TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 574
Tháng 4 - 2025
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 62 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com



Nhà toán học Áo **Otto Stolz** (1842 - 1905)

Cảnh đẹp vùng Innsbruck (Áo)

LỄ KÝ KẾT HỢP TÁC CHIẾN LƯỢC GIỮA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM VÀ VIETTEL SOLUTIONS

CHUYỂN ĐỔI SỐ TRONG LĨNH VỰC GIÁO DỤC

Chiều ngày 13/3/2025, tại Hà Nội, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) và Tổng Công ty Giải pháp Doanh nghiệp Viettel - Chi nhánh Tập đoàn Công nghiệp Viễn thông Quân đội (Viettel Solutions) đã chính thức ký kết thỏa thuận hợp tác chiến lược về chuyển đổi số và phát triển các giải pháp công nghệ giáo dục. Sự kiện đánh dấu bước tiến quan trọng trong việc ứng dụng công nghệ hiện đại vào lĩnh vực giáo dục, hướng tới mục tiêu nâng cao chất lượng dạy và học tại Việt Nam.

Buổi lễ diễn ra với sự tham dự của đại diện lãnh đạo hai bên cùng các chuyên gia công nghệ. Về phía NXBGDVN, đại diện có ông Nguyễn Tiến Thanh - Chủ tịch Hội đồng thành viên, Tổng Giám đốc. Về phía Viettel Solutions đại diện có ông Nguyễn Chí Thanh - Phó Tổng Giám đốc và đại diện các phòng, ban chuyên môn.

Theo thỏa thuận, NXBGDVN và Viettel Solutions sẽ cùng nhau phối hợp nghiên cứu khả năng xây dựng hệ sinh thái giáo dục số phục vụ công tác giảng dạy và học tập của học sinh, nhà giáo và nhà trường, phát triển các giải pháp công nghệ giáo dục tiên tiến hỗ trợ giảng dạy, học tập.

Ông Nguyễn Tiến Thanh - Chủ tịch Hội đồng thành viên, Tổng Giám đốc NXBGDVN, chia sẻ: "NXBGDVN với gần 70 năm trưởng thành và phát triển, là một doanh nghiệp có thương hiệu, uy tín trong lĩnh vực xuất bản đặc biệt là trong xuất bản sách giáo khoa. Đây là một lĩnh vực giáo dục có một ý nghĩa khác, vừa mang tính chất an sinh xã hội, liên quan đến từng gia đình, từng phụ huynh học sinh, từng ngôi trường, từng giáo viên... Chính vì vậy, khát vọng và tâm huyết của chúng tôi là làm thế nào để có những sản phẩm tốt nhất cho ngành giáo dục. Chúng tôi rất trăn trở trong câu chuyện chuyển đổi số bởi chuyển đổi số không những giúp quản trị vận hành hệ thống doanh nghiệp tốt hơn, tiếp cận và đưa ra những sản phẩm mới phục vụ thiết thực cho sự nghiệp giáo dục, vừa phục vụ tốt cho thầy cô giáo, phụ huynh và học sinh nhưng đồng thời cũng mang lại doanh thu cho doanh nghiệp".

Ông Nguyễn Chí Thanh - Phó Tổng Giám đốc Tổng Công ty Giải pháp Doanh nghiệp Viettel nhấn mạnh: "Hiện nay, nền giáo dục nước nhà đang có những bước chuyển mình mạnh mẽ, đòi hỏi ứng dụng công nghệ thông tin vào mọi mặt của lĩnh vực giáo dục. Đứng trước vận hội lớn, Viettel Solutions mong muốn được đồng hành cùng NXBGDVN xây dựng hệ sinh thái giáo dục toàn diện; đồng thời số hoá hệ thống sách giáo khoa, học liệu đồ sộ, góp phần xoá nhoà khoảng cách giáo dục giữa mọi vùng miền trên Tổ quốc".



Ông Nguyễn Tiến Thanh và ông Nguyễn Chí Thanh trao đổi văn bản thoả thuận hợp tác giữa hai đơn vị. Ảnh: Công Duy

Với sự hợp tác này, NXBGDVN tin rằng hệ thống quản lý giáo dục thông minh sẽ được triển khai, giúp các nhà trường quản lý hiệu quả hơn các hoạt động dạy và học, đồng thời cung cấp dữ liệu phân tích để nâng cao chất lượng giáo dục. Việc kết hợp giữa công nghệ hiện đại của Viettel Solutions và những giá trị truyền thống tốt đẹp trong giáo dục của NXBGDVN sẽ hoàn thiện một hệ sinh thái giáo dục thông minh, linh hoạt, hiệu quả.

BAN TRUYỀN THÔNG

(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)



ỨNG DỤNG MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

NGUYỄN VĂN BẢN
(GV THCS Thanh Yên, Điện Biên)

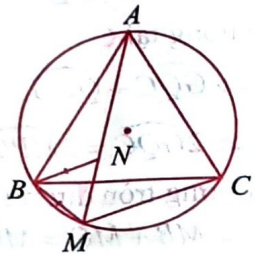
Trong quá trình học tập và giảng dạy, chúng ta bắt gặp rất nhiều các bài toán mang tính chất cơ bản và cũng từ bài toán cơ bản đó nếu chúng ta chịu khó suy nghĩ và phát triển nó ta sẽ được các bài toán hay hơn, thú vị hơn. Bài viết dưới đây tôi đề cập là một ví dụ nhỏ minh họa cho nhận định đó.

Ta quy ước (ABC) là đường tròn đi qua ba điểm A, B, C. S_{MNP} là diện tích của hình MNP, ...

Bài toán 1. *Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. M là điểm bất kì trên cung BC (không chứa A). Chứng minh rằng $MA = MB + MC$.*

(Bài toán này khá quen thuộc với các bạn học sinh lớp 9, ta có thể giải nó bằng nhiều cách).

Lời giải 1.



Trên đoạn AM lấy N sao cho $BM = BN$, kết hợp với giả thiết của bài toán ta suy ra được tam giác BMN là tam giác đều.

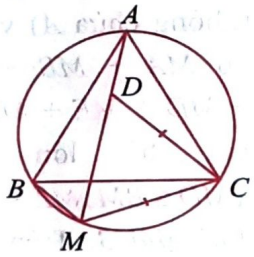
Xét ΔABN và ΔCBM có:

$AB = CB; BN = BM; \widehat{ABN} + \widehat{NBC} = 60^0 = \widehat{NBC} + \widehat{CBM}$

$\Rightarrow \widehat{ABN} = \widehat{CBM} \Rightarrow \Delta ABN = \Delta CBM$

$\Rightarrow AN = CM \Rightarrow AM = AN + NM = CM + MB.$

Lời giải 2.



Trên đoạn AM lấy D sao cho $CD = CM$, hoàn toàn tương tự như lời giải 1 ta cũng suy ra được $AM = MB + MC$ (đpcm).

(Ngoài ra ta còn có thể giải bài toán này bằng một số cách khác nữa bằng cách tạo thêm đoạn thẳng bằng $MB + MC$ sau đó chứng minh nó bằng MA,...).

Nhận xét 1. *Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Khi M di chuyển trên cung BC (không chứa A) ta luôn có $MB + MC = MA \le 2R$.*

Từ kết quả này ta có thể giải được các bài toán sau.

Bài toán 2. *Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. M là điểm bất kì trên cung BC (không chứa A). Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ M đến B và C không lớn hơn đường kính của đường tròn.*

(Trích đề thi chọn HSG toán lớp 9 toàn quốc năm 1981 – 1982).

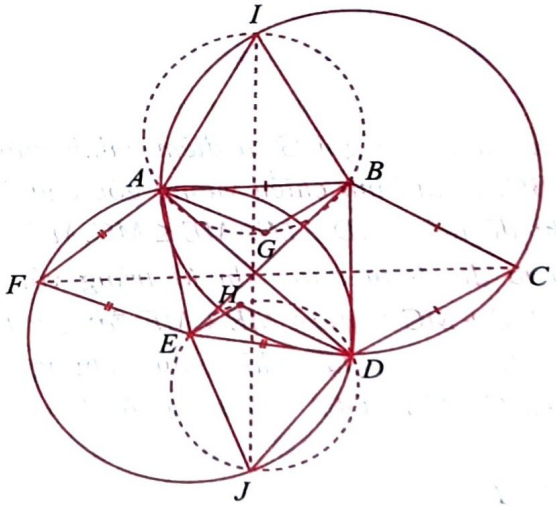
Bài toán 3. *Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. M là điểm di động trên (O). Xác định vị trí của M để tổng $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất.*

(Trích đề thi chọn HSG toán lớp 9 TP. Hồ Chí Minh năm học 1999 - 2000)

Bài toán 4 (IMO 1995). *Cho $ABCDEF$ là một lục giác lồi có $AB = BC = CD, DE = EF = FA$ và $\widehat{BCD} = \widehat{EFA} = 60^0$. Cho G và H là hai điểm nằm bên trong lục giác sao cho $\widehat{AGB} = \widehat{DHE} = 120^0$. Chứng minh rằng*

$$GA + GB + GH + HD + HE \ge CF.$$

Lời giải.



Từ bài ra suy ra: $BA = BC = CD = BD$;

$DE = EF = FA = EA \Rightarrow EB \perp AD.$

Trên đường tròn $(B; BA)$ lấy I sao cho tam giác ABI là tam giác đều (hình vẽ). Trên đường tròn $(E; EA)$ lấy J sao cho tam giác EDJ là tam giác đều (hình vẽ). (Mục đích dựng hai điểm I, J là để xác định hai điểm G, H). Suy ra G thuộc (IAB); H thuộc (EDJ). Dễ thấy:

$$BF = BJ; EI = EC \Rightarrow BE \perp JF; BE \perp IC.$$

Suy ra tứ giác $CIFJ$ là hình thang cân nên ta được $IJ = CF$. Áp dụng Nhận xét 1 ta có:

$$GA + GB + HE + HD + HG = GI + HJ + HG \geq IJ = CF \text{ (đpcm).}$$

Dấu bằng xảy ra khi các điểm I, G, H, J thẳng hàng.

Từ bài toán 2, 3 ta lại đặt ra câu hỏi nếu thay giả thiết tam giác ABC đều bởi tam giác ABC cân thì các bài toán đó còn đúng hay không? Từ đó ta có các bài toán sau

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC cân nội tiếp đường tròn $(O; R)$. M là điểm di động trên cung BC (không chứa A). Các điểm D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB và AC. Xác định vị trí của M để tổng $MA + MB + MC + MD + ME$ đạt giá trị lớn nhất.*

(*Trích bài T4/537 – TH&TT tháng 3 năm 2022*)

Mở rộng thêm một chút ta có bài toán sau

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC cân nội tiếp đường tròn $(O; R)$. M là điểm di động trên cung BC (không chứa A). Các điểm D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB, AC và BC. Xác định vị trí của M để tổng*

$$MA + MB + MC + MD + ME + MF$$

đạt giá trị lớn nhất.

Định hướng: Nếu gọi G là điểm chính giữa của cung BC, W là hình chiếu vuông góc của G trên BC thì dễ thấy $MD \leq MB; ME \leq MC; MF \leq GH$, từ đó ta dự đoán được khi M trùng với G thì $MA + MB + MC + MD + ME + MF$ đạt giá trị lớn nhất. Do vậy ta chỉ cần chứng minh $MB + MC \leq GB + GC$, từ đây ta có các cách giải sau

Lời giải 1.

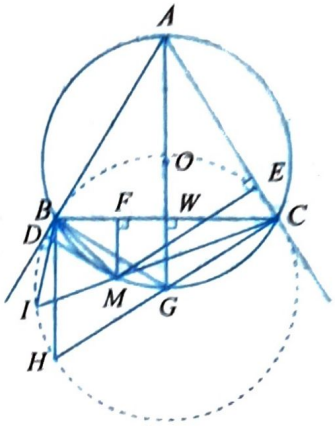
Trên tia đối của các tia MC, GC lần lượt lấy các điểm $I; H$ sao cho $IM = MB; GH = GB \Rightarrow \Delta BMI$ cân tại M; ΔCBH vuông tại B

$$\Rightarrow \widehat{MBI} + \widehat{BIM} = \widehat{BMC} = \widehat{BGC} = \widehat{GBH} + \widehat{BHG}$$

$$\Leftrightarrow 2\widehat{BIM} = 2\widehat{BHG} \Rightarrow \text{tứ giác } CBIH \text{ nội tiếp đường tròn đường kính } CH$$

$$\Rightarrow MB + MC = MI + MC = IC \leq CH = BG + GC$$

$\Rightarrow MB + MC$ nhận giá trị lớn nhất khi M trùng với G – là điểm chính giữa của cung BC (không chứa A) và khi đó $MA + MB + MC + MD + ME + MF$ đạt giá trị lớn nhất $(MD \leq BM; ME \leq MC)$.



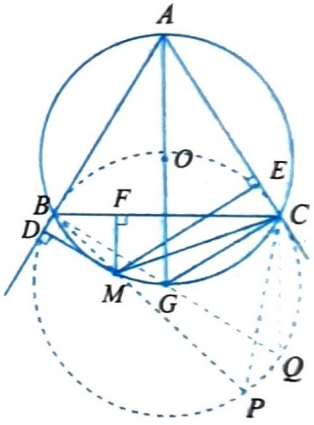
Lời giải 2. Trên tia đối của các tia MB, GB lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $CM = MP; GQ = GB \Rightarrow \Delta PCM$ cân tại M; ΔCBQ vuông tại C

$$\Rightarrow \widehat{GQC} + \widehat{QCG} = \widehat{BGC} = \widehat{BMC} = \widehat{MCP} + \widehat{CPM}$$

$$\Leftrightarrow 2\widehat{GQC} = 2\widehat{MPC} \Rightarrow \text{tứ giác } CBPQ \text{ nội tiếp đường tròn đường kính } BQ$$

$$\Rightarrow MB + MC = MB + MP = PB \leq BQ = BG + GQ$$

$\Rightarrow MB + MC$ nhận giá trị lớn nhất khi M trùng với G – là điểm chính giữa của cung BC (không chứa A) và khi đó $MA + MB + MC + MD + ME + MF$ đạt giá trị lớn nhất $(MD \leq BM; ME \leq MC)$.

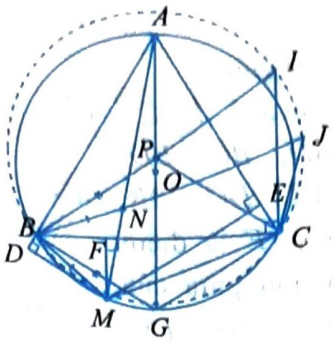


Lời giải 3. Trên đoạn AM, AG lần lượt lấy các điểm N, P sao cho $BN = BM; BP = BG$

$$\Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{BMA} = \widehat{BNM} = \widehat{ANJ} \Rightarrow BJ \parallel CM$$

(J là giao điểm của BN với d là đường thẳng qua C và song song với AM) suy ra $NJCM$ là hình bình hành, suy ra: $NJ = CM \Rightarrow MB + MC = NB + NJ = BJ$.

Gọi I là giao điểm của BP với d' là đường thẳng qua C song song với AG.



Từ cách dựng suy ra tam giác BIC vuông tại C, suy ra $PC = PI$,

$\widehat{CIB} = \widehat{BPG} = \widehat{PGB}$

$= \widehat{AMB} = \widehat{AMC} = \widehat{CJN}$

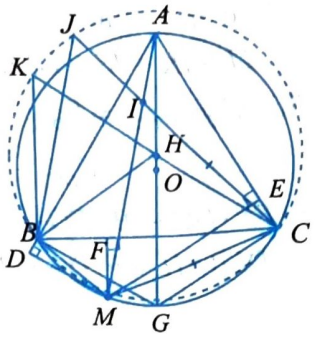
$\Rightarrow$ tứ giác $BCJI$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính BI

$\Rightarrow GB + GC = BP + PC = BI \geq BJ = MB + MC$

$\Rightarrow MB + MC \leq GB + GC \Rightarrow MB + MC$ nhận giá trị lớn nhất khi M trùng với G – là điểm chính giữa của cung BC (không chứa A) và khi đó $MA + MB + MC + MD + ME + MF$ đạt giá trị lớn nhất $(MD \leq BM; ME \leq MC)$.

Lời giải 4.

Gọi H là điểm đối xứng của G qua BC, dễ thấy tứ giác $BHCG$ là hình thoi.



Trên đoạn AM lấy I sao cho $CI = CM$ suy ra $CI \parallel BM$.

Trên tia CI lấy J sao cho $IJ = BM$ suy ra tứ giác $BMIJ$ là hình bình hành

$\Rightarrow \widehat{BJC} = \widehat{MIC} = \widehat{AMC} = \widehat{AGC} = \widehat{CHG} = \widehat{BKH}$

(K là đối xứng của C qua H nên tam giác BKC vuông tại B, $BK \parallel HG$) suy ra tứ giác $BCJK$ nội tiếp đường tròn đường kính CK

$\Rightarrow GB + GC = HB + HC = CK \geq CJ = JI + IC = MB + MC$

$\Rightarrow MB + MC$ nhận giá trị lớn nhất khi M trùng với G – là điểm chính giữa của cung BC (không chứa A) và khi đó $MA + MB + MC + MD + ME + MF$ đạt giá trị lớn nhất $(MD \leq BM; ME \leq MC)$.

Từ các lời giải trên, ta ghi nhớ kết quả dưới đây.

Nhận xét 2. *Cho trước đường tròn (O) và dây cung BC cố định. M là điểm di chuyển trên cung nhỏ BC. G là điểm chính giữa trên cung nhỏ BC, khi đó ta luôn có $MB + MC \leq GB + GC$ (trường hợp điểm M, G cùng thuộc cung lớn BC thì bài toán vẫn đúng).*

Tiếp tục mở rộng các bài toán 5; 6 sang hình vuông, hình thang cân, ta được các bài toán sau

Bài toán 7. *Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$. M là điểm di động trên cung nhỏ BA (không chứa C, D). Xác định vị trí của M để tổng $MA + MB + MC + MD$ đạt giá trị lớn nhất.*

Hướng dẫn giải. *Dựa vào lời giải các bài toán trên ta dễ thấy khi M trùng với G - là điểm chính giữa của cung nhỏ AB thì $MA + MB + MC + MD$ đạt giá trị lớn nhất.*

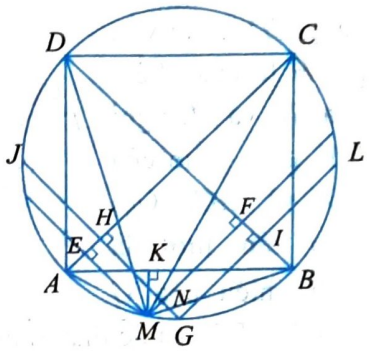
Bài toán 8. *Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$. M là điểm di động trên cung nhỏ BA (không chứa C, D). Gọi E, F, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AC, BD, AB. Xác định vị trí của M để tổng*

$$MA + MB + MC + MD + ME + MF + MK$$

đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Gọi G là điểm chính giữa của cung nhỏ AB. Gọi H, I lần lượt là hình chiếu của G trên AC và BD.



