1) \\ (8y-6)\sqrt{x-1}=\left(2+\sqrt{y-2}\right)\left(y+4\sqrt{x-2}+3\right) (4.2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $\begin{cases} x\geq 2 \\ y\geq 2 \end{cases}$, giả sử có $x=ky$, từ ĐK ta có $k>0$, với k là ẩn số phụ, khi đó các biến số thỏa mãn NX1$-(1.i)$ nên ta có thể đặt $x=ky$, $k>0$, thay vào PT(4.1), ta được:

$$\sqrt{(ky)^2+(ky)y+2y^2}+\sqrt{y^2+(ky)y+2(ky)^2}=2(ky+y)$$

$$\overset{y\geq 2>0}{\Leftrightarrow} y\left(\sqrt{k^2+k+2}+\sqrt{2k^2+k+1}\right)=2y(k+1)$$

$$\overset{y\geq 2>0}{\Leftrightarrow} \underbrace{\sqrt{k^2+k+2}+\sqrt{2k^2+k+1}-2(k+1)}_{f(k)}=0 \ (4.3).$$

Giải PT(4.3) ta có hai cách:

• ***Cách 1.*** Đưa về PT bậc cao, chuyển vế bình phương hai vế PT(4.3) khai triển và thu gọn, ta được:

$$2\sqrt{\left(k^2+k+2\right)\left(2k^2+k+1\right)}=k^2+6k+1 \quad (4.4).$$

Được quét bằng CamScanner

Dễ thấy, $k^2+6k+1>0,\forall k>0$, do đó tiếp tục bình phương hai vế PT(4.4), thu gọn, ta được:

$$k^4-2k^2+1=0\Leftrightarrow k=\pm 1.$$

Đối chiếu ĐK $k>0$, ta nhận $k=1$, suy ra $x=y$.

• ***Cách 2.*** Dùng liên hợp, tách ghép các số hạng ở PT(4.3), ta có: $(4.3)\Leftrightarrow\left(\sqrt{k^2+k+2}-\dfrac{3k+5}{4}\right)$

$$+\left(\sqrt{2k^2+k+1}-\frac{5k+3}{4}\right)=0\quad(4.5).$$

Vì $\begin{cases}\sqrt{k^2+k+2}+\dfrac{3k+5}{4}>0,\forall k>0\\ \sqrt{2k^2+k+1}+\dfrac{5k+3}{4}>0,\forall k>0\end{cases}$ nên (4.5) tương đương với:

$$\frac{16\left(k^2+k+2\right)-(3k+5)^2}{4\sqrt{k^2+k+2}+3k+5}+\frac{16\left(2k^2+k+1\right)-(5k+3)^2}{4\sqrt{2k^2+k+1}+5k+3}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{7\left(k^2-2k+1\right)}{4\sqrt{k^2+k+2}+3k+5}+\frac{7\left(k^2-2k+1\right)}{4\sqrt{2k^2+k+1}+5k+3}=0$$

$$\Leftrightarrow 7\left(k^2-2k+1\right)\times$$

$$\times\left(\underbrace{\frac{1}{4\sqrt{k^2+k+2}+3k+5}+\frac{1}{4\sqrt{2k^2+k+1}+5k+3}}_{P(k)>0,\ \forall k>0}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow k^2-2k+1=0\Leftrightarrow k=1.$$

Với $k=1$, suy ra $x=y$. Ta thay $y=x$ vào (4.2) nhận được:

$$(8x-6)\sqrt{x-1}=\left(2+\sqrt{x-2}\right)\left(x+4\sqrt{x-2}+3\right)(4.6).$$

Ta có:

$$x+4\sqrt{x-2}+3=\left[\left(\sqrt{x-2}\right)^2+2.2.\sqrt{x-2}+4\right]+1$$

$$=\left(\sqrt{x-2}+2\right)^2+1\quad(4.7);$$

$$(8x-6)\sqrt{x-1}=\left[\left(\sqrt{4x-4}\right)^2+1\right]\sqrt{4x-4}\quad(4.8).$$

Thay đẳng thức (4.7) và (4.8) vào PT(4.6) và biến đổi ta thu được:

$$\left(\sqrt{4x-4}\right)^3+\sqrt{4x-4}=\left(\sqrt{x-2}+2\right)^3+\left(\sqrt{x-2}+2\right)(4.9).$$

Hướng 1. Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{4x-4}\ ;u\ge 0\\ v=\sqrt{x-2}+2;v\ge 2\end{cases}$, khi đó PT (4.9) được biến đổi trở thành:

$$u^3-v^3+u-v=0\Leftrightarrow(u-v)\left(\underbrace{u^2+v^2+uv+1}_{P(u,v)>0,\forall u\ge 0,\forall v>1}\right)=0$$

$\Leftrightarrow u=v$, từ đây ta có:

$$\sqrt{4x-4}=\sqrt{x-2}+2\quad(4.10).$$

Hướng 2. PT (4.9) còn có dạng

$$f\left(\sqrt{4x-4}\right)=f\left(\sqrt{x-2}+2\right),$$

với $f(t)=t^3+t,t\ge 0$ có: $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t>0$, $f(t)$ là hàm số đồng biến, từ đó ta suy ra được PT(4.10). Bình phương hai vế PT(4.10) khai triển và thu gọn, ta được:

$$3x-6=4\sqrt{x-2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ 9(x-2)^2=16(x-2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ 9x^2-52x+68=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\Rightarrow y=2\\ x=\dfrac{34}{9}\Rightarrow y=\dfrac{34}{9}.\end{array}\right.$$

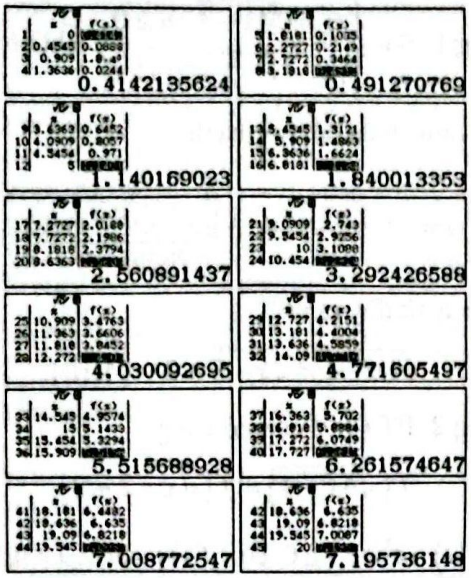
Kiểm tra lại bộ số $(x;y)=\left\{(2;2);\left(\dfrac{34}{9};\dfrac{34}{9}\right)\right\}$ vào hệ PT$\left(4^*\right)$ thấy thỏa mãn.

Kết luận: HPT$\left(4^*\right)$ có hai nghiệm là

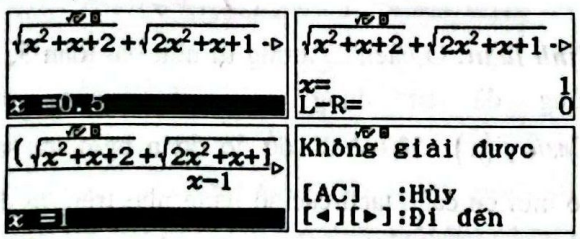
$$(x;y)\in\left\{(2;2);\left(\frac{34}{9};\frac{34}{9}\right)\right\}.$$

***Bình luận*:** Ở cách 2, tương tự như bài toán 3, ta cũng đã sử dụng máy tính cầm tay *Casio* $f(x)-580VNX$ để dò đoán nghiệm, sau đó mới có cách tách các số hạng như trên, ta đặt vế trái PT(4.3) là $f(k)$, cùng chức năng bảng **TABLE** ta tính 45 giá trị, tính từ giá trị $x=0$ (đổi vai trò ẩn k bây giờ là ẩn x) trên khoảng $(0;+\infty)$, thu được kết quả hiển thị trên màn hình như sau:

Được quét bằng CamScanner



Dựa vào bảng tính, $f(x)$ không đổi dấu với 45 giá trị tính trên bảng, tức đồ thị hàm số $f(x)$ không cắt trục hoành (trên 45 giá trị đầu), mà gần như xấp xỉ bằng 0 từ thứ tự 0 đến 12 của x và tăng dần đều đến thứ tự 45, qua đó ta có nhận định tại giá trị x_0 thuộc $[0;1]$ đồ thị hàm số $f(x)$ có xu hướng tiếp xúc với trục hoành tại điểm x_0 (khả năng có nghiệm bội), dùng chức năng **SOLVE (SHIFT CALC)** để tìm nghiệm x_0 của PT(4.3) trên đoạn $[0;1]$, với giá trị "*khởi tạo*" chẳng hạn tại $x=0.5$ (vì giá trị này gần với nghiệm x_0), tìm được $x_0=1$, tiếp tục tìm các nghiệm còn lại bằng cách chia $f(x)$ cho $(x-1)$ và ấn **SHIFT CALC** chờ máy giải thì kết quả màn hình hiển thị "*không giải được*".