GH, GI cắt (O) lần lượt tại J và L.

Không mất tính tổng quát ta xét M chạy trên cung nhỏ AG (*trường hợp M chạy trên cung nhỏ GB tương tự*).

Gọi N là giao điểm của GH và MF. Dễ thấy tam giác MNG luôn vuông tại N,

$$JG = GL, EM = HN, NF = GI.$$

Xét tam giác vuông MNG có:

$$\widehat{NGM} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{JM} \leq \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{JG} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{GL}$$

$$\leq \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{ML} \leq \widehat{GMN} \Rightarrow MN \leq NG$$

suy ra: $ME + MF = ME + MN + NF$

$$\leq HN + NG + GI = GH + GI.$$

Kết hợp bài toán 6 ta thấy khi M trùng với G thì $MA + MB + MC + MD + ME + MF + MK$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài toán 9. *Cho hình thang $ABCD$ $(AB < CD)$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$. M là điểm di động trên cung CD (không chứa hai điểm A, B). Xác định vị*

trí của M để tổng MA + MB + MC + MD đạt giá trị lớn nhất.

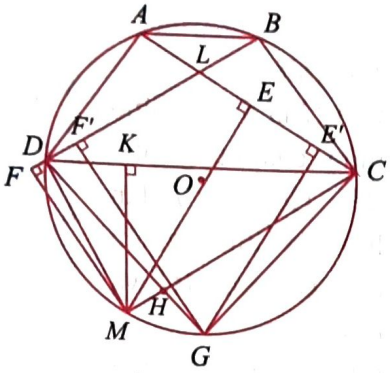
Hướng dẫn giải.

Dựa vào lời giải các bài toán trên ta dễ thấy khi M trùng với G - là điểm chính giữa của cung CD (không chứa hai điểm A, B) thì MA + MB + MC + MD đạt giá trị lớn nhất.

Bài toán 10. *Cho hình thang ABCD (AB < CD) nội tiếp đường tròn (O). M là điểm di động trên cung CD (không chứa A, B). Gọi E, F, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AC, BD, CD. Xác định vị trí của M để tổng MA + MB + MC + MD + ME + MF + MK đạt giá trị lớn nhất.*

Lời giải.

Gọi G là điểm chính giữa của cung CD (hình vẽ), gọi H là giao điểm của GD và MC; gọi L là giao điểm của BD và AC. Gọi E', F' lần lượt là hình chiếu của G trên AC, BD. Ta dễ thấy rằng:



$$S_{MDC} \le S_{GDC} \Rightarrow S_{MDH} \le S_{GCH} \Rightarrow S_{MDLC} \le S_{GDLC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}MF.DL + \frac{1}{2}ME.LC \le \frac{1}{2}GF'.LD + \frac{1}{2}GE'.LC$$

$$(LD = LC) \Rightarrow ME + MF \le GF' + GE'.$$

Vậy khi M trùng với G thì $ME + MF$ và MK đạt giá trị lớn nhất, kết hợp bài toán 9 ta thấy khi M trùng với G thì tổng

$$MA + MB + MC + MD + ME + MF + MK$$

đạt giá trị lớn nhất.

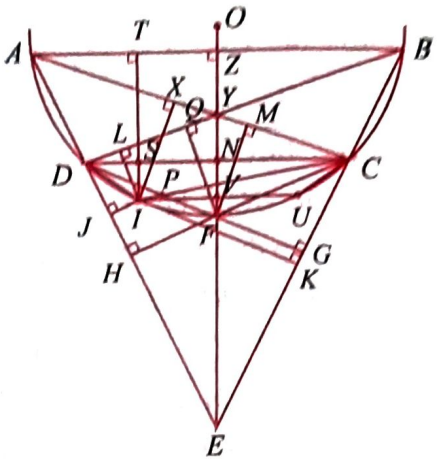
Hoàn toàn tương tự, ta có thể giải được bài toán 11 dưới đây

Bài toán 11. *Cho hình thang ABCD (AB < CD) nội tiếp đường tròn (O; R). Xác định vị trí của điểm M trên cung nhỏ DC để tổng các khoảng cách từ M tới các đỉnh, các cạnh và các đường chéo của nó đạt giá trị lớn nhất?*

Bài toán 12. *Cho hình thang ABCD (AB > CD) nội tiếp đường tròn (O; R). Xác định vị trí của điểm I trên cung DC (không chứa A, B) để tổng các khoảng cách từ I tới các đỉnh, các cạnh và các đường chéo của nó đạt giá trị lớn nhất.*

Lời giải.

Gọi J, K, L, X, S, T lần lượt là hình chiếu của I trên AD, BC, BD, AC, DC, AB. Gọi F là điểm chính giữa của cung nhỏ DC, AD cắt BC tại E, AC cắt BD tại Y. Gọi H, G, Q, M, N, Z lần lượt là hình chiếu của F trên AD, BC, BD, AC, DC, AB.



Gọi U là điểm đối xứng với I qua OE, IU cắt OE tại V.

*) Ta chứng minh

$$IJ + IK + IS + IT \le FH + FG + FN + FZ.$$

Thật vậy: $S_{CDE} = S_{DFC} + S_{CEF} + S_{DEF}$

$$= S_{DIC} + S_{CIE} + S_{DIE}$$

$$\Rightarrow FN \cdot DC + DE(FG + FH) = DC \cdot IS + DE(IJ + IK)$$

$$\Rightarrow DE[(FH + FG) - (IJ + IK)] = DC(IS - FN)$$

$$= DC \cdot (-FV)$$

$$\Rightarrow (FH + FG) - (IJ + IK) = \frac{DC \cdot (-FV)}{DE}$$

$$= \frac{2DN \cdot (-FV)}{DE} = -2FV \cdot \sin\widehat{DEN} \le 0.$$

Do đó $FH + FG \le IJ + IK$ *(khác với trường hợp $DC > AB$ nên bài toán trở nên khó hơn).*

Lại có: $(FN + FZ) - (IS + IT) = 2FV$

$$\Rightarrow (FH + FG) + (FN + FZ) - (IJ + IK) - (IS + IT)$$

$$= 2FV - 2FV \cdot \sin\widehat{DEN} \ge 0 \ (0 \le \sin\widehat{DEN} \le 1)$$

$$\Rightarrow (IJ + IK) + (IS + IT) \le (FH + FG) + (FN + FZ).$$

Dấu bằng xảy ra khi I trùng với F $(FV = 0)$.

Áp dụng các bài toán trên ta có:

$$IA + IB + IC + ID \le FA + FB + FC + FD.$$

Hoàn toàn tương tự như bài 10, ta cũng chứng minh được $IL + IX \le FQ + FM$. Vậy khi I trùng với F thì tổng các khoảng cách từ I tới các đỉnh, các cạnh và các đường chéo của hình thang $ABCD$ là lớn nhất.

Nhận xét. *Bài toán này khó hơn bài 11. Một phiên bản mạnh hơn của bài toán này là bài toán dưới đây:*

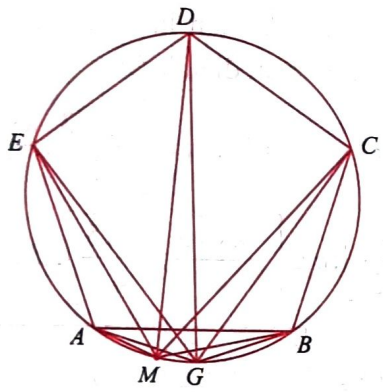
Bài toán 13. *Cho hình thang cân $ABCD$ $(AB > CD)$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Xác định vị trí của điểm I trên cung DC (không chứa A, B) để tổng các khoảng cách từ I tới các đỉnh và hai cạnh bên của nó đạt giá trị lớn nhất? (Điểm I cần tìm nằm ở chính giữa của cung nhỏ DC).*

Tiếp tục mở rộng bài toán 12 sang hình ngũ giác đều ta có bài toán dưới đây

Bài toán 14. *Cho ngũ giác đều $ABCDE$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$. M là điểm di động trên cung nhỏ BA. Tìm vị trí của M để tổng các khoảng cách từ M tới các đỉnh, các cạnh và các đường chéo của nó đạt giá trị lớn nhất.*

Nhận xét. *Nếu bài toán này đứng độc lập thì việc tìm lời giải cho nó sẽ không hề dễ dàng! Để giải quyết bài toán này ta sẽ dựa vào các cách giải của các bài toán trên!*

Lời giải.



Ta chia ngũ giác đã cho thành hai phần:

Phần thứ nhất là tam giác cân CDE, Phần thứ hai là hình thang cân $ABCE$. Áp dụng bài toán 6 và bài toán 12 (lưu ý rằng tổng khoảng cách hình chiếu của M lên hai cạnh AD và BD là lớn nhất khi M trùng với G – điểm chính giữa của cung nhỏ AB, đây cũng chính là việc áp dụng bài toán 6) ta tìm được vị trí của điểm M chính là G – điểm chính giữa của cung nhỏ AB.

(Nếu thay giả thiết ngũ giác đều bởi lục giác đều của bài toán trên thì cách giải trên vẫn áp dụng được).

Từ việc giải các bài toán trên, ta có thể giải được hai bài toán dưới đây

Bài toán tổng quát

Bài toán 15. *Cho đa giác đều $A_1A_2A_3...A_n$ $(n \geq 3, n \in \mathbb{N}^*)$. M là điểm di động trên cung nhỏ A_1A_2. Xác định vị trí của điểm M để tổng $\sum_{i=1}^{n} MA_i$ đạt giá trị lớn nhất.*

Bài toán 16. *(Mở rộng hơn bài 15) Cho đa giác đều $A_1A_2A_3...A_n$ $(n \geq 3, n \in \mathbb{N}^*)$, M là điểm di động trên cung nhỏ A_1A_2.. Xác định vị trí của điểm M để tổng các khoảng cách từ M đến các đỉnh, các cạnh và các đường chéo của đa giác là lớn nhất?*

(Nếu thay giả thiết đa giác đều $A_1A_2A_3...A_n$ $(n \geq 3, n \in \mathbb{N}^*)$, bởi giả thiết đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ nội tiếp đường tròn và có ít nhất một trục đối xứng thì bài toán vẫn đúng).

Nối một nhịp cầu sang bất đẳng thức đại số ta có được một số bài toán sau

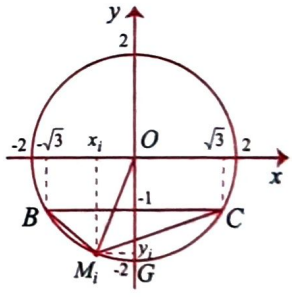
Bài toán 17. *Cho các số thực $x_i; y_i (i = \overline{1,n}$, n nguyên dương) thỏa mãn điều kiện*

$$\begin{cases} x_i^2 + y_i^2 = 4 \\ x_i \in \left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right] \\ y_i \in [-2; -1] \end{cases}.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{8 + 2(x_i\sqrt{3} + y_i)} + \sqrt{8 - 2(x_i\sqrt{3} - y_i)} \right) \leq 4n.$$

Lời giải. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy ta vẽ đường tròn $(O; 2)$, có phương trình: $x^2 + y^2 = 4$.



Từ điều kiện bài toán cho, ta có thể chọn các điểm $M_i(x_i; y_i), i = \overline{1,n}$ (hình vẽ). Khi đó ta có $x_i^2 + y_i^2 = 4$. Trên đường tròn ta lấy các điểm $B(-\sqrt{3}; -1)$; $C(\sqrt{3}; -1)$; $G(0; -2)$; khi đó các điểm M_i $(i = \overline{1,n})$ nằm trên cung nhỏ BC thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} x_i^2 + y_i^2 = 4 \\ x_i \in \left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right] \\ y_i \in [-2; -1] \end{cases}$.

Dễ thấy: $M_iB=\sqrt{(x_i+\sqrt{3})^2+(y_i+1)^2}$

$=\sqrt{x_i^2+3+2x_i\sqrt{3}+y_i^2+2y_i+1}$

$=\sqrt{8+2(x_i\sqrt{3}+y_i)};(i=\overline{1,n}).$

Tương tự ta có:

$M_iC=\sqrt{8-2(x_i\sqrt{3}-y_i)};(i=\overline{1,n});GB=2;GC=2.$

Áp dụng nhận xét 2 ta có:

$$\sum_{i=1}^{n}(M_iB+M_iC)\le n(GB+GC)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{8+2(x_i\sqrt{3}+y_i)}+\sqrt{8-2(x_i\sqrt{3}-y_i)}\right)\le 4n.$$

Lưu ý. *$BC=2\sqrt{3}$ chính là độ dài cạnh của tam giác đều nội tiếp đường tròn $(O;2)$ nên nếu áp dụng nhận xét 1 ta cũng có được điều cần chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi các điểm $M_i(i=\overline{1,n})$ trùng với G, khi đó $x_i=0;y_i=-2(i=\overline{1,n})$.*

Hoàn toàn tương tự ta giải được bài toán dưới đây:

Bài toán 18 (tổng quát của bài toán 17). *Với k là số thực dương cho trước và các số thực $x_i;y_i\ (i=\overline{1,n})$ (n nguyên dương) thỏa mãn điều kiện* $\begin{cases}x_i^2+y_i^2=k^2;\ x_i\in\left[\dfrac{-k\sqrt{3}}{2};\dfrac{k\sqrt{3}}{2}\right]\\ y_i\in\left[-k;\dfrac{-k}{2}\right]\end{cases}$.

Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{2k^2+k(x_i\sqrt{3}+y_i)}+\sqrt{2k^2-k(x_i\sqrt{3}-y_i)}\right)\le 2kn.$$

Bài toán 19. *Với k là số thực dương cho trước và các số thực a,b,c,d thỏa mãn điều kiện*

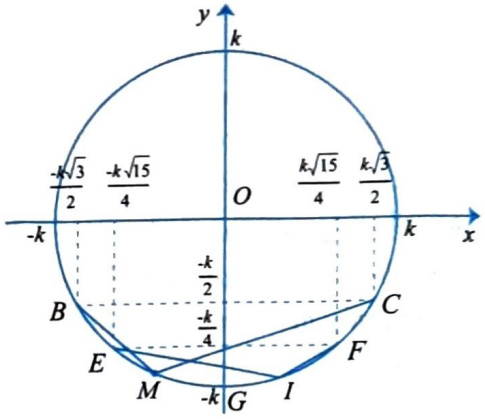
$$\begin{cases}a^2+b^2=c^2+d^2=k^2;\ a\in\left[\dfrac{-k\sqrt{3}}{2};\dfrac{k\sqrt{3}}{2}\right]\\ b\in\left[-k;\dfrac{-k}{2}\right];\ c\in\left[\dfrac{-k\sqrt{15}}{4};\dfrac{k\sqrt{15}}{4}\right];d\in\left[-k;\dfrac{-k}{4}\right]\end{cases}.$$

Chứng minh rằng:

$$\sqrt{4k^2+2k(a\sqrt{3}+b)}+\sqrt{4k^2-2k(a\sqrt{3}-b)}+\sqrt{4k^2+k(c\sqrt{15}+d)}+\sqrt{4k^2-k(c\sqrt{15}-d)}\le 2k(\sqrt{2}+\sqrt{3}).$$

Lời giải. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy ta vẽ đường tròn $(O;k)$, có phương trình $x^2+y^2=k^2$. Từ điều kiện bài toán cho, ta có thể chọn các điểm $M(a;b);I(c;d)$ trên đường tròn (hình vẽ) thỏa mãn $a^2+b^2=c^2+d^2=k^2$. Trên đường tròn ta lấy các điểm: $B\left(\dfrac{-k\sqrt{3}}{2};\dfrac{-k}{2}\right);\ C\left(\dfrac{k\sqrt{3}}{2};\dfrac{-k}{2}\right);$

$$E\left(\frac{-k\sqrt{15}}{4};\frac{-k}{4}\right);F\left(\frac{k\sqrt{15}}{4};\frac{-k}{4}\right);G(0;-k).$$



Khi đó các điểm M, I lần lượt nằm trên các cung nhỏ BC, EF thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases}a^2+b^2=c^2+d^2=k^2;\ a\in\left[\dfrac{-k\sqrt{3}}{2};\dfrac{k\sqrt{3}}{2}\right]\\ b\in\left[-k;\dfrac{-k}{2}\right];c\in\left[\dfrac{-k\sqrt{15}}{4};\dfrac{k\sqrt{15}}{4}\right];d\in\left[-k;\dfrac{-k}{4}\right]\end{cases}.$$

Dễ thấy: $MB=\sqrt{\left(a+\dfrac{k\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(b+\dfrac{k}{2}\right)^2}$

$=\sqrt{a^2+b^2+k(a\sqrt{3}+b)+k^2}=\sqrt{2k^2+k(a\sqrt{3}+b)}.$

Tương tự ta có: $MC=\sqrt{2k^2-k(a\sqrt{3}-b)};$

$IE=\sqrt{2k^2+\dfrac{k}{2}(c\sqrt{15}+d)};\ IF=\sqrt{2k^2-\dfrac{k}{2}(c\sqrt{15}-d)};$

$GB=k;GC=k;GF=GE=\dfrac{k\sqrt{6}}{2}.$

Áp dụng nhận xét 2 ta có:

$MB+MC+IE+IF\le GB+GC+GE+GF$

$\Leftrightarrow\sqrt{2k^2+k(a\sqrt{3}+b)}+\sqrt{2k^2-k(a\sqrt{3}-b)}+\sqrt{2k^2+\dfrac{k}{2}(c\sqrt{15}+d)}+\sqrt{2k^2-\dfrac{k}{2}(c\sqrt{15}-d)}\le k(2+\sqrt{6})$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4k^2+2k(a\sqrt{3}+b)}+\sqrt{4k^2-2k(a\sqrt{3}-b)}$$
$$+\sqrt{4k^2+k(c\sqrt{15}+d)}+\sqrt{4k^2-k(c\sqrt{15}-d)}$$
$$\le 2k(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \text{ (đpcm).}$$

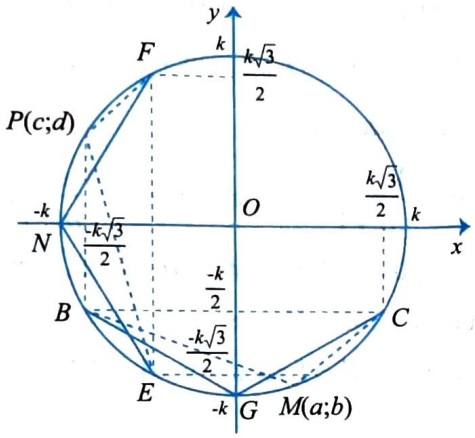
Bài toán 20. *Với k là số thực dương cho trước và các số thực a,b,c,d thỏa mãn điều kiện*

$$\begin{cases} a^2+b^2=c^2+d^2=k^2;\ a,d\in\left[\dfrac{-k\sqrt{3}}{2};\dfrac{k\sqrt{3}}{2}\right] \\ b,c\in\left[-k;\dfrac{-k}{2}\right] \end{cases}.$$

Chứng minh rằng:

$$\sqrt{2k^2+k(a\sqrt{3}+b)}+\sqrt{2k^2-k(a\sqrt{3}-b)}$$
$$+\sqrt{2k^2+k(c+d\sqrt{3})}+\sqrt{2k^2+k(c-d\sqrt{3})}\le 4k.$$

Lời giải.



Trên mặt phẳng tọa độ Oxy ta vẽ đường tròn $(O;k)$, có phương trình $x^2+y^2=k^2$. Từ điều kiện bài toán cho, ta có thể chọn các điểm $M(a;b);P(c;d)$ trên đường tròn (hình vẽ) thỏa mãn $a^2+b^2=c^2+d^2=k^2$. Trên đường tròn ta lấy các điểm: $B\left(\dfrac{-k\sqrt{3}}{2};\dfrac{-k}{2}\right)$; $C\left(\dfrac{k\sqrt{3}}{2};\dfrac{-k}{2}\right)$;

$$E\left(\frac{-k}{2};\frac{-k\sqrt{3}}{2}\right);F\left(\frac{-k}{2};\frac{k\sqrt{3}}{2}\right);$$
$$G(0;-k);N(-k;0).$$

Khi đó các điểm M, P lần lượt nằm trên các cung nhỏ BC, EF thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} a^2+b^2=c^2+d^2=k^2;\ a,d\in\left[\dfrac{-k\sqrt{3}}{2};\dfrac{k\sqrt{3}}{2}\right] \\ b,c\in\left[-k;\dfrac{-k}{2}\right] \end{cases}.$$

Dễ thấy: $MB=\sqrt{\left(a+\dfrac{k\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(b+\dfrac{k}{2}\right)^2}$

$$=\sqrt{a^2+b^2+k(a\sqrt{3}+b)+k^2}$$
$$=\sqrt{2k^2+k(a\sqrt{3}+b)}.$$

Tương tự ta có: $MC=\sqrt{2k^2-k(a\sqrt{3}-b)}$;

$$PE=\sqrt{2k^2+k(c+d\sqrt{3})};$$
$$PF=\sqrt{2k^2+k(c-d\sqrt{3})};$$
$$GB=GC=NF=NE=k.$$

Áp dụng nhận xét 2 ta có:

$$MB+MC+PE+PF\le GB+GC+NE+NF$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2k^2+k(a\sqrt{3}+b)}+\sqrt{2k^2-k(a\sqrt{3}-b)}$$
$$+\sqrt{2k^2+k(c+d\sqrt{3})}+\sqrt{2k^2+k(c-d\sqrt{3})}\le 4k.$$

Lời kết. Vì khuôn khổ của bài viết là có hạn nên tác giả xin dừng lại ở đây. Vẫn còn đó những chân trời rộng mở dành cho bạn đọc khai thác và phát triển thêm bài viết này! Chẳng hạn: Trong bất đẳng thức hình học ta có thể gắn nhận xét 1, nhận xét 2 với một số hình có cùng tính chất để được những bài toán đẹp hơn, phức tạp hơn. Trong bất đẳng thức đại số ta có thể gắn nhận xét 1, nhận xét 2 với một số cung tròn trên một đường tròn hoặc nhiều đường tròn thì ta cũng có được nhiều bài toán thú vị hơn! Và cũng vẫn còn đó những trăn trở của tác giả bài viết: như một lẽ thường tình, nếu ta thay giả thiết của các bài toán trên là các đa giác không đều thì tôi tin chắc rằng vẫn tồn tại vị trí của các điểm M, I để tổng các khoảng cách của nó tới các đỉnh, các cạnh, các đường chéo của đa giác là lớn nhất, dẫu biết rằng điểm cần xác định không còn là điểm chính giữa của cung mà nó chạy trên đó nữa! Bài toán này thực sự không dễ với bản thân tôi, hy vọng rằng bạn đọc trên TH&TT sẽ sớm giải quyết được nó!

(*Các bài toán không trích dẫn là do người viết tự sáng tác, trừ bài toán mở đầu*).

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ HÀ NỘI LỚP 9 CẤP THCS, NĂM HỌC 2024 - 2025

Bài 1. 1) *Giải phương trình*

$$3x+5-(x+4)\sqrt{x+1}=0.$$

2) *Cho a,b và c là các số thực khác 0 thỏa mãn* $\dfrac{a^2+1}{a}=\dfrac{b^2+1}{b}=\dfrac{c^2+1}{c}$. *Tính giá trị của biểu thức* $P=(a-b)(b-c)(c-a)$.

Lời giải. 1) Điều kiện xác định: $x\ge -1$.

Đặt $\sqrt{x+1}=t$, $(t\ge 0)$.

Phương trình trở thành : $t^3-3t^2+3t-2=0$

$\Rightarrow (t-1)^3=1\Rightarrow t=2$.

Với $t=2$ suy ra $x=3$.

Kết hợp điều kiện xác định ta có nghiệm của phương trình là $x=3$.

2) Từ giả thiết suy ra $\begin{cases}(ab-1)(a-b)=0\\(bc-1)(b-c)=0\end{cases}$.

TH1: $a=b\Rightarrow P=0$.

TH2: $b=c\Rightarrow P=0$.

TH3: $\begin{cases}a\ne b\\b\ne c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ab=1\\bc=1\end{cases}\Rightarrow a=c\Rightarrow P=0$.

Vậy $P=0$.

Bài 2. 1) *Một công ty cần thuê xe để vận chuyển 100 tấn hàng. Đơn vị cho thuê xe chỉ có hai loại xe. Loại xe thứ nhất mỗi xe chở được 18 tấn hàng, có giá thuê là 18 triệu đồng cho mỗi lượt vận chuyển. Loại xe thứ hai mỗi xe chở được 12 tấn hàng, có giá thuê là 12 triệu đồng cho mỗi lượt vận chuyển. Hỏi chi phí thuê xe nhỏ nhất mà công ty phải trả để vận chuyển 100 tấn hàng là bao nhiêu?*

2) *Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn*

$$4x^3=y^3(x+y+2).$$

Lời giải. 1) Gọi x là số xe loại thứ nhất mà công ty dự định thuê $(x\in\mathbb{N})$. Gọi y là số xe loại thứ hai mà công ty dự định thuê $(y\in\mathbb{N})$.

Theo giả thiết ta có: $18x+12y\ge 100$.

Đặt $18x+12y-100=a, a\in\mathbb{N}$. Suy ra:

$$18x+12y=100+a.$$

Do $18x+12y\vdots 6\Rightarrow 100+a\vdots 6\Rightarrow a=6k+2,\ k\in\mathbb{N}$.

Suy ra: $18x+12y=100+a=102+6k\ge 102$.

Do đó, chi phí thuê xe: $S=18x+12y\ge 102$.

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $x=5, y=1$.

Vậy chi phí thuê xe nhỏ nhất mà công ty phải trả để vận chuyển hàng là 102 triệu đồng.

2) Gọi d = ƯCLN$(x; y)$. Suy ra $\begin{cases}x=ad\\y=bd\end{cases}$, với $a,b\in\mathbb{N}^*, (a,b)=1$. Suy ra $4a^3=b^3(ad+bd+2)$.

$\Rightarrow 4a^3\vdots b^3$. Mà $(a,b)=1$ nên $4\vdots b^3$, do đó $b=1$.

Do đó: $4a^3=ad+d+2$

$$\Rightarrow d=\frac{4a^3-2}{a+1}=4\left(a^2-a+1\right)-\frac{6}{a+1}.$$

Do a,d nguyên dương nên $a+1$ là ước nguyên dương của 6.

TH1: $a=1\Rightarrow d=1\Rightarrow x=y=1$. Thử lại thỏa mãn.

TH2: $a=2\Rightarrow d=10\Rightarrow x=20, y=10$. Thử lại thỏa mãn.

TH3: $a=5\Rightarrow d=83\Rightarrow x=415, y=83$. Thử lại thỏa mãn.

Vậy các cặp $(x;y)$ thoả mãn là:

$$(1;1),\ (20;10),\ (415;83).$$

Bài 3. *Cho a,b và c là các số thực không âm thỏa mãn* $3(a^2+b^2+c^2)+2abc=12$.

a) *Chứng minh* $2a+bc\le 4$.

b) *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P=4a+4b+c$.

Lời giải. a) Ta có: $2a+bc\le\dfrac{a^2+4}{2}+\dfrac{b^2+c^2}{2}$

$$\Rightarrow 2a+bc\le\frac{a^2+b^2+c^2+4}{2}$$

$$\le \frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)+2abc+12}{6}=4.$$

b) Ta có: $2a+bc\le 4\Rightarrow 2a^2+abc\le 4a.$

Tương tự: $2b^2+abc\le 4b; 2c^2+abc\le 4c.$

Suy ra: $4(a+b+c)\ge 2\left(a^2+b^2+c^2\right)+3abc$

$$=8+\frac{5}{3}abc\ge 8\Rightarrow a+b+c\ge 2.$$

Suy ra: $P=4a+4b+c\ge a+b+c\ge 2$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=0, c=2$. Vậy $\min P=2$. Ta có:

$$4=a^2+b^2+c^2+\frac{2}{3}abc=(a+b)^2+c^2+\frac{2}{3}(c-3)ab$$

$$\ge(a+b)^2+c^2+\frac{1}{6}(c-3)(a+b)^2 \text{ (do } 0\le a,b,c\le 2).$$

Suy ra: $(a+b)^2\le\frac{24-6c^2}{c+3}$

$$\Rightarrow 4(a+b)+c\le 4\sqrt{\frac{24-6c^2}{c+3}}+c.$$

Dễ chứng minh được: $4\sqrt{\frac{24-6c^2}{c+3}}+c\le 8\sqrt{2}.$

Suy ra $P\le 8\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=\sqrt{2}, c=0$. Vậy $\max P=8\sqrt{2}$.

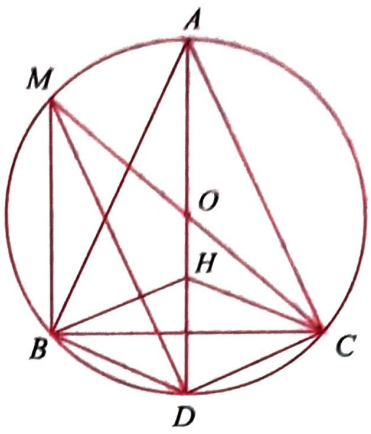
Bài 4. *Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O), $\widehat{BAC}<60^0$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và D là điểm đối xứng với H qua đường thẳng BC. Kẻ đường kính CM của đường tròn (O).*

a) *Chứng minh MD là tia phân giác của góc $\widehat{BMC}$.*

b) *Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng CH và MB. Đường thẳng qua H và song song với đường thẳng BC cắt đường thẳng MD tại điểm P. Chứng minh $\widehat{ANP}=90^0$.*

c) *Đường thẳng AP cắt đường thẳng BC tại điểm E, đường thẳng BH cắt đường thẳng MC tại điểm F. Chứng minh EF là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AP.*

Hướng dẫn giải. a)



Chứng minh được $BHCD$ là hình thoi.

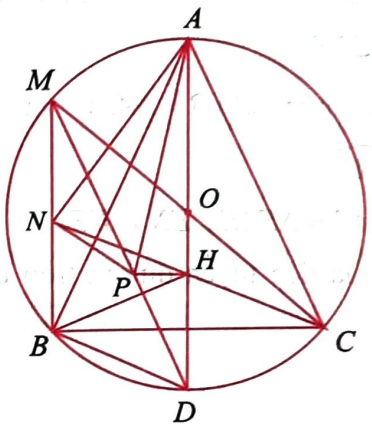
Chứng minh được D thuộc đường tròn (O).

Chứng minh được $MB // AD$.

Suy ra $\widehat{BMD}=\widehat{MDA}=\widehat{CMD}$.

Suy ra MD là phân giác của góc $\widehat{BMC}$.

b)



Ta có $\widehat{NBA}=\widehat{BAD}=\widehat{CAD}=\widehat{PDA}$.

Chứng minh được $BN=DH$, $AB=MD$.

Suy ra: $\frac{BN}{BA}=\frac{DH}{DM}=\frac{DP}{DA}$.

Suy ra $\Delta ANB\sim\Delta APD\Rightarrow\widehat{NAB}=\widehat{PAD}$.

Suy ra: $\widehat{NAP}=\widehat{BAD}\Rightarrow\Delta ANP\sim\Delta ABD$.

$\Rightarrow\widehat{ANP}=\widehat{ABD}=90^o$.

c) Gọi Q là giao CN và AB, K là trung điểm BC.

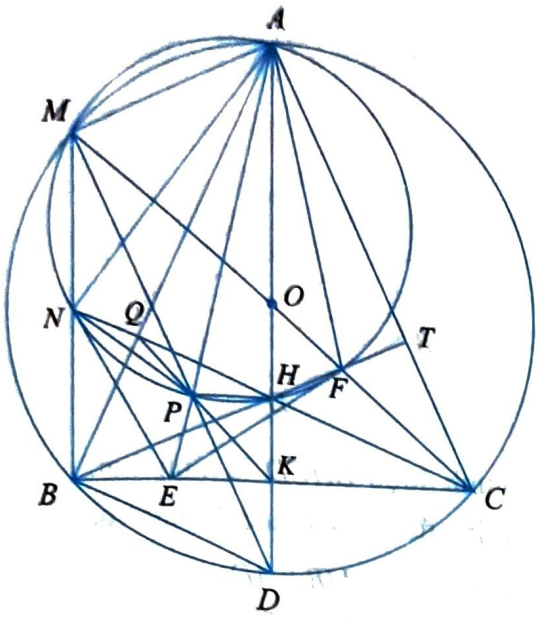
Chứng minh được $\Delta ANQ\sim\Delta AEK$.

$\Rightarrow\frac{AN}{AE}=\frac{AQ}{AK}, \widehat{NAQ}=\widehat{PAH}$

$\Rightarrow\widehat{NAE}=\widehat{QAK}\Rightarrow\Delta NAE\sim\Delta QAK$.

Suy ra $\widehat{ANE}=\widehat{AQK}$.

$\Rightarrow\widehat{ENP}=\widehat{KQC}=\widehat{QCK}=\widehat{BAK}=\widehat{NAP}$.



Từ đó chứng minh được EN là tiếp tuyến đường tròn đường kính AP.

Gọi T là giao BH và AC. Chứng minh được $\Delta BQN = \Delta CTF$

Chứng minh được $\Delta ANB = \Delta AFC$ và AE là phân giác góc $\widehat{NAF}$.

Suy ra: $\Delta NAE = \Delta FAE$, $EN = EF$.

Suy ra EF là tiếp tuyến đường tròn đường kính AP.

Bài 5. 1) *Tìm các số nguyên dương x, y để $\dfrac{(x^2y-1)^2+9}{2y^2}$ là bình phương của một số nguyên tố.*

2) *Một số nguyên dương n được gọi là có **tính chất T** nếu nó viết được dưới dạng tổng của k số nguyên dương lẻ liên tiếp, với k là số nguyên dương tuỳ ý lớn hơn 1.*

a) *Chứng minh 2025 là một số có **tính chất T**.*

b) *Tìm tất cả các số có **tính chất T**.*

Lời giải. 1) Đặt $\dfrac{(x^2y-1)^2+9}{2y^2} = p^2$ (p là số nguyên tố) $\Rightarrow (x^2y-1)^2+9 = 2p^2y^2$.

Nếu py không chia hết cho 3 $\Rightarrow 2p^2y^2$ chia 3 dư 2 $\Rightarrow (x^2y-1)^2$ chia 3 dư 2 (vô lý) $\Rightarrow py \vdots 3$.

Nếu $y \vdots 3 \Rightarrow 2p^2y^2 - 9 \vdots 3$ và $(x^2y-1)^2$ không chia hết cho 3 (vô lý). Vậy $p \vdots 3 \Rightarrow p = 3$.

Ta có: $(x^2y-1)^2 = 18y^2 - 9$

$\Rightarrow y(x^4y - 2x^2 - 18) = -10 \Rightarrow y$ là ước của 10.

Nếu y chẵn $\Rightarrow 18y^2 - 9$ chia 4 dư 3 $\Rightarrow (x^2y-1)^2$ chia 4 dư 3 (vô lý) $\Rightarrow y$ lẻ $\Rightarrow y = 1$ hoặc $y = 5$.

Nếu $y = 1$ thì $(x^2-1)^2 = 9 \Rightarrow x = 2$.

Nếu $y = 5$ thì $(5x^2-1)^2 = 441 \Rightarrow 5x^2 - 1 = 21$ (vô lý). Vậy cặp số (x, y) cần tìm là $(2;1)$.

2) a) Ta có: $2025 = 1+3+5+\ldots+89$ nên 2025 là có ***tính chất T***.

b) Trường hợp 1: n chẵn.

Nếu n có ***tính chất T*** thì k phải chẵn nên trong tổng n sẽ có các cặp số lẻ liên tiếp nên chia hết cho 4. Do đó $n \vdots 4$.

Nếu $n \vdots 4$ thì $n = \left(\dfrac{n}{2}-1\right) + \left(\dfrac{n}{2}+1\right)$ là tổng hai số lẻ liên tiếp nên n có ***tính chất T.***

Trường hợp 2: n lẻ thì k lẻ. Nếu n có ***tính chất T*** thì tồn tại $m \in \mathbb{N}$ để

$$\begin{aligned} n &= (2m+1)+(2m+3)+\ldots+(2m+2k-1) \\ &= \frac{1}{2}(2m+1+2m+2k-1)k \\ &= k(2m+k). \end{aligned}$$

Để ý rằng $3 \le k \le 2m+k$ nên n là hợp số lẻ.

Ngược lại, nếu n là hợp số lẻ thì $n = ab\ (a,b \in \mathbb{N}^*, 3 \le a \le b)$, khi đó ta tìm được $k = a; 2m = b - a$ để n có ***tính chất T.***

Vậy tất cả các số có ***tính chất T*** là $n \vdots 4$ và n là hợp số lẻ.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG

(GV THCS Giảng Võ, Q. Ba Đình, Hà Nội)

Giới thiệu

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 TỈNH THANH HÓA

Năm học 2024 – 2025, thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. Rút gọn biểu thức:

$$A=\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}+\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}-a+b}\right).\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

(với $a>b>0$).