PT(4.3) chỉ có nghiệm $x_0=1$ và có thể là nghiệm bội hai, ta tách nhân tử cho từng căn thức theo công thức sau:

$$\begin{cases} f(x_0)=ax_0+b \\ f'(x_0)=a \end{cases}, x_0=1; a,b\in\mathbb{R},\ a,\ b \text{ là ẩn số cần tìm.}$$

Với $f(x)$ lần lượt là $\sqrt{k^2+k+2}$ và $\sqrt{2k^2+k+1}$, thực hiện cách tìm a,b hai lần khi đó ta có cách tách các số hạng như ở cách 2.

Bài toán 5 (Bài T6/496, TH&TT). *Giải hệ phương trình*

$$(5^*)\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{xyz} & (5.1) \\ x+y+z=xyz+\dfrac{8}{27}(x+y+z)^3 & (5.2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $\begin{cases} x\neq 0 \\ y\neq 0 \\ z\neq 0 \end{cases}$. Giả sử có $\begin{cases} y=kx \\ z=lx \end{cases}$, từ ĐK ta có $k,l\neq 0$, với k, l là ẩn số phụ, dễ thấy các biến số thỏa mãn NX2$-(2.i)$ nên ta có thể đặt:

$(5^*1):\begin{cases} y=kx \\ z=lx \end{cases}; k,l\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và thay vào PT(5.1), PT(5.2), biến đổi và thu gọn, ta được:

$$\begin{cases} x^2=\dfrac{1}{kl+k+l},\ kl+k+l>0 \\ x^2\left[kl+\dfrac{8}{27}(1+k+l)^3\right]=1+k+l \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(5^*2):\begin{cases} kl+k+l>0 \\ 27kl+8(1+k+l)^3=27(1+k+l)(kl+k+l) \end{cases}$$

Tiếp tục đặt $\begin{cases} S=k+l \\ P=kl \end{cases}$ ta có hệ (5^*2) trở thành

$$\begin{cases} S+P>0 \\ 27P+8(1+S)^3=27(1+S)(P+S) \quad (5.3)^* \end{cases}$$

Ta có điều kiện để PT(5.3) có nghiệm là

$$(5^*3):\begin{cases} S^2-4P\geq 0\ (5.4) \\ S+P>0\ (5.5) \end{cases}.$$

Thu gọn PT(5.3) ta được PT tương đương:

$$27SP=8S^3-3S^2-3S+8\ (5.6).$$

Ta xét các khả năng của PT(5.6) như sau:

TH1. Xét $S=0$, rõ ràng PT(5.6) không thỏa mãn.

Được quét bằng CamScanner

TH2. Xét $S \neq 0$, ta chia hai vế PT(5.6) cho $27S$, ta được: $P = \dfrac{8S^3 - 3S^2 - 3S + 8}{27S}$

$$= \frac{(S+1)\left(8\left(S - \frac{11}{16}\right)^2 + \frac{135}{32}\right)}{27S} \quad (5.7).$$

Từ PT(5.7) ta xét:

• Nếu $S > 0$ thì $P > 0$ khi đó $S + P > 0$ thỏa mãn ĐK(5.5), ta thay P bởi vế phải PT(5.7) vào ĐK(5.4) kết hợp $S > 0$ ta có:

$$\begin{cases} S > 0 \\ S^2 - 4P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S > 0 \\ S^2 - 4.\dfrac{8S^3 - 3S^2 - 3S + 8}{27S} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S > 0 \\ \dfrac{-(S-2)^2(5S+8)}{27S} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow S = 2.$$

Thay $S = 2$ vào vế phải PT(5.7) tính được $P = 1$, khi đó $\begin{cases} S = k + l = 2 \\ P = kl = 1 \end{cases} \Leftrightarrow k = l = 1$, kết hợp với (5^*1) ta có $\begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases}$, thay vào (5.1) ta được:

$$\frac{3}{x} = \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

• Nếu $S = -1$ thì $P = 0$ khi đó:

$$\begin{cases} S = k + l = -1 \\ P = kl = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ l = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} k = 0 \\ l = -1 \end{cases}$$

(không thỏa mãn ĐK nên loại).

• Nếu $-1 < S < 0$ thì $P < 0$, khi đó rõ ràng $S + P < 0$ không thỏa mãn ĐK(5.5) nên loại.

• Nếu $S < -1$ thì $P > 0$, ta có 3 khả năng:

+ Nếu hệ (5^*3) có (5.4) thỏa mãn, (5.5) không thỏa mãn thì ta loại.

+ Nếu hệ (5^*3) có (5.5) thỏa mãn, (5.4) không thỏa mãn thì ta loại.

+ Nếu hệ (5^*3) thỏa mãn cả 2 ĐK (5.4) và (5.5), khi đó ta có lập luận:

$$S < -1 \Leftrightarrow 0 < S + P < -1 + P \Rightarrow P > 1 \quad (5.8).$$

Từ (5.4) ta có: $S^2 \geq 4P$ và $P > 0$, lấy căn bậc 2 hai vế của $S^2 \geq 4P$ được:

$$|S| \geq 2\sqrt{P} \Leftrightarrow \begin{cases} S \geq 2\sqrt{P} & (5.9) \\ S \leq -2\sqrt{P} & (5.10) \end{cases}.$$

- Xét trường hợp có (5.9) kết hợp với $S < -1$ ta có: $2\sqrt{P} \leq S < -1 \Leftrightarrow \sqrt{P} < -\dfrac{1}{2}$, mâu thuẫn với (5.8) nên loại.

- Xét trường hợp có (5.10) kết hợp với $S < -1$ ta có: $\begin{cases} S < -1 \\ S \leq -2\sqrt{P} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < -2\sqrt{P} \Leftrightarrow \sqrt{P} < \dfrac{1}{2}$, mâu thuẫn với (5.8) nên loại.

Kết luận: HPT(5^*) có hai nghiệm là

$$(x;y;z) \in \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right);\left(\frac{-1}{\sqrt{3}};\frac{-1}{\sqrt{3}};\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right\}.$$

2.2. Các bài toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN)

Trong mục này, ta giải bài toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức hai biến số, ba biến số, với các điều kiện ràng buộc cho trước, theo cách đặt ẩn phụ (trong chuyên đề này), ta có phương pháp sau:

Phương pháp chung: Dựa vào các ĐK của NX1 hoặc NX2 và biểu thức cần tìm GTLN, GTNN, kết hợp ĐK ràng buộc, ta đặt ẩn phụ sao cho phù hợp, lưu ý rằng cần xác định miền xác định của ẩn số phụ thật chính xác, lúc đó quy bài toán hai biến, ba biến về khảo sát bài toán tìm GTLN, GTNN của hàm một biến số trên một đoạn, một khoảng quen thuộc trong sách giáo khoa Toán 12 hoặc có thể tìm GTLN, GTNN bằng các BĐT cổ điển như BĐT Cauchy, Bunyakovsky, … với lưu ý rằng cần đoán được dấu "=" trong từng bài toán, khi đó ta mới vận dụng được.

Bài toán 6 (Bài T9/544, TH&TT). *Cho các số thực dương x, y. Xác định giá trị lớn nhất của biểu thức* $A = \dfrac{xy}{\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2}$.

Được quét bằng CamScanner

Lời giải. Giả sử có $x = ky$, và với x, y là các số thực dương thì $k > 0$, với k là ẩn số phụ, khi đó các biến số thỏa mãn NX1 $-(1.i)$ nên ta có thể đặt $x = ky, k > 0$, thay vào biểu thức A để được:

$$A = \frac{(ky).y}{\left(ky + \sqrt{(ky)^2 + y^2}\right)^2} \overset{y>0}{=} \frac{k}{\left(k + \sqrt{k^2+1}\right)^2} := f(k) \ (6.1).$$

Ta có: $\begin{cases} k + \sqrt{k^2+1} > 0, \forall k > 0 \\ \left(k + \sqrt{k^2+1}\right)\left(k - \sqrt{k^2+1}\right) = k^2 - \left(k^2+1\right) = -1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{k + \sqrt{k^2+1}} = \sqrt{k^2+1} - k \quad (6.2).$$

Từ (6.2), ta biến đổi hàm số $f(k)$ trở thành:

$$f(k) = k\left(\sqrt{k^2+1} - k\right)^2 = 2k^3 + k - 2k^2\sqrt{k^2+1}$$

Khi đó, lấy đạo hàm cấp 1 và đạo hàm cấp 2 hàm số $f(k)$ và thu gọn, nhận được:

$$f'(k) = 6k^2 + 1 - \frac{6k^3 + 4k}{\sqrt{k^2+1}};$$

$$f''(k) = 12k - \frac{12k^4 + 18k^2 + 4}{\left(\sqrt{k^2+1}\right)^3}.$$

Ta có: $f'(k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ \left(6k^2+1\right)^2\left(k^2+1\right) = \left(6k^3+4k\right)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ 3k^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow k_0 = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{9}; f(0) = 0; \lim_{k\to+\infty} f(k) = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{\left(k + \sqrt{k^2+1}\right)^2}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{k}}{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}\right)^2} = 0.$$

Lại có $f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} < 0$, do đó $k_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ là điểm cực đại của hàm số $f(k)$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Ta có bảng biến thiên hàm số $f(k)$ trên khoảng $(0;+\infty)$

k	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(k)$		$+$	0	$-$	
$f(k)$	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{9}$	↘	0

Từ bảng biến thiên và (6.1) ta thấy:

$$\max_{x>0;y>0} A = \max_{k\in(0;+\infty)} f(k) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

với $k = \frac{1}{\sqrt{3}} \overset{x=ky}{\Rightarrow} x = \frac{1}{\sqrt{3}}y.$

Kết luận: $\max A = \frac{\sqrt{3}}{9}$ tại $(x;y) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}y; y\right); y \in \mathbb{R}^+.$

Bình luận. Ta nhắc lại định lí sau: *Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục tới cấp hai tại điểm x_0 và $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$ thì x_0 là điểm dừng của hàm số $y = f(x)$. Hơn nữa:*

Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0. Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0.

Định lí này giúp ta khẳng định được x_0 là điểm cực đại hay điểm cực tiểu khi không xét dấu được $f'(x)$ hoặc giúp cho lời giải bài toán được chặt chẽ hơn. Nếu giả thiết bài toán 6 được thay bởi x, y là hai số thực không âm và không đồng thời bằng 0, với lưu ý cần xét khả năng NX1 $-(1.ii)$ trước khi đặt ẩn số phụ thì khi đó ta còn tìm được GTNN của biểu thức A bằng 0 đạt được tại

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y_0 = 0 \\ x_0 > 0 \end{cases}.$$

Bài toán 7 (Bài T9/514, TH&TT). *Cho các số thực dương x, y thỏa mãn*

$$(7^*) \begin{cases} x < \sqrt{2}y & (7.1) \\ x\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{2}} = 2\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}} + x & (7.2) \end{cases}.$$

Tìm GTNN của biểu thức $B = x^2\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{2}}$.

Được quét bằng CamScanner

Lời giải. Giả sử có $x = ky$, và với x, y là các số thực dương thì $k > 0$, với k là ẩn số phụ, khi đó các biến số thỏa mãn NX1 – (1.*i*) nên ta có thể đặt $y = kx, k > 0$ thay vào giả thiết (7^*) và biểu thức B, biến đổi, nhận được:

$$\begin{cases} x < \sqrt{2}(kx), x > 0 \\ x\sqrt{(kx)^2 - \dfrac{x^2}{2}} = 2\sqrt{(kx)^2 - \dfrac{x^2}{4}} + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > \dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad (7.3) \\ x = \dfrac{2\sqrt{k^2 - \dfrac{1}{4}} + 1}{\sqrt{k^2 - \dfrac{1}{2}}} \quad (7.4) \end{cases}.$$

Biến đổi biểu thức B kết hợp cùng (7.3) và (7.4), ta có: $B = x^2\sqrt{(kx)^2 - \dfrac{x^2}{2}} \overset{x>0}{=} x^3\sqrt{k^2 - \dfrac{1}{2}}$

$$\overset{(7.4)}{=} \left(\frac{2\sqrt{k^2 - \frac{1}{4}} + 1}{\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}}\right)^3 \times \sqrt{k^2 - \frac{1}{2}} \overset{(7.3)}{=} \frac{\left(2\sqrt{k^2 - \frac{1}{4}} + 1\right)^3}{k^2 - \frac{1}{2}}.$$

Lại đặt $t = \sqrt{k^2 - \dfrac{1}{4}}$ với $k > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ thì $t > \dfrac{1}{2}$. Vì vậy, biểu thức B tiếp tục được biến đổi trở thành:

$$B = \frac{4(2t+1)^3}{4t^2 - 1} \overset{t>\frac{1}{2}}{=} \frac{4(2t+1)^2}{2t-1}$$

$$= 4\left[(2t-1) + \frac{4}{(2t-1)} + 4\right].$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$B \overset{\text{BĐT Cauchy}}{\geq} 4 \times \left[2\sqrt{(2t-1) \times \frac{4}{(2t-1)}} + 4\right]$$

$$= 4 \times (2.2 + 4) = 32.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} t > \dfrac{1}{2} \\ 2t - 1 = \dfrac{4}{2t-1} \end{cases} \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{2}$,

kết hợp với $\begin{cases} t = \sqrt{k^2 - \dfrac{1}{4}} \\ k > \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ tìm được $k = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$,

tiếp tục sử dụng (7.4) và $y = kx$, ta tìm được:

$$x = 2\sqrt{2}, y = 2\sqrt{5}.$$

Kết luận: $\min B = 32$ khi $(x; y) = \left(2\sqrt{2}; 2\sqrt{5}\right)$.

Bình luận: Không sử dụng BĐT Cauchy, ta vẫn có thể lập BBT như bài toán 6 để giải, trong đó ta cần lưu ý với $t > \dfrac{1}{2}$ thì $B'(t) = \dfrac{8(4t^2 - 4t - 3)}{(2t-1)^2}$;

$B'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{2}$, khi đó $B'(t)$ đổi dấu từ "–" sang "+" khi qua giá trị $t = \dfrac{3}{2}$ kết hợp $\lim\limits_{t \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} \dfrac{4(2t+1)^2}{2t-1} = +\infty$ và $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{4(2t+1)^2}{2t-1} = +\infty$ bài toán mới được khảo sát đúng.

Bài toán 8 (Câu V, Đề tuyển sinh ĐH, khối A, năm 2009). *Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn $x(x + y + z) = 3yz$ (8.1)*

ta có: $C = (x+y)^3 + (x+z)^3$

$$+3(x+y)(y+z)(z+x) - 5(y+z)^3 \leq 0.$$

Lời giải. Giả sử có $\begin{cases} y = kx \\ z = lx \end{cases}$, và với x, y, z là các số thực dương thì $k, l > 0$, với k, l là các ẩn số phụ, khi đó các biến số thỏa mãn NX2 – (2.*i*) nên ta đặt: $(8^*1)\begin{cases} y = kx \\ z = lx \end{cases}; k, l > 0$, thay vào (8.1), ta được:

$$x(x + kx + lx) = 3(kx)(lx) \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 1 + k + l = 3kl \quad (8.2).$$

Áp dụng BĐT Cauchy, kết hợp cùng (8.2) ta có:

$$3kl = 1 + k + l \geq 2\sqrt{kl} + 1$$

$$\Rightarrow 3\left(\sqrt{kl}\right)^2 - 2\sqrt{kl} - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{kl} \geq 1 \Leftrightarrow kl \geq 1 \quad (8.3) \\ \sqrt{kl} \leq -\dfrac{1}{3} \text{ (không tồn tại } kl) \end{cases}.$$