Bài 2. Cho a,b là các số thực dương phân biệt thỏa mãn:

$$\frac{8b^8}{a^8-b^8}+\frac{4b^4}{a^4+b^4}+\frac{2b^2}{a^2+b^2}+\frac{b}{a+b}=4$$

và $a^2=2025+b^2$. Tính giá trị biểu thức:

$$P=(a-b-10)^2+2000.$$

Bài 3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}13\sqrt{x-1}+9\sqrt{y+2}=16x\\(x^3+x)\sqrt{x-y+3}=2x^2+x+y+1\end{cases}.$$

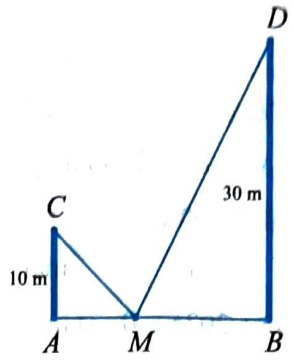
Bài 4. Cho các chữ số: $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau viết được từ các chữ số nói trên. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập hợp X. Tính xác xuất của biến cố A: "Số lấy ra là số lớn hơn 59000".

Bài 5. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình:

$$(2x-y-2)^2=7(x-2y-y^2-1).$$

Bài 6. Cho số tự nhiên $n\geq 2$ và số nguyên tố p. Chứng minh rằng nếu $p-1$ chia hết cho n và n^6-1 chia hết cho p thì ít nhất một trong hai số $p-n$ và $p+n$ là số chính phương.

Bài 7. Có hai chiếc cọc cao 10m và 30m đặt vuông góc với mặt đất tại hai vị trí A và B. Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng 24 m. Người ta đặt một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất, nằm giữa hai chân cọc để giăng dây nối đến hai đỉnh C và D của hai cọc (như hình vẽ dưới). Hỏi người ta phải đặt chốt ở vị trí cách A một khoảng bằng bao nhiêu trên mặt đất để tổng độ dài của hai sợi dây đó là ngắn nhất?



Bài 8. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), ba đường cao AD, BF, CE cắt nhau tại H, vẽ $OK\perp BC\ (K\in BC)$. Gọi I là trung điểm của AH, gọi J giao điểm của AH và EF, kẻ đường kính AP của đường tròn (O).

a) Chứng minh: $OK=\frac{1}{2}AH$ và IK đi qua trung điểm của EF.

b) Đường thẳng qua B song song với AC cắt đường thẳng CE tại S. Chứng minh $IF^2=IJ.ID$ và $KS//CJ$.

Bài 9. Cho tam giác ABC có ba cạnh tiếp xúc với đường tròn (I). Gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) với AC và AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC. Chứng minh ba đường thẳng BI, MN, EF đồng quy.

Bài 10. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn: $xyz(x+y+z)=3$. Chứng minh rằng:

$$x^2+y^2+z^2\leq\frac{1}{243}(x^5-2x+4)^2\times\\\times(y^2-2y+4)^2(z^5-2z+4)^2.$$

HÀ VĂN NHÂN

(GV THCS Hoằng Xuân, Hoằng Hóa, Thanh Hóa)

Giới thiệu

THỬ SỨC TRƯỚC KỲ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2025

ĐỀ SỐ 4

(Thời gian làm bài: 90 phút)

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN. *Thí sinh trả lời từ câu* 1 *đến câu* 12, *mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;3)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x+y-3z+2025=0$. Gọi d là đường thẳng đi qua M, cắt trục Ox và song song với (α). Đường thẳng d đi qua điểm nào sau đây?

A. $A(2;0;0)$ **B.** $B(6;-1;-3)$

C. $C(-6;-1;-3)$ **D.** $D(4;1;3)$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}=60°$, $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{abc}{4}$ **B.** $\dfrac{abc}{6}$

C. $\dfrac{\sqrt{2}abc}{12}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{3}abc}{12}$.

Câu 3. Cho hai số thực a,b tùy ý, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên tập $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$

B. $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$

C. $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)+F(a)$

D. $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(a)-F(b)$.

Câu 4. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_{2024}\left(x^2+2x-2007\right)=2025$ bằng

A. 1 **B.** $-\dfrac{2007}{2}$

C. -2 **D.** -1.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm I. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm của SA. Hai điểm E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên SB,SD và N là giao điểm của SC với (MEF). Biết rằng: $AB=\sqrt{2}a, AD=\sqrt{3}a, SA=2a$,

$$\overrightarrow{SI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SM}+y.\overrightarrow{SE}+z.\overrightarrow{SN}+t.\overrightarrow{SF}$$

trong đó $x,y,z,t\in\mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $\dfrac{1}{2}+y+z+t$ bằng

A. 1 **B.** $\dfrac{13}{4}$

C. 13 **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Câu 6. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_1=4$, $u_3=10$. Giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_1u_2}+\dfrac{1}{u_2u_3}+\ldots+\dfrac{1}{u_{n-1}u_n}\right)$ bằng

A. $\dfrac{1}{12}$ **B.** $\dfrac{1}{3}$

C. $\dfrac{1}{6}$ **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Câu 7. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\left(2025x-x^2\right)\sqrt{x^2+3x+2}}$ có chứa bao nhiêu số nguyên?

A. 2025 **B.** 2026

C. 202 **D.** 2028.

Câu 8. Cho $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=-\tan x-\cot x+C$

B. $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=-\tan x+\cot x+C$

C. $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}+C$

D. $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{\sin 2x}+C$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	1	↘	$-\sqrt{2}$	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	-1

Tổng số đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang, tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{5f(x)+6}$ bằng

A. 5 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 3.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x+2)^2(x-3)^3, \forall x\in\mathbb{R}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;1)$ **B.** $(1;3)$ **C.** $(1;+\infty)$ **D.** $(-2;3)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y-z-3=0$. Gọi α,β,γ lần lượt là góc tạo bởi các trục toạ độ Ox,Oy,Oz với mặt phẳng (P). Giá trị của biểu thức $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$ bằng

A. $\dfrac{4}{\sqrt{6}}$ **B.** 0 **C.** $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{30}}{3}$ **D.** 2.

Câu 12. Tuổi của các học viên của một lớp tiếng Anh buổi tối ở một trung tâm ghi lại trong bảng tần số ghép nhóm sau:

Tuổi của học viên	[15;20)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	
Số học viên	10	12	14	9	5	$n=50$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm thuộc khoảng nào sau đây?

A. (6;18) **B.** (18;30)

C. (0;6) **D.** (30;47).

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý* a), b), c), d) *ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Câu 1. Một nhà máy có hai phân xưởng X và Y. Phân xưởng X sản xuất 47% và phân xưởng Y sản xuất 53% số sản phẩm của cả nhà máy. Tỉ lệ sản phẩm bị lỗi của phân xưởng X, Y lần lượt là 0,8% và 0,5%. Kiểm tra ngẫu nhiên một sản phẩm của nhà máy.

a) Xác suất để sản phẩm đó bị lỗi là 1,3%.

b) Nếu sản phẩm kiểm tra bị lỗi thì xác suất để sản phẩm lỗi đó do phân xưởng X sản xuất là khoảng 58,66%.

c) Nếu sản phẩm kiểm tra bị lỗi thì xác suất để sản phẩm lỗi đó do phân xưởng Y sản xuất là khoảng 41,34%.

d) Nếu sản phẩm kiểm tra bị lỗi thì xác suất để sản phẩm lỗi đó do phân xưởng X sản xuất cao gấp 1,6 lần xác suất để sản phẩm lỗi đó do phân xưởng Y sản xuất.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;-3),B(-1;4;1),C(2;5;0)$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$. Gọi M là điểm thay đổi trên Δ. Biểu thức $MA+2MB+3MC$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng m khi M trùng với $M_0(a;b;c)$.

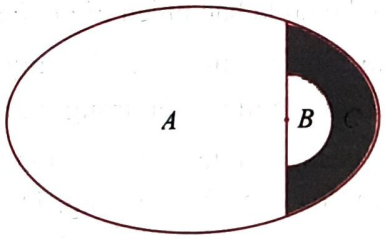
a) Đường thẳng Δ có một phương trình tham số là $\begin{cases}x=-2+t\\y=2-t\\z=-3+2t\end{cases}$.

b) $MA\geq\sqrt{\dfrac{101}{6}}$.

c) $m=\sqrt{\dfrac{101}{6}}+\sqrt{\dfrac{65}{6}}+\sqrt{\dfrac{155}{6}}$.

d) $a+b+c=\dfrac{2}{3}$.

Câu 3. Một bể bơi hình elip (E), có độ dài trục lớn bằng 10m và trục nhỏ bằng 8m. Khu vực A là chứa nước, khu vực B là bậc thang lên xuống bể bơi, là nửa hình tròn có tâm là một tiêu điểm của elip, bán kính bằng 1. Phần còn lại là khu vực C (phần tô đậm) người ta lát gạch như hình vẽ.



Chi phí lát gạch cho mỗi mét vuông là 400 000 đồng.

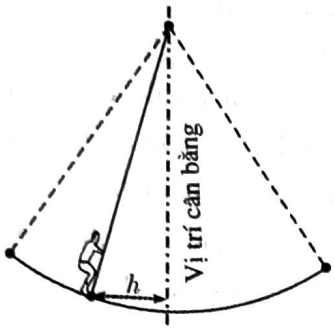
a) Elip (E) có tiêu cự bằng 6m.

b) Diện tích khu vực B bằng $\frac{\pi}{2}$ m^2.

b) Diện tích khu vực C bằng khoảng 8,946m^2.

d) Chi phí lát gạch khu vực C bằng khoảng 3578000 đồng.

Câu 4. Mùa xuân ở Hội Lim (Tiên Du, Bắc Ninh) thường có trò chơi đu. Giả sử một người chơi đu nhún đều làm cho cây đu đưa người đó dao động qua lại quanh vị trí cân bằng, khoảng cách h từ người chơi đu đến vị trí cân bằng được xác định bởi $h=\left|3\cos\frac{(2t-1)\pi}{3}\right|$, với h tính bằng mét, thời gian t $(t\geq 0)$ tính bằng giây.



a) Chu kì của dao động là 3s.

b) Khoảng cách lớn nhất của người chơi đu đến vị trí cân bằng là 3m.

c) Tại thời điểm t = 5s người chơi đu đang ở vị trí cân bằng.

d) Trong khoảng thời gian 10 giây đầu tiên, có 5 lần người chơi đu ở xa vị trí cân bằng nhất.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.*

Câu 1. Ông A muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288m^3. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500 nghìn đồng/m^2. Nếu ông A biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông A trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là bao nhiêu triệu đồng?

Câu 2. Cho hình vuông có cạnh bằng 2dm. Gọi (Γ) là tập hợp các điểm bên trong hình vuông và có khoảng cách đến tâm hình vuông nhỏ hơn khoảng cách đến cạnh hình vuông. Diện tích của miền (Γ) bằng bao nhiêu dm^2 (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*)?

Câu 3. Cho tứ diện $ONPQ$ có ON, OP, OQ đôi một vuông góc với nhau và $ON=2.OP=2.OQ=11$. Gọi I là điểm thỏa mãn $11.\overrightarrow{OI}=-\overrightarrow{ON}+2.\overrightarrow{OP}-2.\overrightarrow{OQ}$. Lấy điểm M chạy tùy ý trên mặt phẳng (NPQ). Gọi A, B, C là các điểm phân biệt sao cho $IA=IB=IC=\sqrt{12}$ và $\widehat{MAI}=\widehat{MBI}=\widehat{MCI}=90°$. Khi M thay đổi thì mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm cố định H. Độ dài đoạn OH bằng bao nhiêu (*làm tròn đến hàng phần chục*)?

Câu 4. Một người có thể có nhóm máu A, B, AB hoặc O. Người có nhóm máu AB có thể nhận máu của bất kì nhóm nào. Những người có nhóm máu còn lại chỉ có thể nhận máu của người cùng nhóm với mình hoặc nhóm O. Người ta thống kê được rằng, tỉ lệ người có nhóm máu A, B, AB, O lần lượt khoảng 37,5%; 20,9%; 7,9%; 33,7%. Chọn ngẫu nhiên một người cần tiếp máu và hai người cho máu. Xác suất để sự truyền máu có thể thực hiện được bằng bao nhiêu (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*)?

Câu 5. Cho đường tròn tâm (O). Bước 1, lấy một đường kính của đường tròn đó, tại mỗi đầu mút của đường kính ghi số 1. Bước 2, tại điểm chính giữa của mỗi cung nhận được ghi số 2. Bước 3, coi 4 điểm đã ghi số ở trên là các điểm chia đường tròn; khi đó, đường tròn được chia thành 4 cung nhỏ bằng nhau; tại điểm chính giữa của mỗi cung nhỏ này ta ghi số có giá trị bằng tổng của hai số đã được ghi ở hai đầu cung tương ứng. Cứ tiếp tục quá trình như vậy, hỏi sau ít nhất bao nhiêu bước thì tổng tất cả các số được ghi trên đường tròn là lớn hơn 12^{2025}?

Câu 6. Công thức tính công suất đầu ra P của pin là $P=E\cdot I-R\cdot I^2$, trong đó P có đơn vị là oát (W), E là suất điện động tính bằng vôn (V), R là điện trở tính bằng ôm (Ω) và I là cường độ dòng điện tính bằng ampe (A). Trong một cục pin mà $E=12$ (V) và $R=0,5$ (Ω) thì cường độ dòng điện (tính bằng ampe) tương ứng với giá trị lớn nhất của P bằng bao nhiêu?

NGUYỄN VĂN XÁ

(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*)

TỪ BÀI TOÁN TỰ LUẬN XÂY DỰNG CÂU HỎI THEO DẠNG THỨC 2 TRONG CẤU TRÚC ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THPT TỪ NĂM 2025

NGUYỄN THANH GIANG - QUÁCH THỊ TUYẾT NHUNG
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

Theo phương án tổ chức Kỳ thi và xét công nhận tốt nghiệp trung học phổ thông từ năm 2025 (Quyết định số 4068/QĐ-BGDĐT ngày 28/11/2023 của Bộ GDĐT), môn Toán với hình thức thi trắc nghiệm 3 dạng thức được sử dụng trong đề thi. Dạng thức 2: Câu hỏi trắc nghiệm dạng Đúng/Sai, mỗi câu hỏi có 4 ý, thí sinh phải trả lời Đúng/Sai đối với từng ý của câu hỏi. Dạng thức này đòi hỏi thí sinh phải có năng lực, kiến thức kỹ năng toàn diện mới đạt được điểm tối đa, hạn chế được việc dùng "mẹo mực" chọn đáp án từ các phương án nhiễu như của dạng trắc nghiệm nhiều lựa chọn. Xác suất đánh ngẫu nhiên đạt điểm tối đa là 1/16, nhỏ hơn 4 lần so với dạng thức trắc nghiệm nhiều lựa chọn. Dạng thức 2 qua thực tế cho thấy phù hợp với việc thiết kế đề thi theo định hướng đánh giá năng lực, đồng thời nâng cao khả năng phân loại thí sinh.

Bài viết này trình bày cách xây dựng câu hỏi theo dạng thức 2 xuất phát từ bài toán tự luận quen thuộc. Bài viết có tham khảo tài liệu Tập huấn sách giáo khoa môn Toán theo Chương trình GDPT 2018 (Bộ sách SGK: *Kết nối tri thức với cuộc sống* và *Chân trời sáng tạo*).

Cách 1: ***Bắt đầu từ một bài tự luận có yêu cầu giải quyết vấn đề cụ thể. Chia quy trình giải quyết vấn đề thành 4 bước, gắn mỗi bước với một câu hỏi.***

Thí dụ 1. *Xét chiều biến thiên của hàm số*

$$y=\frac{x^2+x-1}{x-1}.$$

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Ta có:

$$y=\frac{x^2+x-1}{x-1}\Rightarrow y'=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y		↗	1	↘	‖	↘	5	↗	
	$-\infty$				$+\infty$				$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(2;+\infty)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(0;1),(1;2)$.

Khi đó có thể ra câu hỏi dạng thức 2 như sau:

Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$.

a) *Tập xác định của hàm số là* $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) *Phương trình* $y'=0$ *có hai nghiệm nguyên.*

c) *Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng* $(0;1)$ *và* $(2;+\infty)$.

d) *Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng* $(0;1)$ *và* $(1;2)$.

Thí dụ 2. *Tìm giá trị lớn nhất của hàm số*

$$y=\cos 2x+2\sin x \text{ trên đoạn } \left[0;\frac{\pi}{2}\right].$$

Lời giải. Xét hàm số $y=\cos 2x+2\sin x$ trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Ta có: $y'=-2\sin 2x+2\cos x$

$$=-4\sin x.\cos x+2\cos x=2\cos x(-2\sin x+1).$$

Ta có:

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\\sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z}).$$

Xét trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $y'=0$ có các nghiệm $x=\frac{\pi}{6};x=\frac{\pi}{2}$. Ta có: $y(0)=1;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1;y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$.

Suy ra $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} y=\frac{3}{2}$.

Khi đó có thể ra câu hỏi dạng thức 2 như sau:

Cho hàm số $f(x)=\cos 2x+2\sin x$.

a) $f'(x)=2\cos x(-2\sin x+1)$.

b) $f'(x)=0\Leftrightarrow\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

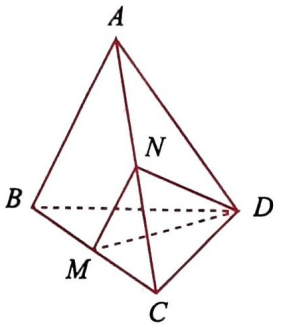
c) *Xét trên đoạn* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $y'=0$ *có các nghiệm* $x=\frac{\pi}{6};x=\frac{\pi}{2}$.

d) *Giá trị lớn nhất của hàm số* $y=\cos 2x+2\sin x$ *trên đoạn* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ *là* 2.

Thí dụ 3. *Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a, M là trung điểm cạnh BC. Tính góc giữa AB và DM.*

Lời giải. Gọi N là trung điểm của AC. Khi đó MN là đường trung bình của ΔABC, và do đó:

$$\begin{cases} MN\ //\ AB\ (*) \\ MN=\frac{1}{2}AB=\frac{a}{2}. \end{cases}$$



Vì ΔBCD và ΔACD là các tam giác đều cạnh bằng a nên $MD=ND=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Từ (*) suy ra: $(AB,DM)=(MN,DM)$.

Xét ΔMND có: $\cos\widehat{DMN}=\frac{MN^2+MD^2-ND^2}{2MN\cdot MD}$

$$=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}>0$$

$\Rightarrow\widehat{DMN}$ là góc nhọn.