Tiếp tục thay (8^*1) vào BĐT $C \leq 0$, ta có:

$$C = (x+kx)^3 + (x+lx)^3 + 3(x+kx)(kx+lx)(lx+x)$$

$$-5(kx+lx)^3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow C = x^3(1+k)^3 + x^3(1+l)^3$$

$$+3x^3(1+k)(k+l)(l+1) - 5x^3(k+l)^3 \leq 0 \quad (8.4).$$

Được quét bằng CamScanner

Vì x,k,l là các số dương, nên ta chia hai vế BĐT (8.4) cho $(k+l)^3>0$ và đơn giản cho $x^3>0$, tiếp tục sử dụng hằng đẳng thức

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ và (8.2) ta có:

$$C(k;l)=\left(\frac{1+k}{k+l}\right)^3+\left(\frac{1+l}{k+l}\right)^3+3\left(\frac{1+k}{k+l}\right)\left(\frac{1+l}{k+l}\right)-5\le 0$$

$$\Leftrightarrow C(k;l)=\left(\frac{2+k+l}{k+l}\right)^3-6\times\frac{1+k+l+kl}{(k+l)^3}-5\le 0$$

$$\overset{(8.2)}{\Leftrightarrow} C(k;l)=\left(\frac{1+3kl}{3kl-1}\right)^3-\frac{24kl}{(3kl-1)^3}-5\le 0 \quad (8.5).$$

Ta đặt $t=kl$, khi đó từ BĐT(8.3) và BĐT(8.5), ta có: $f(t):=\left(\frac{1+3t}{3t-1}\right)^3-\frac{24t}{(3t-1)^3}-5; t\ge 1.$

Ta có: $f'(t)=3.\frac{-6}{(3t-1)^2}.\left(\frac{3t+1}{3t-1}\right)^2$

$$-24.\frac{(3t-1)^3-(3t).3.(3t-1)^2}{(3t-1)^6}$$

$$\overset{t\ge 1}{=}\frac{-162t^2+36t+6}{(3t-1)^4}\overset{t\ge 1}{=}\frac{-6(9t+1)}{(3t-1)^3}<0,\forall t\in[1;+\infty).$$

Suy ra $f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $[1;+\infty)$.

Do đó, với $t\ge 1$ thì

$f(t)\le f(1)=0$ hay $\max\limits_{t\in[1;+\infty)} f(t)=f(1)=0$ (8.6).

Từ (8.6) rõ ràng ta đã chứng minh được BĐT (8.5) tức BĐT $C\le 0$ đã được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra ở BĐT $C\le 0$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} t=kl=1 \\ 1+k+l=3kl \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} k+l=2 \\ kl=1 \end{cases}\Leftrightarrow k=l=1$$

$$\overset{(8^*1)}{\Rightarrow} x=y=z>0.$$

Bài toán 9 (Bài T9/483, TH&TT). *Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện*

$$x^2+y^2-2z^2+2xy+yz+zx\le 0 \quad (9.1).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$D=\frac{x^4+y^4}{z^4}+\frac{y^4+z^4}{x^4}+\frac{z^4+x^4}{y^4}.$$

Lời giải. Ta có với $x,y,z>0$ thì :

$$(9.1)\Leftrightarrow (x+y)^2-z(x+y)+2z(y+x)-2z^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x+y-z)+2z(y+x-z)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+2z)(x+y-z)\le 0\Leftrightarrow x+y\le z \ (9.2).$$

Giả sử có $\begin{cases} x=kz \\ y=lz \end{cases}$, và với x,y,z là các số thực dương thì $k,l>0$, với k, l là các ẩn số phụ, khi đó các biến số thỏa mãn NX2$-(2.i)$ nên ta có thể đặt: $(9^*)\begin{cases} 0<x=kz \\ 0<y=lz \end{cases}; k,l>0.$

Thay hệ (9^*) vào BĐT(9.2) ta được:

$$0<kz+lz\le z\overset{z>0}{\Rightarrow}0<k+l\le 1 \quad (9.3).$$

Thay hệ (9^*) vào biểu thức D và rút gọn, ta được: $D(k;l)=\underbrace{(k^4+l^4)}_{D_1(k;l)}+\underbrace{\left(\frac{1}{k^4}+\frac{1}{l^4}\right)}_{D_2(k;l)}+\underbrace{\left(\frac{l^4}{k^4}+\frac{k^4}{l^4}\right)}_{D_3(k;l)}.$

Theo BĐT Cauchy ta có:

$$D_3(k;l)=\frac{l^4}{k^4}+\frac{k^4}{l^4}\ge 2\sqrt{\frac{l^4}{k^4}\times\frac{k^4}{l^4}}=2 \quad (9.4);$$

$$D_2(k;l)=\frac{1}{k^4}+\frac{1}{l^4}\ge\frac{2}{(kl)^2}\ge\frac{2}{\left[\left(\frac{k+l}{2}\right)^2\right]^2}=\frac{32}{(k+l)^4} \ (9.5);$$

$$D_1(k;l)=\left(k^4+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)+\left(l^4+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)-\frac{3}{8}$$

$$\ge 4\sqrt[4]{\frac{k^4}{16^3}}+4\sqrt[4]{\frac{l^4}{16^3}}-\frac{3}{8}=\frac{k+l}{2}-\frac{3}{8} \quad (9.6).$$

Cộng theo vế ba BĐT $(9.4),(9.5),(9.6)$ thu được:

$$D(k;l)=D_1(k;l)+D_2(k;l)+D_3(k;l)$$

$$\ge\left(\frac{k+l}{2}-\frac{3}{8}\right)+\frac{32}{(k+l)^4}+2$$

$$\Leftrightarrow D(k;l)\ge\frac{32}{(k+l)^4}+\frac{k+l}{2}+\frac{13}{8} \quad (9.7).$$

Đặt $t=k+l$, từ vế phải BĐT(9.7) và BĐT(9.3) ta có: $f(t):=\frac{32}{t^4}+\frac{t}{2}+\frac{13}{8}; 0<t\le 1$. Khi đó:

$$f'(t)=\frac{1}{2}-\frac{128}{t^5}\le-\frac{255}{2}<0,\forall t\in(0;1].$$

Suy ra $f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $(0;1]$, do

Được quét bằng CamScanner

đó: $\min\limits_{t\in(0;1]} f(t)=f(1)=\dfrac{273}{8}$ (9.8).

Suy ra $f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $(0;1]$, do đó: $\min\limits_{t\in(0;1]} f(t)=f(1)=\dfrac{273}{8}$ (9.8).

Từ (9.7) và (9.8), ta suy ra được $D(k;l)\overset{(9.7)}{\geq} f(t)\overset{(9.8)}{\geq}\dfrac{273}{8}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi đẳng thức ở (9.4),(9.5),(9.6),(9.7) và (9.8) cùng đồng thời xảy ra:

$$\begin{cases} k;l>0 \\ k^4=l^4=\dfrac{1}{16} \\ \dfrac{l^4}{k^4}=\dfrac{k^4}{l^4};\dfrac{1}{l^4}=\dfrac{1}{k^4};k=l \\ k+l=1 \end{cases} \Leftrightarrow k=l=\frac{1}{2}\overset{(9^*)}{\Rightarrow} x=y=\frac{z}{2}>0.$$

Kết luận: $\min D=\dfrac{273}{8}$ khi $x=y=\dfrac{z}{2}>0$.

Kết luận. Bài viết này là kết quả đúc kết từ kinh nghiệm giải toán mà tác giả học tập, rèn luyện kết hợp với niềm đam mê mà có được, hi vọng bài viết mang lại điều bổ ích cho người đọc và mong các bạn yêu toán tiếp tục mở rộng và khai thác hai nhận xét trên vào vận dụng các mảng toán khác, chúc các bạn thành công!