Vậy $(AB,DM)=(MN,DM)=\widehat{DMN}$ nên

$$\cos(AB,DM)=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Khi đó có thể ra câu hỏi dạng thức 2 như sau:

Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a, M là trung điểm cạnh BC, N là trung điểm của AC. Khi đó:

a) $MN\ //\ AB$.

b) $MD=ND=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

c) $(AB,DM)=(MN,DM)$.

d) $\cos(AB,DM)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Thí dụ 4. *Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc* $v_0=16\ (m/s)$ *thì tăng tốc với gia tốc* $a(t)=t^2+3t\ (m/s^2)$. *Tính quãng đường vật đi được trong 4 giây đầu tiên kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.*

Lời giải. Gọi $v(t)$ là vận tốc của chất điểm ở thời điểm t thì $v(t)$ là một nguyên hàm của $a(t)=t^2+3t$. Vì $v(t)=\frac{t^3}{3}+\frac{3}{2}t^2+C$ nên khi $t=0$ thì $C=16$, do đó $v(t)=\frac{t^3}{3}+\frac{3}{2}t^2+16$. Quãng đường vật đi được trong 4 giây đầu tiên kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là $S=\int\limits_0^4 v(t)dt$

$$=\int\limits_0^4\left(\frac{t^3}{3}+\frac{3}{2}t^2+16\right)dt=\left(\frac{t^4}{12}+\frac{t^3}{2}+16t\right)\Bigg|_0^4=\frac{352}{3}(\text{m}).$$

Khi đó có thể ra câu hỏi dạng thức 2 như sau:

Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0=16$ (m/s) *thì tăng tốc với gia tốc* $a(t)=t^2+3t$ (m/s^2).

a) *Gọi* $v(t)$ *là vận tốc của chất điểm ở thời điểm* t *thì* $v(t)$ *là một nguyên hàm của* $a(t)=t^2+3t$.

b) $v(t)=\frac{t^3}{3}+\frac{3}{2}t^2+10$.

c) *Vận tốc của vật tại thời điểm* $t=2$ (s) *là* 70 (m/s).

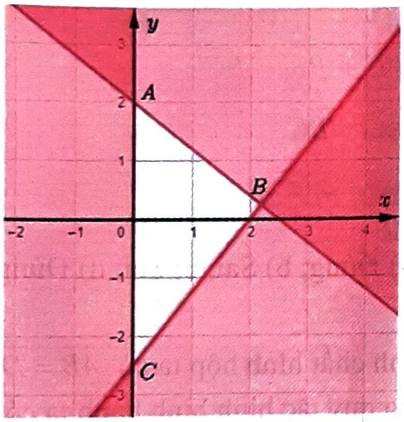
d) *Quãng đường vật đi được trong 4 giây đầu tiên kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là* $\frac{352}{3}$ (m).

Thí dụ 5. *Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình* $\begin{cases} x \ge 0 \\ 5x-4y \le 10 \\ 4x+5y \le 10 \end{cases}$ (*).

Lời giải. Đường thẳng $x=0$ là trục Oy. Điểm $(1;0)$ thoả mãn điều kiện $x \ge 0$ nên miền nghiệm của bất phương trình $x \ge 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy chứa điểm $(1;0)$. Trong mặt phẳng toạ độ, ta vẽ đường thẳng $d_1: 5x-4y-10=0$, điểm $O(0;0)$ thoả mãn bất phương trình $5x-4y \le 10$ nên miền nghiệm của bất phương trình $5x-4y \le 10$ là nửa mặt phẳng bờ $d_1: 5x-4y-10=0$ chứa điểm $O(0;0)$.

Trong mặt phẳng toạ độ, ta vẽ đường thẳng $d_2: 4x+5y=10$, điểm $O(0;0)$ thoả mãn bất phương trình $4x+5y \le 10$ nên miền nghiệm của bất phương trình $4x+5y \le 10$ là nửa mặt phẳng bờ $d_2: 4x+5y-10=0$ chứa điểm $O(0;0)$.

Miền nghiệm của bất phương trình (*) là tam giác ABC được biểu diễn như sau:



trong đó: $A(0;2)$, $C\left(0;-\frac{5}{2}\right)$ và $B\left(\frac{90}{41};\frac{10}{41}\right)$.

Khi đó có thể ra câu hỏi theo dạng thức 2 như sau:

Cho x, y là các số thực thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ 5x-4y \le 10 \\ 4x+5y \le 10 \end{cases} \quad (*).$$

a) *Miền nghiệm của bất phương trình $x \ge 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy chứa điểm $(1;0)$.*

b) *Miền nghiệm của bất phương trình $5x-4y \le 10$ là nửa mặt phẳng bờ $d_1: 5x-4y-10=0$ không chứa điểm $O(0;0)$.*

c) *Miền nghiệm của bất phương trình $4x+5y \le 10$ là nửa mặt phẳng bờ $d_2: 4x+5y-10=0$ chứa điểm $O(0;0)$.*

d) *Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là một tam giác với toạ độ ba đỉnh lần lượt là*

$$\left(0;\frac{5}{2}\right), (0;-2) \text{ và } \left(\frac{90}{41};\frac{10}{41}\right).$$

Thí dụ 6. *Cho hàm số* $y=f(x)=\frac{2x^2+mx+m}{x+1}$. *Tìm m để qua điểm $A(0;1)$ không có đường thẳng nào là tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho.*

Lời giải. Với mọi $x \ne -1$: $f'(x)=\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$.

Đường thẳng (d) qua $A(0;1)$ hệ số góc k có phương trình $y=kx+1$. (d) không tiếp xúc với đồ thị hàm số đã cho khi hệ

$$\begin{cases} \frac{2x^2+mx+m}{x+1}=kx+1 \quad (1) \\ \frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}=k \quad (2) \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Thay (2) vào (1) ta có:

$$(m-3)x^2+2(m-1)x+m-1=0 \quad (3).$$

Dễ thấy $m=3$ phương trình (3) có nghiệm $x=\frac{-1}{2} \Rightarrow m=3$ bị loại.

Xét $m \ne 3$, (d) không tiếp xúc với đồ thị hàm số đã cho khi và chỉ khi phương trình (3) vô nghiệm hoặc (3) có nghiệm kép $x=-1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta'=(m-1)^2-(m-1)(m-3)<0 \\ \begin{cases} \Delta'=0 \\ m-3-2(m-1)+m+1=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1<0 \\ \begin{cases} \Delta'=2(m-1)=0 \Leftrightarrow m<1. \\ -2=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Khi đó có thể ra câu hỏi theo dạng thức 2 như sau:

Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x^2 + mx + m}{x+1}$. *Khi đó*

a) $\forall x \neq -1 : f'(x) = \dfrac{2x^2 - 4x}{(x+1)^2}$.

b) $f'(1) = \dfrac{3}{2}$.

c) *Đường thẳng qua điểm* $A(0;1)$ *hệ số góc* k *có phương trình là* $y = kx + 1$.

d) *Qua điểm* $A(0;1)$ *không có đường thẳng nào là tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho khi* $m > 1$.

Cách 2: *Bắt đầu từ một bối cảnh, hỏi 4 khía cạnh khác nhau từ bối cảnh đó*

• *Bắt đầu từ mô hình hình không gian như hình chóp, hình lăng trụ, hình lập phương,... ta có thể xây dựng câu hỏi dạng thức 2 như sau:*

Thí dụ 1. *Cho hình chóp* $S.ABCD$, *đáy* $ABCD$ *là hình thoi tâm* O *cạnh* a, *góc* $\widehat{ABC} = 60^0$. *Tam giác* SAC *đều, tam giác* SBD *cân tại* S. *Khi đó:*

a) $(SAC) \perp (ABCD)$.

b) $((SBD),(ABCD)) = 60^0$.

c) $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

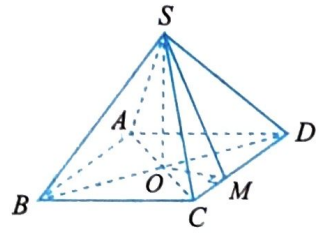
d) $((SCD),(ABCD)) \approx 60,43^0$.

Kết quả. a) Đúng; b) Sai; c) Sai; d) Sai.

Lời giải. Tam giác SAC đều có O là trung điểm AC nên $SO \perp AC$ (1). Tam giác SBD cân tại S có O là trung điểm BD nên $SO \perp BD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Mặt khác SO chứa trong hai mặt phẳng $(SAC),(SBD)$ nên $(SAC) \perp (ABCD)$, $(SBD) \perp (ABCD)$.



Các tam giác ABC, ACD lần lượt cân tại B và D, mà $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 60^0$ nên hai tam giác ABC, ACD đều cạnh a. Kẻ đường cao OM của tam giác OCD. Ta có:

$$\begin{cases} CD \perp OM \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOM) \Rightarrow CD \perp SM.$$

Khi đó: $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ OM \perp CD, SM \perp CD \\ OM \subset (ABCD), SM \subset (SCD) \end{cases}$

$$\Rightarrow ((SCD),(ABCD)) = (SM,OM) = \widehat{SMO}.$$

Tam giác SAC đều nên $SO = \dfrac{AC\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $OC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a}{2}, OD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tam giác OCD vuông tại O, đường cao OM nên

$$\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} \Rightarrow OM = \frac{OC \cdot OD}{\sqrt{OC^2 + OD^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Tam giác SOM vuông tại O có:

$$\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{4}} = 2 \Rightarrow \widehat{SMO} \approx 63,43^0.$$

Vậy $((SCD),(ABCD)) = \widehat{SMO} \approx 63,43^0$.

Thí dụ 2. *Cho hình lập phương* $ABCD.A'B'C'D'$. *Gọi* O *là tâm của mặt* $ABCD$. *Gọi* M *là trọng tâm* ΔBCD. *Lấy* N *trên đoạn* $C'D$ *sao cho* $C'N = xC'D$. *Khi đó:*

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D'C'}$.

b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC'}$.

c) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

d) *Nếu* $MN \parallel BD'$ *thì* $x = \dfrac{2}{3}$.

Kết quả. a) Đúng; b) Sai; c) Sai; d) Đúng.

Lời giải.

a) Theo tính chất hình hộp ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D'C'}$.

b) Áp dụng quy tắc hình bình hành ta có:

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}.$$

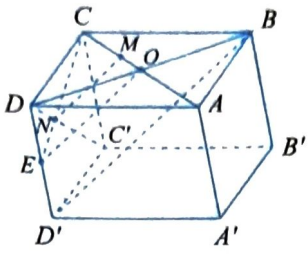
Suy ra: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{BD'}$.

c) Ta có:

$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{BC}.$$

d) Gọi E là trung điểm của DD'. Nối $C'D$ cắt CE tại $N' \Rightarrow N'$ là trọng tâm của tam giác CDD'.

Ta có OE là đường trung bình của tam giác BDD' suy ra $OE // BD'$.



Mặt khác $\dfrac{CN'}{CE}=\dfrac{CM}{CO}$ nên $MN' // OE$ suy ra $MN' // BD'$. Theo bài ra, ta có: $MN // BD'$

$\Rightarrow N\equiv N'$. Vì $N,N'\in C'D \Rightarrow C'N=\dfrac{2}{3}C'D \Rightarrow x=\dfrac{2}{3}$.

Thí dụ 3. *Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a, AD=b, AA'=c$. Khi đó:*

a) $AB\perp(ADD'A')$.

b) *Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BD' bằng:* $\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

c) *Gọi I,J theo thứ tự là tâm của các hình chữ nhật $ADD'A', BCC'B'$. Khi đó IJ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AD' và $B'C$.*

d) *Khoảng cách hai đường thẳng AD' và $B'C$ bằng $2a$.*

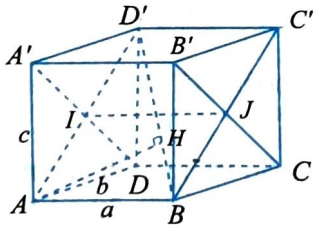
Kết quả. a) Đúng; b) Sai; c) Đúng; d) Sai.

Lời giải. Kẻ đường cao AH trong tam giác ABD', suy ra $d(A,BD')=AH$.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $AB\perp(ADD'A')$, suy ra $AB\perp AD'$ hay tam giác ABD' vuông tại A. Tam giác ADD' vuông tại D có: $AD'=\sqrt{AD^2+DD'^2}=\sqrt{b^2+c^2}$.

Tam giác ABD' vuông tại A có đường cao AH nên

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AD'^2}$$



$$\Rightarrow AH=\frac{AB\cdot AD'}{\sqrt{AB^2+AD'^2}}=\frac{a\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Vậy $d(A,BD')=\dfrac{a\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $\begin{cases}AB // C'D'\\ AB=C'D'\end{cases}\Rightarrow ABC'D'$ là hình bình hành.

Dễ thấy I,J lần lượt là trung điểm của AD' và BC' suy ra IJ là đường trung bình của hình bình hành $ABC'D'\Rightarrow IJ // AB$, mà $AB\perp AD'$ nên $IJ\perp AD'$ (1). Ta có:

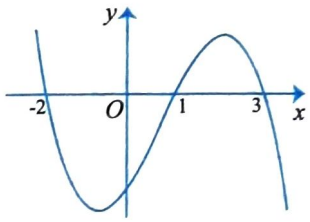
$AB\perp(BCC'B')\Rightarrow AB\perp B'C\Rightarrow IJ\perp B'C$ (2).

Ta thấy IJ cắt cả hai đường thẳng $AD', B'C$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra IJ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AD' và $B'C$. Ta có $IJ=AB=a$.

• *Từ bối cảnh là các đồ thị hàm số hoặc bảng biến thiên của hàm số, ta cũng có thể xây dựng được các câu hỏi dạng thức 2*

Thí dụ 4. *Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:*



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) *Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.*

b) $f(2)>f\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

c) $f(5)<f(6)$.

d) *Hàm số $g(x)=f(|4-2x|)$ nghịch biến trên khoảng* $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Kết quả. a) Đúng; b) Sai; c) Sai; d) Đúng.

Lời giải. a) Dựa vào đồ thị ta có:

x	$-\infty$	-2		1		3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0 $-$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$ là mệnh đề đúng.

b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$ nên

$$2<\frac{5}{2}\Rightarrow f(2)<f\left(\frac{5}{2}\right).$$

Do đó $f(2)>f\left(\frac{5}{2}\right)$ là mệnh đề sai.

c) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$ nên $5<6\Rightarrow f(5)<f(6)$ là mệnh đề sai.

d) Với $x\le 2$ thì $g(x)=f(4-2x)$. Ta có:

$g'(x)=-2f'(4-2x);g'(x)<0\Leftrightarrow f'(4-2x)>0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4-2x<-2\\1<4-2x<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}.\end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện $x\le 2$ ta được $g(x)$ nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ là mệnh đề đúng.

Thí dụ 5. *Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:*

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) *Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=-1$ và đạt cực đại tại $x=1$.*

b) *Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.*

c) *Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng -2.*

d) *Khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho đến gốc toạ độ O bằng 5.*

Kết quả. a) Sai; b) Đúng; c) Sai; d) Sai.

Lời giải. a) Từ bảng biến thiên ta có: hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=-1$ và đạt cực tiểu tại $x=1$. Suy ra mệnh đề sai.

b) Từ bảng biến thiên ta có hàm số đã cho có hai điểm cực trị, mệnh đề đúng.

c) Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 2, suy ra mệnh đề sai.

d) Khoảng cách từ điểm cực đại $M(-1;2)$ của đồ thị hàm số đã cho đến gốc toạ độ O bằng:

$OM=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$. Suy ra mệnh đề sai.

• *Bắt đầu từ một tình huống thực tế trong bài toán thống kê, xác suất khi đó có thể hỏi 4 khía cạnh khác nhau từ tình huống đó.*

Thí dụ 6. *Khảo sát thời gian xem điện thoại trong một ngày của một số học sinh khối 12 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:*

Thời gian (phút)	[0;20)	[20;40)	[40;60)	[60;80)	[80;100)
Số học sinh	4	8	12	10	8

a) *Tổng số học sinh được khảo sát là 42.*

b) *Mốt của mẫu số liệu lớn hơn 54.*

c) *Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu lớn hơn 38.*

d) *Phương sai của mẫu số liệu nhỏ hơn 610.*

Kết quả. a) Đúng; b) Sai; c) Đúng; d) Đúng.

Lời giải. a) Tổng số học sinh được khảo sát là:

$$n=4+8+12+10+8=42.$$

b) Nhóm có tần số lớn nhất là $[40;60)$.

Mốt của mẫu số liệu là

$$M_0=40+\frac{12-8}{(12-8)+(12-10)}\cdot(60-40)\approx 53,3.$$

c) Gọi $x_1,x_2,\ldots,x_{42}$ là thời gian xem điện thoại trong ngày của 42 học sinh khối 12 và giả sử dãy này đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Khi đó tứ phân vị thứ nhất Q_1 là trung vị của dãy x_1, x_2,..., x_{21} nên $Q_1=x_{11}$. Do đó Q_1 thuộc nhóm $[20;40)$.

Tứ phân vị thứ ba Q_3 là trung vị của dãy $x_{22},x_{23},\ldots,x_{42}$ nên $Q_3=x_{32}$. Do đó Q_3 thuộc nhóm $[60;80)$.

Suy ra: $Q_1=20+\frac{\frac{42}{4}-4}{8}\cdot(40-20)=36,25.$

$$Q_3=60+\frac{\frac{3\cdot 42}{4}-24}{10}\cdot(80-60)=75.$$

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là:

$$\Delta Q=Q_3-Q_1=75-36,25=38,75.$$

d) Số trung bình của mẫu số liệu là:

$$\overline{x}=\frac{4\cdot 10+8\cdot 30+12\cdot 50+10\cdot 70+8\cdot 90}{42}\approx 54,76.$$

Phương sai của mẫu số liệu là:

$$s^2=\frac{4\cdot(10-54,76)^2+8\cdot(30-54,76)^2+12\cdot(50-54,76)^2}{42}$$

$$+\frac{10\cdot(70-54,76)^2+8\cdot(90-54,76)^2}{42}\approx 605,9.$$

(Xem tiếp trang 42)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/574 (Lớp 6). Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn:

$$a^2+b^2+c^2+4b+6=2a+2c+8abc.$$

Chứng minh $a+b+c$ là số chẵn.

CAO NGỌC TOẢN

(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

Bài T2/574 (Lớp 7). Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Lấy điểm M bên trong tam giác sao cho $\widehat{MBC}=\widehat{MCA}=15^0$. Đường thẳng qua M song song với BC cắt tia phân giác của góc $\widehat{MBA}$ tại N. Chứng minh rằng tam giác AMN là tam giác đều.

NGUYỄN NGỌC HÙNG

(GV THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Hà Tĩnh)

Bài T3/574. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(m; n)$ sao cho 2^m+5^n+1 là một số chính phương.

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T4/574. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AD (D thuộc cạnh BC). Trên đoạn CD lấy điểm F (F khác C, D). Kẻ FE vuông góc với AB tại E. Qua A kẻ đường thẳng Ax vuông góc với AF, Ax cắt đường thẳng DE tại H. Gọi I là trung điểm của AF. Chứng minh ba điểm C, I, H thẳng hàng.

BÙI VĂN CHI

(Số nhà 21/2 Đường Lê Hồng Phong, TP. Quy Nhơn, Tỉnh Bình Định)

Bài T5/574. Giải phương trình $\sqrt{2x+6}=x^2+3x$.

NGUYỄN HỮU CHUNG

(K26 Lý I, Trường CĐSP Thái Bình)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/574. Cho ba số thực a, b, c đều khác 0 và hai đa thức

$$f(x)=ax^2+2bx+c,\ g(x)=ax^2+bx+2c$$

có nghiệm chung. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$S=25a^2-60b^2+4c^2+30.$$

NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT chuyên Chu Văn An, Bình Định)

Bài T7/574. Ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt qua x. Cho dãy số (u_n) với

$$u_n=\left[\sqrt{n^4+4n^3+6n^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right],\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Tìm $P=\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+\ldots+\dfrac{1}{u_{2025}}$.