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. *Giải các HPT sau trên tập số thực* $\mathbb{R}$

a) $\begin{cases} 2x^2-6y^2=xy \\ 3x^2+2y=xy+x \end{cases}$ (*Trích đề thi vào lớp* 10, *THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình, 2022*)

b) $\begin{cases} x^3-y^3=37 \\ 4x^2-3y^2=16x-9y \end{cases}$ (*Trích đề thi vào lớp* 10, *THPT chuyên Bến Tre*, 2022)

c) $\begin{cases} 6y^2-4x^2=1 \\ x^3+xy^2+y=0 \end{cases}$ (*Trích đề thi HSG lớp* 11, *tỉnh Vĩnh Phúc*, 2021)

d) $\begin{cases} 3x^3-y^3=\dfrac{1}{x+y} \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ (*Bài* T4/344, TH&TT)

e) $\begin{cases} 5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0 \\ xy(x^2+y^2)+2=(x+y)^2 \end{cases}$ (*Câu II.2, đề tuyển sinh ĐH, khối A, năm* 2011)

f) $\begin{cases} x^3+y^3=xy\sqrt{2(x^2+y^2)} \\ 4\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=9(y-1)\sqrt{2x-2} \end{cases}$ (*Câu 8, đề số 2, đề khởi động trước kì thi THPTQG, 2015*)

g) $\begin{cases} x^3+y^3+7(x+y)xy=8xy\sqrt{2(x^2+y^2)} \\ \sqrt{2x-2}-\sqrt{6y-9}=16x^2-48y+35 \end{cases}$ (*Bài tập tự luyện, TH&TT số 477*)

2. *Tìm GTLN, GTNN*

a) Cho x và y là hai số dương. Tìm GTNN của biểu thức $A=\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}{xy^2}$

b) Cho x là số dương và y là số thực. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức

$$B=\frac{xy^2}{\left(x^2+3y^2\right)\left(x+\sqrt{x^2+12y^2}\right)}.$$

c) Cho x và y là các số thực thỏa mãn $x^2+xy+y^2=1$. Tìm GTNN, GTLN của biểu thức: $C=x^2-xy+y^2$.

d) Cho hai số thực x, y khác 0 thay đổi và thỏa mãn $(x+y)xy=x^2+y^2-xy$. Tìm GTLN của biểu thức: $D=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}$.

(*Câu IV.2, đề tuyển sinh ĐH-CĐ khối A, năm 2006*)

e) Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa mãn $x^2+y^2=1$. Tìm GTNN, GTLN của biểu thức:

$$E=\frac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2}.$$

f) Cho hai số thực dương thay đổi x,y thỏa mãn $3x+y\leq 1$. Tìm GTNN của $F=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$

g) Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{16}{x+y+z}$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$G=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}.$$ (*Bài T9/484, TH&TT*)

Được quét bằng CamScanner

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 112

PROBLEM. *Compute the sum to infinity*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \cos(n\pi).$$

Solution. We have

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \cos(n\pi) = 1-\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2 - -\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^4+\ldots$$

This is the sum to infinity of a geometric progression with the common ratio $r=-\frac{3}{4}$.

Hence $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \cos(n\pi) = \frac{1}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{4}{7}$.

TỪ VỰNG

sum to infinity : *tổng tới vô hạn (tổng của CSN lùi vô hạn)*

geometric progression : *cấp số nhân (CSN)*

common ratio : *công bội*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 110

BÀI TOÁN. *Một thầy giáo có 12 món quà, trong đó có 4 món quà loại I và 8 món quà loại II. Thầy giáo đặt quà vào 12 cái hộp giống hệt nhau, sau đó gói lại theo cách giống hệt nhau. Thầy chọn ngẫu nhiên các hộp trong chúng rồi đưa cho 3 em học sinh, mỗi em sẽ nhận được 4 hộp quà. Tính xác suất để mỗi học sinh nhận được cả quà loại I và quà loại II.*

Lời giải. Số cách mà mỗi học sinh nhận được 4 hộp quà là $C_{12}^4 \times C_8^4$.

Kí hiệu 3 học sinh được nhận quà là *A*, *B*, *C*. Có 3 trường hợp thoả mãn yêu cầu: ba học sinh nhận được quà loại *I* như sau:

(1, 1, 2), (1, 2, 1), và (2, 1, 1).

Trường hợp (1, 1, 2) nghĩa là *A* nhận được 1 hộp quà loại *I*, *B* nhận được 1 hộp quà loại *I* và *C* nhận được 2 hộp quà loại *I*.

Trong trường hợp (1, 1, 2) thì số cách chọn là:

$$\left(C_4^1 \times C_8^3\right) \times \left(C_3^1 \times C_5^3\right).$$

Trong trường hợp (1, 2, 1) thì số cách chọn là:

$$\left(C_4^1 \times C_8^3\right) \times \left(C_3^2 \times C_5^2\right).$$

Trong trường hợp (2, 1, 1) thì số cách chọn là:

$$\left(C_4^2 \times C_8^2\right) \times \left(C_2^1 \times C_6^3\right).$$

Do đó xác suất cần tìm là:

$$\frac{\left(C_4^1 \times C_8^3\right) \times \left(C_3^1 \times C_5^3\right)}{C_{12}^4 \times C_8^4.} + \frac{\left(C_4^1 \times C_8^3\right) \times \left(C_3^2 \times C_5^2\right)}{C_{12}^4 \times C_8^4.} + \frac{\left(C_4^2 \times C_8^2\right) \times \left(C_2^1 \times C_6^3\right)}{C_{12}^4 \times C_8^4.}$$

nó bằng $\frac{32}{55}$.

Lưu ý: Bài tập này được sưu tầm, chuyển thể và dịch từ đề thi mẫu HAS tháng 8 năm 2024 (Đại học Quốc gia Hà Nội, Việt Nam) và đã đăng trên TH&TT số 570, tháng 12 năm 2024. Số này chúng tôi đưa thêm một cách giải khác cho bài tập này.

Nhận xét. Rất tiếc kỳ này không có bạn nào gửi bài dịch về Toà soạn cả.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

Được quét bằng CamScanner

PROBLEMS ... (Tiếp theo trang 19)

Problem T7/571. Let x and y be positive real numbers satisfying

$$3x^2+4y^2+4xy-9x-10y+8=0.$$

Find the minimum value of the expression

$$P=\frac{7x+11y+13}{2x+3y+5}.$$

Problem T8/571. Given a pyramid $O.ABC$ with OBC is an equilateral triangle of side a, $OA\perp(OBC), OA=a$. Let I be the midpoint of BC, and M a variable point on the line segment AI. Let d_1, d_2, d_3 be the distances from M to the lines OA, OB, OC respectively. Find the smallest value of $T=3d_1^2+2d_2^2+2d_3^2$ in terms of a.

Problem T9/571. Solve the equation

$$\sqrt{8x^2-3x+2025}-\sqrt{27x^2-2x+2025}+\sqrt{26x^2-3x+2025}=\sqrt{7x^2-4x+2025}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/571. Given a polynomial with real coefficients $f(x)=3x^4-7x^3+ax^2+bx+c$ that has four real roots in the interval $(0;2)$. Prove that

$$(2a+b-14)^2+(b+c+2)^2\ge 9.\left(\frac{13}{12}\right)^8.$$

Problem T11/571. Find all continuous functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ that satisfy the condition

$$f(x)=f\left(\frac{x^2+6x-2}{4}\right)-x^2-2x+2$$

for every $x\in\mathbb{R}$.

Problem T12/571. Given triangle ABC inscribed in a circle ω and with the orthocenter H. Assume that MN and PQ are two chords of ω which are perpendicular to each other at S. Let K be the intersection between the Simson lines of ABC corresponding to M, N. Let L be the intersection between the Simson lines of ABC corresponding to P, Q. Prove that $HKSL$ is a parallelogram.

NGUYEN PHU HOANG LAN
(University of Education, VNU, Hanoi)

****

SAI LẦM ... (Tiếp theo trang 47)

Từ đó suy ra đạo hàm cấp một có tối đa một nghiệm. Hơn nữa

$$f'(0)=-2012; f'(1)=\frac{2025}{2}$$
$$\Rightarrow f'(0)f'(1)<0.$$

Do đó tồn tại duy nhất $a\in(0;1)$ để $f'(a)=0$.

Ta có bảng biến thiên:

t	0		a		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	1	↘	$f(a)$	↗	1

Do đó phương trình đã cho có nghiệm

$$\begin{bmatrix}t=0\\t=1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\sin^2 x=0\\\sin^2 x=1\end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\sin^2 x=0\\\cos^2 x=0\end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \sin 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S=\left\{\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Cả lớp ôn tập đều cho rằng lời giải của Hùng là tốt, không sai sót chỗ nào. Theo em, em có tìm ra điểm sai nào không?

TRẦN MINH VŨ
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Gia Lai)

Được quét bằng CamScanner



BÀI TOÁN 91. *Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x+y\neq 0$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$x^2+y^2+\left(\frac{xy+1}{x+y}\right)^2\geq 2$$

Lời giải. ***Cách 1.*** *Phương pháp biến đổi tương đương.*

BĐT đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)(x+y)^2+(xy+1)^2\geq 2(x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[(x+y)^2-2xy\right](x+y)^2-2(x+y)^2+(xy+1)^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^4-2(x+y)^2(1+xy)+(1+xy)^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(x+y)^2-(1+xy)\right]^2\geq 0$$

(BĐT cuối luôn đúng).

Vậy $x^2+y^2+\left(\frac{xy+1}{x+y}\right)^2\geq 2.$

Cách 2. *Phương pháp biến đổi tương đương.*

BĐT đã cho tương đương với

$$x^2+y^2+\left(\frac{xy+1}{x+y}\right)^2-2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2-2xy+\left(\frac{xy+1}{x+y}\right)^2-2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2-2(xy+1)+\left(\frac{xy+1}{x+y}\right)^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2-2(x+y)\frac{xy+1}{x+y}+\left(\frac{xy+1}{x+y}\right)^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+y-\frac{xy+1}{x+y}\right)^2\geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy $x^2+y^2+\left(\frac{xy+1}{x+y}\right)^2\geq 2$

Cách 3. *Sử dụng phương pháp đổi biến.*

Đặt $z=-\frac{xy+1}{x+y}\Rightarrow xz+yz=-xy-1$

$$\Rightarrow xy+yz+zx=-1.$$

Khi đó BĐT đã cho trở thành: $x^2+y^2+z^2\geq 2.$

Ta có:

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$$

$$=(x+y+z)^2-2(-1)$$

$$=(x+y+z)^2+2\geq 2$$

Do đó $x^2+y^2+z^2\geq 2.$

Vậy $x^2+y^2+\left(\frac{xy+1}{x+y}\right)^2\geq 2.$

Cách 4. *Sử dụng bất đẳng thức Cauchy.*

BĐT đã cho tương đương với

$$(x+y)^2-2xy+\frac{(xy+1)^2}{(x+y)^2}\geq 2$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2+\frac{(xy+1)^2}{(x+y)^2}\geq 2(xy+1).$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$(x+y)^2+\frac{(xy+1)^2}{(x+y)^2}\geq 2\sqrt{(x+y)^2\frac{(xy+1)^2}{(x+y)^2}}$$

$$=2|xy+1|\geq 2(xy+1).$$

Vậy $x^2+y^2+\left(\frac{xy+1}{x+y}\right)^2\geq 2.$

Cách 5. *Dùng phương pháp đặt ẩn phụ.*

Đặt $\begin{cases}u=x+y\\ v=xy\end{cases}$. Khi đó BĐT đã cho trở thành

$$u^2-2v+\left(\frac{1+v}{u}\right)^2\geq 2$$

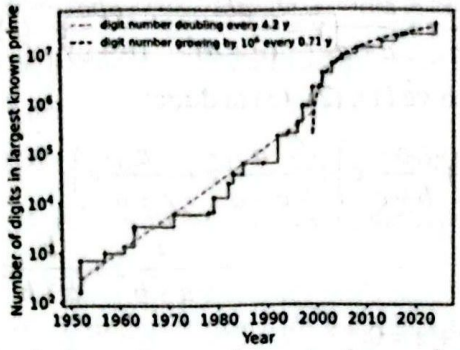
$$\Leftrightarrow \frac{u^4-2u^2v+(1+v)^2}{u^2}\geq 2$$

Được quét bằng CamScanner

BẠN CÓ BIẾT ?

SỐ NGUYÊN TỐ LỚN NHẤT

Số nguyên tố lớn nhất được biết đến là $2^{136.279.841} - 1$, một số có 41.024.320 chữ số khi viết theo hệ thập phân. Nó được tìm thấy vào ngày 12 tháng 10 năm 2024, trên một máy ảo dựa trên đám mây do *Luke Durant* tình nguyện cung cấp cho Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS).



Biểu đồ số chữ số trong số nguyên tố lớn nhất được biết đến theo năm, kể từ khi có máy tính điện tử. Thang đo theo chiều dọc là logarit.

Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1 và không có ước số nào khác ngoài 1 và chính nó. Theo định lý Euclid, có vô số số nguyên tố, do đó không có số nguyên tố lớn nhất.

Nhiều số nguyên tố lớn nhất được biết đến là số nguyên tố Mersenne, các số nhỏ hơn một lũy thừa của hai, vì chúng có thể sử dụng một phép thử nguyên tố chuyên biệt nhanh hơn phép thử chung.

Tính đến tháng 10 năm 2024, bảy số nguyên tố lớn nhất được biết đến là số nguyên tố Mersenne. Mười tám số nguyên tố kỷ lục cuối cùng là số nguyên tố Mersenne. Biểu diễn nhị phân của bất kỳ số nguyên tố Mersenne nào đều bao gồm tất cả các số 1, vì dạng nhị phân của $2^k - 1$ chỉ đơn giản là k số 1.

Việc tìm ra các số nguyên tố lớn hơn đôi khi được coi là phương tiện để mã hóa mạnh hơn, nhưng thực tế không phải vậy.

Kỷ lục hiện tại

Kỷ lục hiện đang được nắm giữ bởi $2^{136.279.841} - 1$ với 41.024.320 chữ số, được GIMPS tìm thấy vào ngày 12 tháng 10 năm 2024. 120 chữ số đầu tiên và cuối cùng của giá trị của nó là:

881694327503833265553939100378117358971207
354509066041067156
376412422630694756841441725990347723283108
837509739959776874 ...

(Bỏ qua 41.024.080 chữ số)

...

852806517931459412567957568284228288124096
109707961148305849
349766085764170715060409404509622104665555
076706219486871551

Tính đến tháng 10 năm 2024, số nguyên tố được phát hiện trước đó là $M_{82589933}$, có 24.862.048 chữ số, đã giữ kỷ lục trong gần 6 năm, lâu hơn bất kỳ số nguyên tố nào khác kể từ M_{19937} (giữ kỷ lục trong 7 năm từ 1971 đến 1978).

(*Theo Wiki pedia*)

****

☞ $\Leftrightarrow u^4 - 2u^2v + (1+v)^2 \geq 2u^2$

$\Leftrightarrow u^4 - 2u^2(v+1) + (1+v)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (u^2 - v - 1)^2 \geq 0$ (luôn đúng).

Vậy $x^2 + y^2 + \left(\dfrac{xy+1}{x+y}\right)^2 \geq 2$.

TRẦN VĂN HẠNH

(*GV Trường ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi*)

Nhận xét. Kỳ này các bạn *Đặng Sỹ Phước Đức*, 9A1, THCS Lê Văn Thiêm, **Hà Tĩnh** và bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** cũng đóng góp một số các giải tương tự như các cách mà bạn *Trần Văn Hạnh* đề xuất trong bài viết trên. Xin hoan nghênh hai bạn.

LÊ MAI (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 91 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 28/2/2025.

BÀI TOÁN 93. *Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và DD'; G, G' lần lượt là trọng tâm của các tứ diện $A'D'MN$ và $BCC'D'$. Chứng minh rằng GG' song song với mặt phẳng $(ABB'A')$.*

TRẦN ĐỨC PHƯƠNG

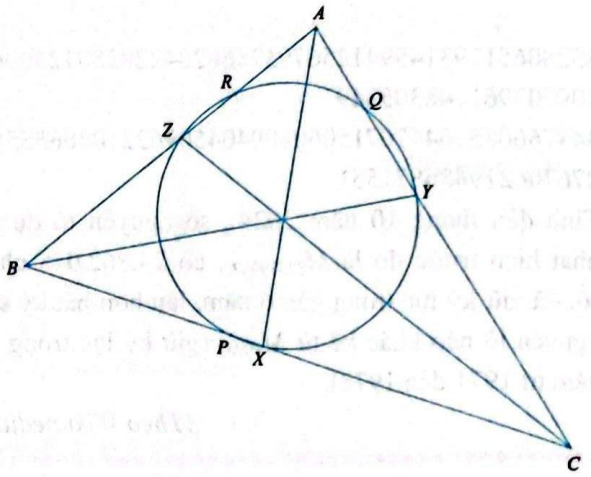
(*GV THPT Giao Thủy, Nam Định*)

Được quét bằng CamScanner



BÀI TOÁN 99 (Thi vô địch Quốc gia Hungari, 2000). *Gọi X, Y, Z là chân các đường phân giác của tam giác ABC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ cắt các cạnh AB, BC, CA và tạo thành ba đoạn thẳng. Chứng minh rằng cộng hai trong số ba độ dài của đoạn thẳng này thì bằng độ dài đoạn thẳng thứ ba.*

Lời giải.