VŨ HỒNG PHONG

(GV THPT Tiên Du số 1, Bắc Ninh)

Bài T8/574. Cho tam giác ABC nhọn không cân. I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác; A_1, B_1, C_1 lần lượt là điểm đối xứng của I qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

a) Đường tròn ngoại tiếp các tam giác A_1BC, C_1AB, B_1CA cùng đi qua một điểm. Gọi điểm đó là K.

b) Chứng minh rằng bốn điểm A_1, B_1, C_1, K cùng thuộc một đường tròn và đường tròn đó có tâm là I.

HÀ ĐÌNH TIẾN ANH

(Trường THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T9/574. *An* xếp ngẫu nhiên 5 quả bóng vào 5 chiếc hộp rỗng.

a) Gọi A là biến cố: "Số bóng trong cả 5 hộp là một số lẻ"; B là biến cố: "Có đúng 3 hộp có số bóng là số lẻ". Tính $P(A)$ và $P(B)$.

b) Lát sau *An* lại xếp ngẫu nhiên thêm 2 quả bóng vào 5 chiếc hộp đó. Gọi E là biến cố: "Số bóng trong cả 5 hộp là một số lẻ". Tính $P(E|A)$, $P(E|B)$ và $P(E)$.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T10/574 Xét dãy số (x_n) thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = [ax_n] + [bx_n], \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

trong đó a, b là các số thực. Giả sử α, β là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2025x - 1 = 0$, và biết $\alpha > \beta$. Ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt qua x.

a) Trong trường hợp $a = \alpha$, $b = \beta$, chứng minh rằng $x_{2025} + 1$ chia hết cho 45.

b) Trong trường hợp $a = \alpha$, $b = 0$, tìm số dư trong phép chia x_{2025} cho 2025.

NGUYỄN TRẦN HOÀNG
(SV Khoa Toán Tin, ĐHSP Hà Nội)

Bài T11/574. Tìm hàm số $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$ và thỏa mãn

$$f(xy) + \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{f(x)}{\sqrt{y}} + \frac{f(y)}{\sqrt{x}} + \sqrt{xy},$$

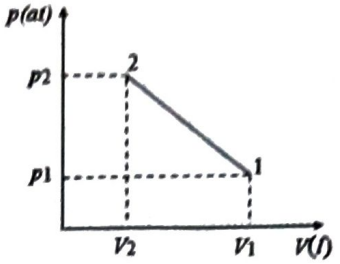
$\forall x, y \in (0;+\infty)$.

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong số 2 Bắc ninh)

Bài T12/573. Cho hình chữ nhật $ABCD$ và $\alpha, \beta \in (0; 90^0)$. Điểm E thay đổi trên cạnh AB. Về phía ngoài tam giác ECD dựng các hình chữ nhật $DEFH$, $CEGI$ sao cho $\widehat{EDH} = \alpha, \widehat{CEI} = \beta$. Gọi N là giao điểm của FB và AG. Chứng minh rằng NE luôn đi qua một điểm cố định.

ĐẬU ANH HÙNG
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)
LỤC BÌNH
(GV Trường Trưng Vương, Quảng Trị)

Bài L1/574. Một lượng khí biến đổi rất chậm từ trạng thái 1 sang trạng thái 2 theo đồ thị như hình dưới. Hãy tìm nhiệt độ cực đại của khí trong quá trình này. Cho biết $V_1 = 2$ L; $V_2 = 6$ L; $p_1 = 1{,}8$ atm; $p_2 = 4{,}2$ atm và nhiệt độ ở trạng thái 1 là 225 °C.



VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/574. Một vòng dây tròn, mảnh có bán kính r đặt trong mặt phẳng vuông góc với các đường sức của một từ trường đều có cảm ứng từ B thay đổi theo quy luật: $B = kt$, trong đó k là một hằng số dương. Hãy tính cường độ điện trường E tại các điểm nằm trên vòng dây.

THANH LÂM (*Hà Nội*)

Đính chính: Bài T3/572 (trang 23, số tháng 2.2025) đã viết: $P = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}+\sqrt{...+\sqrt{n}}}}$

Xin được sửa là: $P = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n}}}}}$

Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

TH&TT

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/574 (Grade 6). Given positive integers a, b, c satisfying

$$a^2+b^2+c^2+4b+6=2a+2c+8abc.$$

Prove that $a + b + c$ is even.

Problem T2/574 (Grade 7). Given a right triangle ABC with the right-angle A. Let M be the point inside the triangle so that $\widehat{MBC}=\widehat{MCA}=15^0$. The line through M parallel to BC intersects the angle bisector of $\widehat{MBA}$ at N. Prove that triangle AMN is an equilateral triangle.

Problem T3/574. Find all pairs of natural numbers $(m; n)$ such that 2^m+5^n+1 is a perfect square. ☞

Problem T4/574. Given a right triangle ABC with the right-angle A and the altitude AD (D belongs to side BC). Inside the side CD, take a point F. Draw FE perpendicular to AB at E. Through A, draw the line Ax perpendicular to AF, Ax intersects the line DE at H. Let I be the midpoint of AF. Prove that three points C, I, H are collinear.

Problem T5/574. Solve the equations

$$\sqrt{2x+6}=x^2+3x.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/574. Given three non-zero real numbers a, b, c such that two polynomials

$$f(x)=ax^2+2bx+c,\ g(x)=ax^2+bx+2c$$

have a common root. Find the minimum value of the expression

$$S=25a^2-60b^2+4c^2+30.$$

Problem T7/574. The notation $[x]$ denotes the largest integer not exceeding x. Consider the sequence (u_n) where

$$u_n=\left[\sqrt{n^4+4n^3+6n^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right],n\in\mathbb{N}^*.$$

Find $P=\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+...+\dfrac{1}{u_{2025}}$.

Problem T8/574. Given an acute non-isosceles triangle ABC and I is its' incenter of. Let A_1, B_1, C_1 be the reflections of I in BC, CA, AB respectively. Prove that

a) The circumcircles of the triangles A_1BC, C_1AB, B_1CA pass through the same point which is denoted by K.

b) Prove that four points A_1, B_1, C_1, K belong to the same circle with the center at I.

Problem T9/574. *An* randomly puts 5 balls into 5 empty boxes.

a) Let A be the event: "The number of balls in all 5 boxes is an odd number"; B be the event: "There are exactly 3 boxes with an odd number of balls". Calculate $P(A)$ and $P(B)$.

b) Later, *An* randomly puts 2 more balls into those 5 boxes. Let E be the event: "The number of balls in all 5 boxes is an odd number". Calculate $P(E|A)$, $P(E|B)$ and $P(E)$.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/574. Consider a sequence of numbers (x_n) that satisfies

$$\begin{cases} x_1=1 \\ x_{n+1}=[ax_n]+[bx_n] \end{cases},\forall n\in\mathbb{N}^*,$$

where a and b are some real numbers. Suppose that α, β are two roots of the equation $x^2-2025x-1=0$, and $\alpha>\beta$. The notation $[x]$ denotes the largest integer not exceeding x.

a) In the case $a=\alpha$, $b=\beta$, prove that $x_{2025}+1$ is divisible by 45.

b) In the case $a=\alpha$, $b=0$, find the remainder when dividing x_{2025} by 2025.

Problem T11/574. Find the functions $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$ which is continuous at $x_0=1$ and satisfies $f(xy)+\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{f(x)}{\sqrt{y}}+\dfrac{f(y)}{\sqrt{x}}+\sqrt{xy}$, $\forall x,y\in(0;+\infty)$.

Problem T12/574. Given a rectangle $ABCD$ and $\alpha,\beta\in(0;90^0)$. A point E varies on the side AB. Outside the triangle ECD, draw rectangles $DEFH$ and $CEGI$ so that $\widehat{EDH}=\alpha,\widehat{CEI}=\beta$. Let N be the intersection between FB and AG. Prove that NE always passes through a fixed point.

NGUYEN PHU HOANG LAN
(University of Education, VNU, Hanoi)



Bài T1/570. *Hãy tìm những năm của thế kỷ 21 mà có thể biểu diễn được dưới dạng $2^a - 3.2^b$ trong đó a, b là các số tự nhiên (chẳng hạn $2024 = 2^{11} - 3.2^3$).*

Lời giải. Thế kỉ 21 bắt đầu từ năm 2001 đến hết năm 2100 nên cần có:

$$2001 \le 2^a - 3.2^b \le 2100 \quad (1).$$

Từ (1) do $3.2^b > 0$ nên $2^a \ge 2001 > 1024 = 2^{10}$, do đó $a \ge 11$ (2).

Từ (1) có $2^a \ge 3.2^b > 2.2^b$ nên $2^a > 2^{b+1}$, do đó $a \ge b+2$, hay là $b \le a-2$.

Từ (1) có $2^a \le 2100 + 3.2^b \le 2100 + 3.2^{a-2}$, hay là $4.2^{a-2} \le 2100 + 3.2^{a-2}$, nên $2^{a-2} \le 2100 < 2^{12}$, do đó $a < 14$, suy ra $a \le 13$. Kết hợp với (2) ta có:

$$11 \le a \le 13.$$

• Xét $a = 11$ và $2^{11} = 2048$, từ (1) có:

$2001 \le 2^{11} - 3.2^b \le 2100$ hay $3.2^b \le 47 < 48$ nên $2^b < 16$, tức là $b \le 3$. Với b bằng 0; 1; 2; 3 có bốn năm tương ứng là:

$$2^{11} - 3.2^0 = 2045;\ 2^{11} - 3.2^1 = 2042;$$
$$2^{11} - 3.2^2 = 2036;\ 2^{11} - 3.2^3 = 2024.$$

• Xét $a = 12$ và $2^{12} = 4096$, từ (1) có:

$$2001 \le 2^{12} - 3.2^b \le 2100,$$

hay là $1800 < 1996 \le 3.2^b \le 2095 < 2100$

nên $600 < 2^b \le 700$, không có số nguyên b thỏa mãn.

• Xét $a = 13$, từ (1) có $2001 \le 2^{13} - 3.2^b \le 2100$, hay là $6090 < 6092 \le 3.2^b \le 6191 < 6210$ nên $2030 < 2^b \le 2070$ nên $b = 11$, có một năm là:

$$2^{13} - 3.2^{11} = 2^{11} = 2048.$$

Các năm tìm được là 2024; 2036; 2042; 2045; 2048.

Nhận xét. Một số bạn cho kết quả đúng, nhưng không lập luận về giá trị của số mũ a nên không biết được còn nghiệm nào khác nữa không. Các bạn sau có câu trả lời đúng: **Hà Nội:** *Nguyễn Phương Hoa*, 6A2, THCS Linh Đàm, Q. Hoàng Mai; **Quảng Ngãi:** *Phạm Thị Bảo Uyên*, 6D, THCS Phạm Văn Đồng, *Trần Phạm Minh Thủy*, 6B, THCS Hành Trung, *Trần Văn Phụng*, 6C, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/570. *Tìm hai số hữu tỷ dương x, y thỏa mãn đẳng thức:*

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2025 + 2(x+y).$$

Lời giải. Vì x và y là hai số hữu tỉ dương nên giả sử $x = \frac{a}{b}; y = \frac{c}{d}$ (với $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, $(a,b) = 1$; $(c,d) = 1$). Sử dụng các tính chất quen thuộc để biến đổi đẳng thức đã cho như sau:

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2025 + 2(x+y)$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 2025 + 2x + 2y$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2023 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{d}\right)^2 = 2023$$
$$\Leftrightarrow a^2d^2 + b^2c^2 = 2023b^2d^2 \quad (1).$$

Từ (1) suy ra: $\begin{cases} a^2d^2 + b^2c^2 \vdots b^2 \\ a^2d^2 + b^2c^2 \vdots d^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2d^2 \vdots b^2 \\ b^2c^2 \vdots d^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} d^2 \vdots b^2 \\ b^2 \vdots d^2 \end{cases} (\text{do } (a^2, b^2) = 1; (c^2, d^2) = 1).$$

Vì $b^2 \vdots d^2$ và $d^2 \vdots b^2$ nên $b = d$, kết hợp với (1) ta suy ra: $a^2 + c^2 = 7.17^2.b^2$ (2).

Từ (2) suy ra: $(a^2 + c^2) \vdots 7$ (3).

Do một số chính phương khi chia cho 7 chỉ nhận một trong các số dư là 0, 1, 2, 4 nên để (3) xảy ra ta phải có $a^2 \vdots 7$ và $c^2 \vdots 7$. Từ đây, kết hợp 7 là một số nguyên tố nên suy ra $a \vdots 7$ và $c \vdots 7$, dẫn đến trái với giả thiết $(a,b) = 1$.

Vậy không tồn tại hai số hữu tỉ dương x và y sao cho $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2025 + 2(x+y)$.

Nhận xét. Cách giải của tác giả đề toán cũng là cách giải của bạn *Nguyễn Bảo Châu*, 7A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**. Ngoài ra, bạn *Trần Việt*

Khôi, 7A5, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định, **Nam Định** đưa ra một cách ngắn gọn bằng cách xét tính chẵn lẻ của x và y.

TRẦN THỊ KIM THANH

Bài T3/570. *Chứng minh rằng*:

$$1.2^{3^4}+2.3^{4^5}+3.4^{5^6}+4.5^{6^7}$$

chia hết cho 11.

Lời giải. Ta có: $2^{10}=1024\equiv 1\pmod{11}$

Nên $2^{3^4}=2^{80+1}=2.\left(2^{10}\right)^8\equiv 2\pmod{11}$ (1).

Lại có: $3^5=243\equiv 1\pmod{11}$; $81\equiv 4\pmod{11}$

nên $3^{4^5}=3^{1024}=3^{5.204+4}=81.\left(3^5\right)^{204}$

$\equiv 4\pmod{11}$ (2).

Ta có $4^5=1024\equiv 1\pmod{11}$ nên

$$4^{5^6}=\left(4^5\right)^{5^5}\equiv 1\pmod{11} \quad (3).$$

Lại có $5^5=3125\equiv 1\pmod{11}$, $6^7\equiv 1\pmod{5}$ nên có thể đặt $6^7=5a+1$ $(a\in\mathbb{N})$.

Do đó $5^{6^7}=5^{5a+1}=5.(5^5)^a\equiv 5\pmod{11}$ (4).

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra:

$1.2^{3^4}+2.3^{4^5}+3.4^{5^6}+4.5^{6^7}\equiv 1.2+2.4+3.1+4.5$

$\equiv 33\equiv 0\pmod{11}$.

Vậy $1.2^{3^4}+2.3^{4^5}+3.4^{5^6}+4.5^{6^7}$ chia hết cho 11. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. 1) Bài này không có nhiều cách giải, chủ yếu là xét đồng dư của mỗi số hạng trong đầu bài theo modun 11.

Các kết quả chính của lời giải là:

$$2^{3^4}\equiv 2\pmod{11};\ 3^{4^5}\equiv 4\pmod{11};$$

$$4^{5^6}\equiv 1\pmod{11};\ 5^{6^7}\equiv 5\pmod{11}.$$

2) Các bạn yêu toán học nên biết thêm định lý Fermat nhỏ: *Nếu p là số nguyên tố, a là số tự nhiên bất kỳ không chia hết cho p thì* $a^{p-1}\equiv 1\pmod{p}$.

Trong bài toán trên có

$$2^{10}\equiv 1\pmod{11},\ 3^{10}\equiv 1\pmod{11},...$$

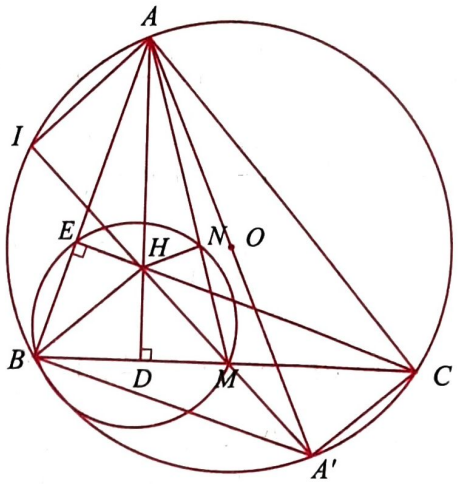
Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Q. Hoàng Mai; **Nghệ An:** *Bùi Hữu Anh Quân*, 6E, *Đặng Bá Khôi Nguyên*, *Lâm Lý Sang*, 8D, *Nguyễn Bảo Duy*, *Đào Công Tú*, 8B, *Nguyễn Thị Băng Tâm*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 2B, Trường Quốc tế song ngữ cấp 2,3 GIBS, TP. Graz .

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/570. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD và CE của tam giác cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC. Tia MH cắt đường tròn (O) ở I. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BME cắt AM ở N. Chứng minh* $\frac{AI}{MI}.\frac{AD}{MD}=\frac{AN}{MN}$.

Lời giải.



Do tứ giác $BMNE$ nội tiếp nên $AE.AB = AN.AM$.

Do tứ giác $BDHE$ nội tiếp nên $AE.AB = AH.AD$.

Suy ra: $AN.AM = AH.AD$ (1).

Từ đó ta có tứ giác $DHNM$ nội tiếp, nên

$$\widehat{HNM}=\widehat{HDM}=90^0.$$

Mặt khác, kẻ đường kính AA' của đường tròn (O), ta có $BHCA'$ là hình bình hành, nên A', M, H thẳng hàng. Do đó A', M, H, I thẳng hàng.

Từ đó, do tứ giác $AIHN$ nội tiếp ta có:

$$MH.MI = MN.MA \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{AH.AD}{MH.MI}=\frac{AN}{MN}$ (3).

Mặt khác: $\Delta AHI\sim\Delta MHD$ (g.g) $\Rightarrow\frac{AH}{MH}=\frac{AI}{MD}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra: $\frac{AI}{MI}.\frac{AD}{MD}=\frac{AN}{MN}$.

Nhận xét. Công cụ chính để giải bài toán này là tính chất phương tích. Các bạn sau đây có lời giải tốt:
Hải Phòng: *Hoàng Đức Dũng*, 8B9, THCS Trần Phú, Q. Lê Chân; **Thanh Hóa:** *Lê Phú Đạt*, 9A7, THCS Tr. Cành Nàng, Bá Thước; **Nghệ An:** *Nguyễn Tất Han, Nguyễn Tất Hoàng Anh*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Nam Dương*, 9A7, THCS Phan Chu Trinh, Đà Lạt.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/570. *Giải phương trình*

$$x+y+x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad (1).$$

Lời giải. ĐK: $-1\le x,y\le 1$. Với mỗi $y\in[0;1]$, xét hàm số:

$$f(x)=x+x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}+y-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ta có: $f(-1)=-1-\sqrt{1-y^2}+y-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$=-(1-y)-\sqrt{1-y^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\le-\frac{\sqrt{3}}{2}<0.$$

$$f(1)=1+\sqrt{1-y^2}+y-\frac{\sqrt{3}}{2}>1-\frac{\sqrt{3}}{2}>0.$$

Do đó: $f(-1)f(1)<0$. Vì hàm $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ nên theo tính chất của hàm số liên tục tồn tại ít nhất một số $x_0\in(-1;1)$ để $f(x_0)=0$. Do vậy $(x_0;y)$ với y tùy ý thuộc [0; 1] đều là các nghiệm phương trình (1).

Nhận xét. 1) Tính chất của của hàm số liên tục đã được sử dụng trong lời giải trên. Tuy nhiên lời giải chỉ khẳng định phương trình đã cho có vô số nghiệm thuộc [−1; 1] mà chưa đưa ra công thức tường minh của nghiệm.

2) Nếu vế phải của phương trình ở đề bài là $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, tức là: $x+y+x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (2), thì nghiệm của PT(2) có thể xác định cụ thể như sau:
Áp dụng BĐT: $2ab\le a^2+b^2$, ta có:

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}}.2x.\frac{\sqrt{3}}{2}\le\frac{1}{\sqrt{3}}\left[x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x^2+\frac{3}{4}\right);$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}.2y.\frac{\sqrt{3}}{2}\le\frac{1}{\sqrt{3}}\left[y^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(y^2+\frac{3}{4}\right);$$

$$x\sqrt{1-y^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}x\sqrt{3-3y^2}\le\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{x^2+\left(\sqrt{3-3y^2}\right)^2}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(x^2+3-3y^2\right);$$

$$y\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}y\sqrt{3-3x^2}\le\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{y^2+\left(\sqrt{3-3x^2}\right)^2}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(y^2+3-3x^2\right).$$

Cộng theo vế các BĐT trên ta được:

$$\text{VT}(2)\le\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2+\frac{3}{2}-x^2-y^2+3\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}x=y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ x=\sqrt{3-3y^2}\\ y=\sqrt{3-3x^2}\\ -1\le x,y\le 1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy PT(2) có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Bạn *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Q. Hoàng Mai, **Hà Nội** có lời giải đúng cho PT(2) này.

TRẦN HỮU NAM

Bài T6/570. *Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình*

$$x^3+x=y^3+y+xy+2005\quad (1).$$

Lời giải (của *Nguyễn Tất Hoàng Anh, Vương Khánh Toàn, Nguyễn Tấn Phát* và một số bạn).
Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow(x-y)^3+3xy(x-y)+(x-y)-xy=2005\ (2).$$

Từ đây suy ra $x>y\ge 1$. Hơn nữa, nếu $x-y\ge 12$ thì $x\ge 13$ và $y\ge 1$. Khi ấy:

$$\text{VT}(2)=(x-y)\left(x^2+y^2+1\right)+(x-y-1)xy$$

$$\ge 12\left(13^2+1^2+1\right)+11\cdot 13\cdot 1=2195>2005.$$

Vậy chỉ cần xét $1 \le x-y \le 11$. Biến đổi (2) thành:

$$27(x-y)^3 - 1 + 27xy(3x-3y-1) + 9(3x-3y-1) = 2005 \cdot 27 - 1 - 9 = 54125 \quad (3).$$

Vì VT(3) chia hết cho $3x-3y-1$ nên VP(3) = 54125 cũng chia hết cho $3x-3y-1$ hay $3x-3y-1$ là ước của $54125 = 5^3 \cdot 433$, tức là $3x-3y-1$ chỉ có thể bằng 5, 25, 75, 125, ...

Mà $3x-3y-1 \equiv 2 \pmod 3$ nên $54125 \equiv 2 \pmod 3$ tức là $3x-3y-1$ chỉ có thể bằng 5, 125,...

Mặt khác, $1 \le x-y \le 11$ nên $2 \le 3x-3y-1 \le 32$.

Do đó $3x-3y-1=5$ hay $x-y=2$. Khi đó (2) trở thành:

$$2^3 + 3(y+2)y \cdot 2 + 2 - (y+2)y = 2005$$

$$\Leftrightarrow 5y^2 + 10y + 10 = 2005 \Leftrightarrow y^2 + 2y - 399 = 0.$$

Do y nguyên dương nên $y=19$ và $x=21$.

Đáp số: $x=21;\ y=19$.

Nhận xét. 1) Hai bạn *Huỳnh Phan Kim Ngân* và *Võ Tiến Phát* phải gửi bài riêng.

2) Tất cả các bạn gửi bài có lời giải tốt:

Hưng Yên: *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Kiên Giang:** *Trần Minh Tiến*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt. **Long An:** *Nguyễn Tấn Đạt, Huỳnh Võ Huy Khánh, Nguyễn Minh Tiến*, 10T1, *Huỳnh Phan Kim Ngân*, 10T2, THPT chuyên Trần Văn Giàu, *Võ Tiến Phát*, 10A1, THPT Nguyễn Thông. **Lâm Đồng:** *Trương Đức Gia Bảo*, C10, THPT chuyên Thăng Long, *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 9A7, THCS Phan Chu Trinh, TP. Đà Lạt. **Nghệ An:** *Nguyễn Tất Hoàng Anh*, *Nguyễn Công Lĩnh*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Tuấn Khải*, 10A2, *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai. **Phú Thọ:** *Trần Ngọc Tú*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông. **Quảng Bình:** *Nguyễn Văn Hợp*, 11T2, *Vương Khánh Toàn*, 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Sóc Trăng:** *Nguyễn Tấn Phát*, 10A2, *Hà Lê Nguyên Phúc*, 10A8, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai. **Thái Bình:** *Phan Trung Hiếu*, 10A1, THPT Tây Tiền Hải. **TP. Hồ Chí Minh:** *Trần Nhất Nguyên*, *Nguyễn Phạm Minh Phú*, 10E1, THPT Lê Thánh Tông. **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Q. Hoàng Mai, *Nguyễn Kim Thành*, 10 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội. Và một bạn không ghi tên.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T7/570. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} 6x^2y + 2y^3 + 35 = 0 \\ 5x^2 + 5y^2 + 2xy + 5x + 13y = 0 \end{cases}$$

Lời giải. Cách 1. Nhân hai vế của phương trình thứ hai với 3, rồi cộng theo vế với phương trình thứ nhất ta được:

$$6x^2y + 2y^3 + 35 + 15x^2 + 15y^2 + 6xy + 15x + 39y = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2(2y+5) + 3x(2y+5) + y^2(2y+5) + 5y(2y+5) + 7(2y+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2y+5)\left(3x^2 + 3x + y^2 + 5y + 7\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2y+5)\left[3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{5}{2}\right)^2\right] = 0.$$

Xảy ra hai trường hợp:

a) $2y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{2}$. Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được: $-15x^2 - \frac{125}{4} + 35 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ hoặc } x = -\frac{1}{2}.$$

b) $3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{5}{2}\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = y + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}; y = -\frac{5}{2}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y)$ là:

$$\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right).$$

Cách 2. Ta có: $\begin{cases} 6x^2y + 2y^3 + 35 = 0 \\ 5x^2 + 5y^2 + 2xy + 5x + 13y = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 - (x-y)^3 + 35 = 0 \\ 3(x+y)^2 + 2(x-y)^2 + 9(x+y) - 4(x-y) = 0 \end{cases}.$$

Đặt $u = x+y;\ v = x-y$, ta nhận được hệ phương trình: $\begin{cases} u^3 - v^3 + 35 = 0 \\ 3u^2 + 2v^2 + 9u - 4v = 0 \end{cases}$ (*)

Từ đó suy ra:

$$u^3 - v^3 + 35 + 3(3u^2 + 2v^2 + 9u - 4v) = 0$$

$$\Leftrightarrow (u+3)^3 - (v-2)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow u + 3 = v - 2 \Leftrightarrow v = u + 5.$$

Thay vào phương trình (*), ta được:

$$u^3 - (u+5)^3 + 35 = 0 \Leftrightarrow u^2 + 5u + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow u = -2 \text{ hoặc } u = -3.$$

Với $u = -2$ thì $v = 3$. Do đó $x + y = -2; x - y = 3$.

Từ đó tìm được $x = \frac{1}{2}; y = -\frac{5}{2}$.

Với $u = -3$ thì $v = 2$. Do đó $x + y = -3; x - y = 2$.

Từ đó tìm được $x = -\frac{1}{2}; y = -\frac{5}{2}$.

Nhận xét. Bài này có nhiều bạn tham gia gửi bài và đều làm theo một trong hai cách trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt. lập luận chặt chẽ và ngắn gọn:

Hà Nội: *Nguyễn Kim Thành*, 10 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú, Lê Quang Anh,* 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** *Phan Trung Hiếu,* 10A1, THPT Tiền Hải; **Nghệ An:** *Nguyễn Cảnh Phước Hưng, Nguyễn Tấn Hoàng Anh*, 9C, THCS Lý Nhật Quang; *Đặng Hoàng Lương,* 11A1, THPT Yên Thành 2, *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai; **Kiên Giang:** *Trần Minh Tiến, Trần Hoàng Bách*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Long An:** *Nguyễn Minh Tiến, Nguyễn Ngọc Uyên Nhi, Ngô Nguyễn Tú Hương,* 10T1, *Huỳnh Phan Kim Ngân,* 10T2, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện,* 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Đồng Tháp:** *Đào Chí Hiếu,* 11A1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Tấn Phát,* 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh,* 9A7. THCS Phan Chu Trinh.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T8/570. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn có bán kính bằng 1 và có trọng tâm G. Chứng minh* $\frac{AB}{GC} + \frac{BC}{GA} + \frac{CA}{GB} \ge AB + BC + CA.$

Lời giải. Kí hiệu a, b, c tương ứng là độ dài các cạnh BC, CA, AB; còn m_a, m_b, m_c tương ứng là độ dài các đường trung tuyến kẻ từ A, B, C.

Ta có: $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$ nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = 4m_a^2 + 3a^2 \ge 4\sqrt{3}a.m_a.$$

Suy ra: $am_a \le \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}}$.

Chứng minh tương tự, ta có:

$$bm_b \le \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}},$$

$$cm_c \le \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}}.$$

Từ đó: $\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} = \frac{a^2}{am_a} + \frac{b^2}{bm_b} + \frac{c^2}{cm_c}$

$$\ge \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3}.$$

Chú ý là $GA = \frac{2}{3}m_a, GB = \frac{2}{3}m_b, GC = \frac{2}{3}m_c$ nên bất đẳng thức trên cho ta:

$$\frac{BC}{GA} + \frac{CA}{GB} + \frac{AB}{GC} \ge 3\sqrt{3}.$$

Mặt khác theo định lý hàm số sin thì

$$AB + BC + CA = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$= 2(\sin A + \sin B + \sin C).$$

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc

$$\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

ta suy ra: $AB + BC + CA \le 3\sqrt{3}$.

Từ đây suy ra:

$$\frac{BC}{GA} + \frac{CA}{GB} + \frac{AB}{GC} \ge AB + BC + CA.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC là tam giác đều.

Nhận xét. Bài toán này dễ, có nhiều bạn tham gia giải và đều giải đúng. Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Kim Thành*, 10 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội. **Hưng Yên:** *Phạm Văn Phong, Đỗ Quang Anh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Kiên Giang:** *Phạm Trịnh Kim Tiền,*

Từ đó suy ra:

$$u^3 - v^3 + 35 + 3(3u^2 + 2v^2 + 9u - 4v) = 0$$

$$\Leftrightarrow (u+3)^3 - (v-2)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow u + 3 = v - 2 \Leftrightarrow v = u + 5.$$

Thay vào phương trình (*), ta được:

$$u^3 - (u+5)^3 + 35 = 0 \Leftrightarrow u^2 + 5u + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow u = -2 \text{ hoặc } u = -3.$$

Với $u = -2$ thì $v = 3$. Do đó $x + y = -2; x - y = 3$.

Từ đó tìm được $x = \frac{1}{2}; y = -\frac{5}{2}$.

Với $u = -3$ thì $v = 2$. Do đó $x + y = -3; x - y = 2$.

Từ đó tìm được $x = -\frac{1}{2}; y = -\frac{5}{2}$.

Nhận xét. Bài này có nhiều bạn tham gia gửi bài và đều làm theo một trong hai cách trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt. lập luận chặt chẽ và ngắn gọn:

Hà Nội: *Nguyễn Kim Thành*, 10 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú, Lê Quang Anh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** *Phan Trung Hiếu*, 10A1, THPT Tiền Hải; **Nghệ An:** *Nguyễn Cảnh Phước Hưng, Nguyễn Tấn Hoàng Anh*, 9C, THCS Lý Nhật Quang; *Đặng Hoàng Lương*, 11A1, THPT Yên Thành 2, *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai; **Kiên Giang:** *Trần Minh Tiến, Trần Hoàng Bách*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Long An:** *Nguyễn Minh Tiến, Nguyễn Ngọc Uyên Nhi, Ngô Nguyễn Tú Hương*, 10T1, *Huỳnh Phan Kim Ngân*, 10T2, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Đồng Tháp:** *Đào Chí Hiếu*, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Tấn Phát*, 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 9A7. THCS Phan Chu Trinh.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T8/570. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn có bán kính bằng 1 và có trọng tâm G. Chứng minh* $\frac{AB}{GC} + \frac{BC}{GA} + \frac{CA}{GB} \geq AB + BC + CA$.

Lời giải. Kí hiệu a, b, c tương ứng là độ dài các cạnh BC, CA, AB; còn m_a, m_b, m_c tương ứng là độ dài các đường trung tuyến kẻ từ A, B, C.

Ta có: $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$ nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = 4m_a^2 + 3a^2 \geq 4\sqrt{3}a.m_a.$$

Suy ra: $am_a \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}}$.

Chứng minh tương tự, ta có:

$$bm_b \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}},$$

$$cm_c \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}}.$$

Từ đó: $\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} = \frac{a^2}{am_a} + \frac{b^2}{bm_b} + \frac{c^2}{cm_c}$

$$\geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3}.$$

Chú ý là $GA = \frac{2}{3}m_a, GB = \frac{2}{3}m_b, GC = \frac{2}{3}m_c$ nên bất đẳng thức trên cho ta:

$$\frac{BC}{GA} + \frac{CA}{GB} + \frac{AB}{GC} \geq 3\sqrt{3}.$$

Mặt khác theo định lý hàm số sin thì

$$AB + BC + CA = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$= 2(\sin A + \sin B + \sin C).$$

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

ta suy ra: $AB + BC + CA \leq 3\sqrt{3}$.

Từ đây suy ra:

$$\frac{BC}{GA} + \frac{CA}{GB} + \frac{AB}{GC} \geq AB + BC + CA.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC là tam giác đều.

Nhận xét. Bài toán này dễ, có nhiều bạn tham gia giải và đều giải đúng. Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Kim Thành*, 10 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội. **Hưng Yên:** *Phạm Văn Phong, Đỗ Quang Anh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Kiên Giang:** *Phạm Trịnh Kim Tiền*,

Nguyễn Gia Bảo, 10 Toán 1, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Long An:** *Huỳnh Đăng Khánh, Nguyễn Hà My, Đặng Hoàng Khánh Ngọc*, 10T1, *Huỳnh Phan Kim Ngân*, 10T2, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Nghệ An:** *Đặng Hoàng Lương*, 11A1, THPT Yên Thành 2; **Hải Phòng:** *Đặng Đình Minh Trí*, 9D2, THCS Lạc Viên, Ngô Quyền; **Quảng Bình:** *Trần Đức Phát*, 11 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chí Đại*, 10A1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú; **Thái Bình:** *Phan Trung Hiếu*, 10A1, THPT Tây Tiền Hải.

NGUYỄN TIẾN LÂM

Bài T9/570. *Cho ba số a,b,c lớn hơn $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh*

$$\frac{1}{a^2+a-1}+\frac{1}{b^2+b-1}+\frac{1}{c^2+c-1}\geq 3.$$

Lời giải. (Dựa theo lời giải của bạn *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**)

Ta có: $a^3-(a^2+a-1)=(a-1)^2(a+1)\geq 0$.

Do đó: $a^3\geq a^2+a-1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}>0$.

Suy ra: $\frac{1}{a^2+a-1}\geq\frac{1}{a^3}$. Tương tự ta có:

$$\frac{1}{b^2+b-1}\geq\frac{1}{b^3};\ \frac{1}{c^2+c-1}\geq\frac{1}{c^3}.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta thu được:

$$\frac{1}{a^2+a-1}+\frac{1}{b^2+b-1}+\frac{1}{c^2+c-1}\geq\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\ (1).$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\geq\frac{3}{abc}=3\quad(2).$$

Từ (1) và (2) ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Nhận xét. Đây là một bài toán không khó và có nhiều hướng giải nên có nhiều bạn gửi lời giải về tòa soạn. Hầu hết các bạn có lời giải đúng. Tuy nhiên đa số các bạn không sử dụng giả thiết để chỉ ra các mẫu thức lớn hơn không trong khi áp dụng bất đẳng thức Schwarz dạng phân thức hoặc để suy ra các bất đẳng thức khác (ví dụ như trong lời giải trên cần chỉ ra $a^2+a-1>0$). Nếu bỏ giả thiết ba số a,b,c lớn hơn $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thì bài toán không còn đúng nữa. Đa số các bạn cho lời giải theo hướng đặt $a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}$ hoặc đặt $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c}$ rồi sau đó áp dụng bất đẳng thức Schwarz cũng cho lời giải ngắn gọn. Một số bạn đưa về bài toán quen thuộc $\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1}\geq 1$ và cũng cho lời giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Yên: *Phạm Thị Khánh Đoan*, 10 Toán 2, THPT chuyên *Lương Văn Chánh*; **Long An:** *Nguyễn Gia Bảo*, 10T1, *Huỳnh Đăng Khánh, Nguyễn Gia Hưng, Châu Thanh Nhật, Nguyễn Hà Vy*, 10T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Tấn Phát, Nguyễn Mỹ Anh*, 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **TP. Hồ Chí Minh:** *Trần Quang Minh, Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; *Nguyễn Chí Đại*, 10A1, *Nguyễn Phạm Minh Phú, Trần Nhất Nguyên*, 10E1, *Lê Khắc Trí Nguyên*, 10E2, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông; **Hải Phòng:** *Đặng Đình Minh Trí, Phùng Nam Khánh*, 9D2, THCS Lạc Viên; **Hưng Yên:** *Phạm Văn Phong*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Quảng Bình:** *Trần Đức Phát, Vương Khánh Toàn*, 11CT1, *Phạm Xuân Khôi Nguyên, Nguyễn Văn Hợp, Nguyễn Phương Nam*, 11CT2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Nghệ An:** *Đặng Hoàng Lương*, 11A1, THPT Yên Thành 2; *Nguyễn Tất Hoàng Anh, Nguyễn Thị Băng Tâm, Nguyễn Cảnh Phước Hưng*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Trần Quang Nhật*, 11A1, THPT chuyên Đại Học Vinh; *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai; **TP Huế:** *Nguyễn Duy Phúc*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc Học Huế; **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, 8A1, THCS Linh Đàm, Q. Hoàng Mai, *Nguyễn Kim Thành*, 10 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội. **Lâm Đồng:** *Phạm Quang Minh*, 9A3, *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 9A7, THCS Phan Chu Trinh, TP. Đà Lạt; **Thái Bình:** *Phan Trung Hiếu*, 10A1, THPT Tây Tiền Hải;

Kiên Giang: *Nguyễn Tuấn Hậu*, 10T1, *Trần Minh Tiến*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt.