Đặt $\overline{BC}=a, \overline{CA}=b, \overline{AB}=c, x=\overline{PX}, y=\overline{QY}$, $z=\overline{RZ}$ với a, b, c là các số dương. Theo tính chất đường phân giác ta có:

$$\overline{YA}=\frac{bc}{c+a}, \overline{AZ}=\frac{bc}{a+b}.$$

Từ đó: $\overline{QA}=\overline{YA}-\overline{YQ}=\frac{bc}{c+a}+y;$

$$\overline{AR}=\overline{AZ}-\overline{RZ}=\frac{bc}{a+b}-z.$$

Theo tính chất phương tích của A đối với đường tròn (XYZ) ta có:

$$\overline{AQ.AY}=\overline{AR.AZ}$$

$$\Leftrightarrow \frac{bc}{c+a}\left(\frac{bc}{c+a}+y\right)=\frac{bc}{a+b}\left(\frac{bc}{a+b}-z\right).$$

Khai triển và nhân hai vế với $\frac{a}{bc}$ ta được:

$$\frac{a}{c+a}y+\frac{a}{a+b}z=\frac{abc}{(a+b)^2}-\frac{abc}{(c+a)^2} \quad (1).$$

Tương tự ta cũng có:

$$\frac{b}{a+b}z+\frac{b}{b+c}x=\frac{abc}{(b+c)^2}-\frac{abc}{(a+b)^2} \quad (2).$$

$$\frac{c}{b+c}x+\frac{c}{c+a}y=\frac{abc}{(c+a)^2}-\frac{abc}{(b+c)^2} \quad (3).$$

Cộng theo vế (1), (2), (3) ta được:

$$\left(\frac{b}{b+c}x+\frac{c}{b+c}x\right)+\left(\frac{a}{c+a}y+\frac{c}{c+a}y\right)+\left(\frac{a}{a+b}z+\frac{b}{a+b}z\right)=0$$

$\Leftrightarrow x+y+z=0.$

Suy ra hai trong ba đại lượng x, y, z cùng dấu và trái dấu với đại lượng thứ ba. Từ đó tổng giá trị tuyệt đối của hai đại lượng đó bằng giá trị tuyệt đối của đại lượng thứ ba, vậy ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Rất tiếc là Tòa soạn không nhận được lời giải nào cho bài toán này.

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 28/2/2025.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

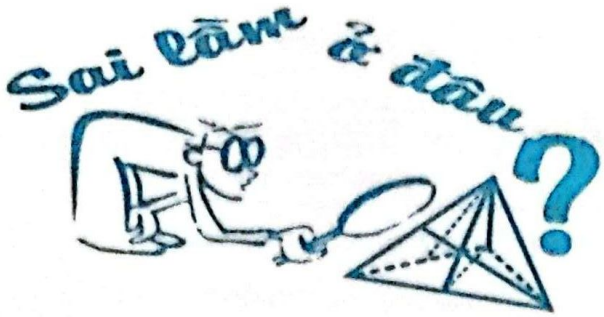
BÀI TOÁN 101. *Cho phương trình bậc ba*

$$x^3+\square x^2+\square x+\square=0.$$

Bạn F và bạn T chơi một trò chơi gồm ba lượt, ở mỗi lượt trước tiên bạn F chọn một số thực, sau đó bạn T điền số thực đó vào một trong ba ô trống trong phương trình. Sau ba lượt, trò chơi sẽ kết thúc. Bạn F sẽ là người chiến thắng nếu phương trình cuối có ba nghiệm nguyên phân biệt, nếu không thì bạn T là người chiến thắng. Theo em ai sẽ là người có chiến lược chiến thắng?

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

Được quét bằng CamScanner



GIẢI ĐÁP: SAI Ở ĐÂU NHỈ

(Đề đăng trên TH&TT số 567, tháng 9 năm 2024)

Phân tích sai lầm. *Lời giải của học sinh mắc phải hai lỗi sai*:

- Lời giải đã xét trường hợp $IJ = HJ + IH = 5\sqrt{3} + \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$, xét thiếu trường hợp: $IJ = HJ - IH = 5\sqrt{3} - \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.
- Trường hợp đã xét trong lời giải chưa loại điểm $J(-6;-8;-5)$. Với $J(-6;-8;-5)$ thì

$$JH = 7\sqrt{3} \Rightarrow JA = \sqrt{JH^2 + r^2} = \sqrt{147 + 6} = \sqrt{153} = 3\sqrt{17} > 9.$$

Lời giải đúng. Lời giải cần bổ sung trường hợp $IJ = HJ - IH = 5\sqrt{3} - \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ khi đó tìm được điểm $J(-4;-6;-3)$.

Có thể không xét hai trường hợp, bài toán được giải như sau:

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$, bán kính $R = 3$. Gọi H là tâm đường tròn (C).

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}(1;1;1)$. Đường thẳng IH đi qua $I(0;-2;1)$ nhận $\vec{n}(1;1;1)$ làm VTCP có phương trình: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{1}$.

Điểm $H = (P) \cap (IH) \Rightarrow H(t;-2+t;1+t) \in (P)$

$$\Leftrightarrow t + t - 2 + t + 1 - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(1;-1;2).$$

Ta có: $d = d(I;(P)) = \dfrac{|-2+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \sqrt{3}$.

Khi đó bán kính đường tròn (C) là:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{3^2 - 3} = \sqrt{6}.$$

$JH = \sqrt{R'^2 - r^2} = \sqrt{75}$; $J \in (IH) \Rightarrow J(m;-2+m;1+m)$

$\Rightarrow \overrightarrow{JH}(m-1;m-1;m-1)$.

Do đó: $JH^2 = 75 \Leftrightarrow 3(m-1)^2 = 75$

$$\Leftrightarrow m - 1 = \pm 5 \Rightarrow m = 6; -4$$

$\Rightarrow J_1(6;4;7); J_2(-4;-6;-3)$.

Phương trình các mặt cầu cần tìm là:

$$(x-6)^2 + (y-4)^2 + (z-7)^2 = 81;$$

$$(x+4)^2 + (y+6)^2 + (z+3)^2 = 81.$$

Nhận xét. Bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, tỉnh **Bình Định** đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng. Xin hoan nghênh bạn.

KIHIV

SAI Ở ĐÂU NHỈ ?



Trong một giờ ôn tập thi học sinh giỏi cấp tỉnh lớp 12 có bài tập sau.

BÀI TOÁN. *Giải phương trình lượng giác sau*

$$\cos^{2024} x + \sin^{2025} x = 1.$$

Bạn Hùng đã giải bài như sau:

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(1 - \sin^2 x\right)^{1012} + \left(\sin^2 x\right)^{\frac{2025}{2}} = 1.$$

Tới đây, đặt $t = \sin^2 x$; $t \in [0;1]$ và xét hàm số:

$$f(t) = (1-t)^{1012} + t^{\frac{2025}{2}}; \; t \in [0;1].$$

Ta có:

$$f'(t) = -1012(1-t)^{1011} + \frac{2025}{2} t^{\frac{2023}{2}};$$

$$f''(t) = 1012.1011(1-t)^{1010} + \frac{2025}{2}.\frac{2023}{2} t^{\frac{2021}{2}} > 0, \forall t.$$

(Xem tiếp theo trang 43)

Được quét bằng CamScanner

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 571 (1.2025)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142849, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
GS. ĐOÀN QUỲNH
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
NGUYỄN TIẾN THANH
Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam
PHẠM VĨNH THÁI
Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD
LÊ HỒNG SƠN

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập **: *TS.* TRẦN HỮU NAM**
Phó tổng biên tập **: *CN.* TRẦN THỊ KIM CƯƠNG**
Thư kí Tòa soạn **: *ThS.* HỒ QUANG VINH**
***TS.* LÊ HỒNG MAI**

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Cao Văn Dũng, Nguyễn Đức Hải – Phương pháp đếm bằng hai cách trong các bài toán tổ hợp ở THCS.

5 Hướng dẫn giải đề thi chọn HSG lớp 9 TP. Quảng Ngãi, năm học 2024 - 2025.

8 Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Hải Dương, năm học 2023 - 2024.

9 **Thử sức trước kỳ thi THPTQG** – Đề số 2.

12 **Diễn đàn dạy học toán**
Nguyễn Anh Tuấn – Chứng minh hai góc bằng nhau (*kỳ 1*).

18 **Đề ra kỳ này** *Problems in This Issue*
T1/571, ..., T12/571, L1/571, L2/571.

20 **Giải bài kì trước**
Solutions to Previous Problems
T1/567, ..., T12/567, L1/567, L2/567.

30 **Phương pháp giải toán**
Lê Huy - Một cách đặt ẩn phụ để giải hệ phương trình và bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trịn nhỏ nhất.

42 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 112 – Bài dịch số 110.

44 **Nhiều cách giải cho một bài toán** – Giải bài toán 91 – Đề bài toán 93.

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay** – Giải bài toán 99. Đề bài toán 101.

47 **Sai lầm ở đâu?**

Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

Được quét bằng CamScanner

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM PHỐI HỢP TẬP HUẤN GIÁO VIÊN NGƯỜI VIỆT Ở NƯỚC NGOÀI

Từ ngày 1/12/2024 đến 15/12/2024 tại Hà Nội, Uỷ ban Nhà nước về người Việt Nam ở nước ngoài (Bộ Ngoại giao) phối hợp với Trường Đại học Khoa học Xã hội và Nhân văn (Đại học Quốc gia Hà Nội) và Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (Bộ Giáo dục và Đào tạo) tổ chức khoá tập huấn giảng dạy tiếng Việt cho giáo viên người Việt Nam ở nước ngoài năm 2024. Khoá tập huấn năm nay có sự tham gia của 40 giáo viên và tình nguyện viên dạy tiếng Việt trở về từ 9 quốc gia trên thế giới.



Giảng viên Trung tâm Công nghệ giáo dục - NXBGDVN cùng các thầy cô giáo người Việt Nam ở nước ngoài

Bên cạnh toạ đàm "Chia sẻ phương pháp dạy tiếng Việt cho trẻ em ở nước ngoài" với diễn giả chính Tiến sĩ Nguyễn Thụy Anh, tác giả bộ sách "Chào tiếng Việt", trong ngày 5 và 6, các giảng viên của Trung tâm Công nghệ giáo dục - Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã tham gia tập huấn cho giáo viên với hai chủ đề: ***Cách dựng hình tượng văn*** và ***Kĩ năng tổ chức trò chơi trong giáo dục***. Đây là một hoạt động ý nghĩa nhằm hỗ trợ các giáo viên nâng cao nghiệp vụ sư phạm, qua đó lan toả tình yêu tiếng Việt và văn hoá Việt Nam đến thế hệ trẻ xa xứ.

Trong buổi tập huấn với chủ đề ***Cách dựng hình tượng văn***, các giáo viên đã được học cách hướng dẫn học sinh dựng hình tượng văn từ các thể loại như đồng dao, ca dao, thơ,... và chia nhóm thực hành giảng dạy tại lớp. Trong phần thực hành, các giáo viên đã tự mình tạo ra được nhiều bài đồng dao thú vị.

Với chủ đề ***Lí thuyết và thực hành tổ chức trò chơi trong giáo dục***, các giáo viên sẽ được hướng dẫn cách sử dụng trò chơi như một công cụ giáo dục hiệu quả, nhấn mạnh trò chơi trong giáo dục không chỉ có tác dụng khởi động, dẫn dắt vào hoạt động học, mà còn có nhiều ý nghĩa khi người dạy vận dụng đúng mục đích như: rèn luyện kĩ năng phản xạ, tư duy, vận động; gắn kết tinh thần đồng đội,...

Một nội dung rất thú vị của buổi học là các giáo viên chia nhóm, thực hành trò chơi ghép tranh, thuyết trình về các món ăn và địa danh nổi tiếng của Việt Nam như: hồ Hoàn Kiếm, vịnh Hạ Long, phở, bánh mì, bún đậu mắm tôm,...



Hoạt động teamwork giúp gắn kết các thầy cô trên khắp thế giới

Kết thúc chương trình, các giáo viên bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Đảng, Chính phủ vì đã tổ chức một khoá tập huấn ý nghĩa và bổ ích, góp phần mang lại trải nghiệm học tập tốt hơn cho học sinh, đồng thời truyền tải hiệu quả văn hoá và ngôn ngữ Việt Nam, thắt chặt mối quan hệ giữa các giáo viên người Việt trên toàn thế giới.

BAN TRUYỀN THÔNG
(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)

Được quét bằng CamScanner

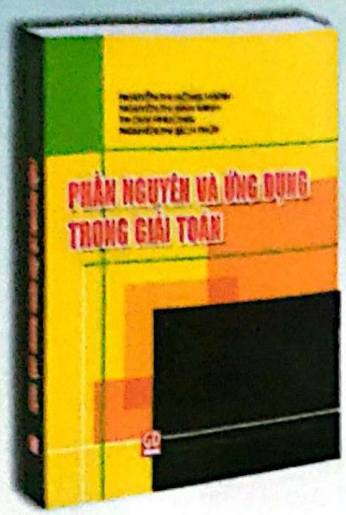
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới

PHẦN NGUYÊN VÀ ỨNG DỤNG TRONG GIẢI TOÁN

Tác giả: **Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Nguyễn Thị Bình Minh, Tạ Duy Phượng, Nguyễn Thị Bích Thủy**

Sách dày 303 trang, khổ 16 x 24cm, giá bìa 105.000 đồng.



Phần nguyên $[x]$ *của một số thực* x *là số nguyên lớn nhất không vượt quá* x. Do tính độc đáo không giống ai của hàm phần nguyên, thí dụ, hàm phần nguyên khá đơn giản: là hàm hằng từng khúc, nhưng cũng khá phức tạp: không liên tục tại các điểm nguyên với bước nhảy bằng 1, do đó khó sử dụng công cụ giải tích, vì vậy các bài tập về phần nguyên thường là khó.

Ngoài lí thuyết được trình bày chi tiết, bắt đầu từ Trung học Cơ sở, sách có nhiều bài toán thi học sinh giỏi cấp huyện, tỉnh, Quốc gia và Quốc tế liên quan đến phần nguyên.

Cuốn sách gồm năm chương.

Chương 1 tập hợp **những kiến thức cơ bản về phần nguyên**: Hàm phần nguyên và đồ thị hàm phần nguyên.

Chương 2 trình bày các bài toán **số học** liên quan đến **phần nguyên**: Toán chia hết, ứng dụng nhị thức Newton trong giải toán với phần nguyên,...

Chương 3 trình bày các dạng toán liên quan đến **phần nguyên trong đại số**: Tính giá trị của biểu thức chứa phần nguyên, chứng minh hệ thức chứa phần nguyên và đặc biệt, phân loại chi tiết và khá đầy đủ về các dạng phương trình chứa phần nguyên.

Chương 4 là các bài toán về **phần nguyên trong toán Giải tích**: Dãy số, chuỗi số, giới hạn của biểu thức có phần nguyên.

Chương 5 sơ lược trình bày một số vấn đề liên quan đến phần nguyên: phần nguyên và hệ đếm cơ số khác 10, phần nguyên và phương trình hàm, phần nguyên trong lí thuyết hàm thực.

Những kiến thức và bài tập trong sách là cơ sở để giải nhiều bài toán thi học sinh giỏi khác chưa được đưa vào sách. Ngoài ra, cuốn sách có thể giúp các thầy cô giáo trong việc thiết kế các bài tập và đề thi mới.

Cuốn sách không chỉ có ích cho các học sinh, các bạn yêu toán và các thầy cô dạy toán phổ thông, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho các sinh viên và giảng viên đại học, cao đẳng ngành toán, cũng như các phụ huynh mong muốn giúp con em mình học tốt môn toán.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC – DẠY NGHỀ

Địa chỉ: 187B, Giảng Võ, Hà Nội

Điện thoại: 024.39718437 - 0913031845

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT1M25
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2025

Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng

Được quét bằng CamScanner