HOÀNG NGỌC MINH

Bài T10/570. *Chứng minh rằng phương trình $x^3+x+a^2=y^2$ có ít nhất một cặp nghiệm nguyên dương $(x;y)$ với mỗi giá trị nguyên của a.*

Lời giải (Của bạn *Vương Khánh Toàn*, 11CT1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**).

Xét $a\neq 0$. Với $x=8a^2(8a^4+1)\in\mathbb{N}^*$ ta có:

$$x^3+x+a^2=\left[8a^2(8a^4+1)\right]^3+8a^2(8a^4+1)+a^2$$
$$=262144a^{18}+98304a^{14}+12288a^{10}+576a^6+9a^2$$
$$=(512a^9+96a^5+3a)^2.$$

Vì $\left|512a^9+96a^5+3a\right|\in\mathbb{N}^*$ nên phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương là:

$$x=8a^2(8a^4+1),\ y=\left|512a^9+96a^5+3a\right|.$$

Xét $a=0$. Phương trình trở thành:

$$x^3+x=y^2\Leftrightarrow x(x^2+1)=y^2.$$

Giả sử phương trình có nghiệm nguyên dương (x,y). Vì $(x,x^2+1)=1$ nên ta có:

$$x^2+1=z^2,z\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow(z-x)(z+x)=1$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z-x=z+x=1\\z-x=z+x=-1\end{array}\right.\Rightarrow x=0\notin\mathbb{N}^*.$$

Thành thử với $a=0$ phương trình không có nghiệm nguyên dương

Nhận xét. 1) Phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm nguyên dương $(x;y)$ với a nguyên khác 0.

2) Rất ít bạn tham gia giải bài toán này. Ngoài bạn *Toàn*, chỉ có bạn *Nguyễn Gia Bảo*, 10T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu, **Long An** có lời giải đúng với một cách giải khác dài hơn.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/570. *Xét 2022 số thực tùy ý $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{2021}$ với $a_1=a_{2020}=0$, các số còn lại khác 0. Chứng minh rằng với mọi số thực k thì:*

$$|a_0|-|a_{2021}|\le\sum_{i=0}^{2019}|a_i-ka_{i+1}-a_{i+2}|.$$

Lời giải. (Dựa theo ý của đa số các bạn) Xét các đa thức: $P(x):=x^2-kx-1$

và $\quad Q(x):=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{2021}x^{2021}.$

Vì tam thức bậc hai $P(x)$ có hai nghiệm với tích của chúng bằng -1 nên có một nghiệm khác 0 nằm trong $[-1;1]$. Gọi nghiệm đó là z thì $0<|z|\le 1$. Sử dụng giả thiết $a_1=a_{2020}=0$, ta có:

$$0=P(z)Q(z)$$
$$=-a_0-ka_0z+\sum_{i=0}^{2019}(a_i-ka_{i+1}-a_{i+2})z^{i+2}$$
$$-ka_{2021}z^{2022}+a_{2021}z^{2023}$$
$$=a_0(-1-kz)+\sum_{i=0}^{2019}(a_i-ka_{i+1}-a_{i+2})z^{i+2}$$
$$+a_{2021}z^{2021}(z^2-kz)$$

hay $a_0z^2=\sum_{i=0}^{2019}(a_i-ka_{i+1}-a_{i+2})z^{i+2}+a_{2021}z^{2021}.$

Tiếp theo, sử dụng tính chất của giá trị tuyệt đối, ta thu được:

$$|a_0||z^2|\le\sum_{i=0}^{2019}|a_i-ka_{i+1}-a_{i+2}||z^{i+2}|+|a_{2021}||z^{2021}|$$
$$\le\sum_{i=0}^{2019}|a_i-ka_{i+1}-a_{i+2}||z^2|+|a_{2021}||z^2|$$

hay $|a_0|-|a_{2021}|\le\sum_{i=0}^{2019}|a_i-ka_{i+1}-a_{i+2}|$ (đpcm).

Nhận xét. Đây là dạng toán cơ bản về ước lượng dãy. Bạn *Trần Đức Phát*, 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình** có nhận xét là bài toán vẫn đúng khi thay số 2022 bởi một số tự nhiên tùy ý lớn hơn 1.

Các bạn gửi bài đều cho kết quả đúng:

Long An: *Nguyễn Gia Bảo*, 10CT1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Quảng Bình:** *Vương Khánh Toàn*, *Trần Đức Phát*, 11T1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 10A3, THPT Hoàng Mai.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/570. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn có (O). Gọi I là điểm bất kỳ trong mặt phẳng chứa tam giác. Tiếp tuyến tại B của (O) cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABI tại điểm D; tiếp*

tuyến tại C của đường tròn (O) cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác AIC tại điểm E. Gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DIE. Chứng minh rằng điểm P nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BC.

Lời giải. Trong lời giải này, kí hiệu (XYZ) chỉ đường tròn đi qua các điểm X, Y, Z.

Bỏ qua trường hợp đơn giản BC đi qua O.

Vì BC không đi qua O nên BD và CE không song song.

Gọi T là giao điểm của BD và CE; K, L theo thứ tự là tâm của các đường tròn (ABI), (ACI).

Dễ thấy tứ giác $OBTC$ nội tiếp và TO là phân giác trong của góc $\widehat{BTC}$ (1).

Từ (1) suy ra TO là một trong hai phân giác của góc (TD,TE) (2).

Từ (1), chú ý rằng O là tâm đường tròn (ABC); các bộ bốn điểm (A, C, I, E) và (A, B, I, D) cùng thuộc một đường tròn; CE, BD tiếp xúc với (O); P là tâm các đường tròn (IDE), suy ra:

$$\begin{aligned}(TD,TE)&\equiv(TB,TC)\equiv(OB,OC)\\&\equiv 2(AB,AC)\,(\mathrm{mod}\,\pi)\\&\equiv 2(BA,BC)+2(CB,CA)\\&\equiv 2(CA,CE)+2(BD,BA)\,(\mathrm{mod}\,\pi)\\&\equiv 2(IA,IE)+2(ID,IA)\\&\equiv 2(ID,IE)\equiv(PD,PE)\,(\mathrm{mod}\,\pi).\end{aligned}$$

Do đó bốn điểm P, D, T, E cùng thuộc một đường tròn (3).

Kết hợp với $PD=PE$, suy ra TP là một trong hai phân giác của góc (TD,TE) (4).

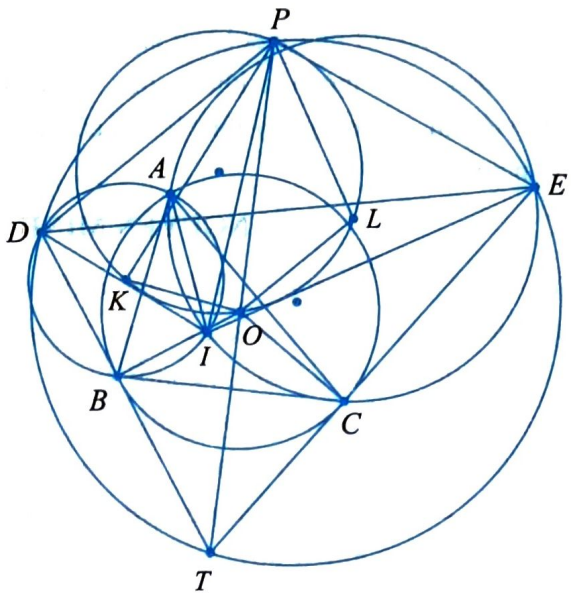
Chú ý rằng

$$PK\perp ID;PL\perp IE;AB\perp OK;AC\perp OL$$

và các bộ bốn điểm (A, B, I, D), (A, C, I, E) cùng thuộc một đường tròn, ta có:

$$\begin{aligned}(PK,PL)&\equiv(ID,IE)\equiv(ID,IA)+(IA,IE)\,(\mathrm{mod}\,\pi)\\&\equiv(BD,BA)+(CA,CE)\\&\equiv(CB,CA)+(BA,BC)\,(\mathrm{mod}\,\pi)\\&\equiv(AB,AC)\equiv(OK,OL)\,(\mathrm{mod}\,\pi).\end{aligned}$$

Do đó các điểm P, K, L, I cùng thuộc một đường tròn. Từ đó, chú ý rằng PK, PL theo thứ tự là phân giác trong của các góc $\widehat{IPD}$, $\widehat{IPE}$ và $OK\perp AB;OL\perp AC$, suy ra:



$$\begin{aligned}(\overrightarrow{PD},\overrightarrow{PE})&\equiv(\overrightarrow{PD},\overrightarrow{PI})+(\overrightarrow{PI},\overrightarrow{PE})\\&\equiv 2(PK,PI)+2(PI,PL)\,(\mathrm{mod}\,2\pi)\\&\equiv 2(PK,PL)\equiv 2(OK,OL)\\&\equiv 2(AB,AC)\equiv(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})\,(\mathrm{mod}\,2\pi).\end{aligned}$$

Kết hợp với $\dfrac{PD}{PE}=1=\dfrac{OB}{OC}$, suy ra các tam giác PDE, OBC đồng dạng cùng hướng (5).

Nếu $TO\perp TP$ thì, chú ý đến (5), ta có:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}&\equiv(TO,TP)\equiv(TO,TC)+(TE,TP)\,(\mathrm{mod}\,\pi)\\&\equiv(BO,BC)+(DE,DP)\\&\equiv(BO,BC)+(BC,BO)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\pi),\end{aligned}$$

mâu thuẫn.

Từ đó, chú ý đến (2) và (4), suy ra T, O, P thẳng hàng. Kết hợp với $TB=TC;OB=OC$, suy ra T thuộc đường trung trực của BC (đpcm).

Nhận xét. 1) Bài toán này không khó, khá nhiều bạn tham gia giải. Tuy nhiên, vì không biết sử dụng góc định hướng nên là giải của các bạn đều phụ thuộc hình vẽ.

2) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tương đối tốt:

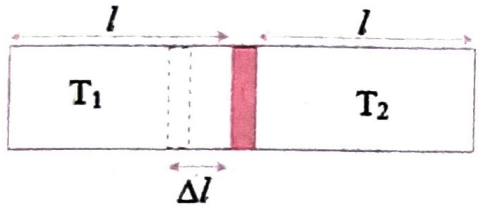
Phú Thọ: *Trần Việt Tùng*, 10TA, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Duy Phúc*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Sóc Trăng:** *Trần Nhật Tiến*, 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Kiên Giang:** *Nguyễn Sơn Khánh*, 10T2, THPT Huỳnh Mẫn Đạt.

3) Một số bạn viết lời giải viết bằng tay sau đó chụp lại nhưng bản chụp mờ nên không đọc được. Lần sau, nếu viết lời giải bằng tay thì các em cần viết và chụp rõ nét hơn.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/570. *Một pít-tông cách nhiệt đặt nằm ngang, pít-tông ở vị trí chia xi lanh thành hai phần bằng nhau, chiều dài của mỗi phần là* 30 cm. *Mỗi phần chứa một lượng khí như nhau ở nhiệt độ* 17°C *và áp suất* 2 atm. *Muốn pít-tông dịch chuyển* 2 cm *thì phải đung nóng khí ở một phần lên thêm bao nhiêu độ? Áp suất của khí khi pít-tông đã dịch chuyển là bao nhiêu?*

Lời giải.



+ Đối với phần khí bị nung nóng:

− Trạng thái đầu: p_1; $V_1 = lS$; T_1 (1).

− Trạng thái cuối: p_2; $V_2 = (l + \Delta l)S$; T_2 (2).

+ Đối với phần khí không bị nung nóng:

− Trạng thái đầu: p_1; $V_1 = lS$; T_1 (1).

−Trạng thái cuối: $p_2'; V_2' = (l - \Delta l)S$; $T_2' = T_1$ (3).

Ta có: $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} = \frac{p_2'V_2'}{T_1}$.

Vì pit-tông ở trạng thái cân bằng nên: $p_2' = p_2$. Do đó: $\frac{p_2V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{p_2(l+\Delta l)S}{T_2} = \frac{p_2(l-\Delta l)S}{T_1}$

$\Rightarrow T_2 = \frac{l+\Delta l}{l-\Delta l}T_1$.

Vậy phải đun nóng khí ở một bên lên thêm ΔT độ:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{l+\Delta l}{l-\Delta l}T_1 - T_1 = \frac{2\Delta l}{l-\Delta l}T$$

$$= \frac{2.0,02}{0,3-0,02}.290 \approx 41,4\ K.$$

Vì $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$ nên:

$$p_2 = \frac{p_1V_1T_2}{V_2T_1} = \frac{p_1lS(T_1+\Delta T)}{T_1(l+\Delta l)S} = \frac{p_1l(T_1+\Delta T)}{T_1(l+\Delta l)}$$

$$= \frac{2.0,3(290+41)}{290(0,3+0,02)} \approx 2,14 \text{ atm.}$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Nguyễn Thành Danh, Hồ Hà Duy Kha*, 10A2, TTGDNN – GDTX, quận Ô Môn, **Cần Thơ**; *Lê Thị Hồng Nga*, 12H, THPT chuyên *Nguyễn Quang Diêu*, **Đồng Tháp**; *Huỳnh Trịnh Vĩnh Phúc*, 11A1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, quận Tân Phú, **TP. Hồ Chí Minh**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/570. *Một trạm phát điện, có hiệu điện thế* 0,5 kV *truyền đi một công suất* 50 kW *trên một đường dây có điện trở tổng cộng* 4 Ω *tới tải tiêu thụ. Nếu trước khi đưa lên đường dây tải điện, người ta nối hai cực của máy phát điện với một máy biến thế lí tưởng có tỉ số các vòng dây của cuộn sơ cấp trên cuộn thứ cấp là* 0,1 *để tăng áp. Hãy tính hiệu suất truyền tải và hiệu điện thế tại nơi tiêu thụ. Coi hệ số công suất của hệ thống là* $k = 1$ *và không thay đổi* ($\mathcal{P} = kUI$).

Lời giải. Công suất hao phí trên đường dây:

$$\Delta P = RI^2 = R\frac{P^2}{U^2} = 4.\frac{(50000)^2}{(5000)^2}$$

$$= 400\text{W} = 0,4 \text{ kW}.$$

Hiệu suất truyền tải:

$$H = \frac{P-\Delta P}{P}.100\% = \frac{50-0,4}{50}.100\% = 99,2\%.$$

Độ giảm thế trên đường dây bằng:

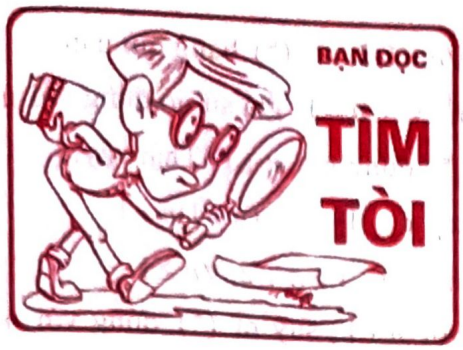
$$\Delta U = RI = R\frac{P}{U} = 4.\frac{50000}{5000} = 40\text{V}.$$

Hiệu điện thế nơi tiêu thụ bằng:

$$U_{tt} = U - \Delta U = 4960\text{V}.$$

Nhận xét. Có 2 bạn gửi bài nhưng chỉ có bạn: *Nguyễn Tuấn Khải*, 10A2, THPT Hoàng Mai, TX. Hoàng Mai, **Nghệ An** có lời giải đúng.

NGUYỄN XUÂN QUANG



DÃY SỐ NGHỊCH ĐẢO

DƯƠNG VĂN DUY
(GV THPT Nguyên Hồng, Bắc Giang)

Trong một số bài toán về dãy số, việc lập dãy số nghịch đảo của dãy ban đầu có thể giúp tìm được công thức số hạng tổng quát, từ đó tìm được giới hạn hoặc giải quyết các bài toán tính tổng hạng tử của dãy ban đầu. Sau đây là một số bài tập minh họa

Bài 1. *Cho dãy số (u_n) xác định bởi:*

$$u_1 = 1;\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1},\ n = 1, 2, \ldots.$$

Tìm: $P = \lim \dfrac{2025(u_1+1)(u_2+1)\ldots(u_n+1)}{2026n}$.

Lời giải. Từ $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+1} \Rightarrow \dfrac{1}{u_{n+1}} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

Từ đó suy ra:

$$\frac{1}{u_2} = 1 + \frac{1}{u_1};\ \frac{1}{u_3} = 1 + \frac{1}{u_2};\ \ldots;\ \frac{1}{u_n} = 1 + \frac{1}{u_{n-1}}.$$

Cộng theo từng vế ta được:

$$\frac{1}{u_n} = n - 1 + \frac{1}{u_1} = n \Rightarrow u_n = \frac{1}{n} \Rightarrow u_n + 1 = \frac{n+1}{n}$$

$$\Rightarrow (u_1+1)(u_2+1)\ldots(u_n+1) = \frac{2}{1}\frac{3}{2}\ldots\frac{n+1}{n} = n+1$$

$$P = \lim \frac{2025}{2026}.\frac{n+1}{n} = \lim \frac{2025}{2026}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{2025}{2026}.$$

Bài 2. *Cho dãy số (u_n) xác định bởi:*

$$u_1 = \frac{1}{2};\ u_n = \frac{u_{n-1}}{2nu_{n-1} + 1},\ n = 2, 3, \ldots.$$

Tính $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{2025}$.

Lời giải. Từ $u_n = \dfrac{u_{n-1}}{2nu_{n-1}+1} \Rightarrow \dfrac{1}{u_n} = 2n + \dfrac{1}{u_{n-1}}$.

Từ đó suy ra:

$$\frac{1}{u_2} = 2.2 + \frac{1}{u_1};\ \frac{1}{u_3} = 2.3 + \frac{1}{u_2};\ \ldots;\ \frac{1}{u_n} = 2n + \frac{1}{u_{n-1}}.$$

Cộng theo từng vế ta được:

$$\frac{1}{u_n} = 2(2 + 3 + \ldots + n) + \frac{1}{u_1} = 2\frac{n(n+1)}{2} - 2 + \frac{1}{u_1}$$

$$= n(n+1)$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2025} - \frac{1}{2026}$$

$$= 1 - \frac{1}{2026} = \frac{2025}{2026}.$$

Bài 3. *Cho dãy số (x_n) xác định bởi:*

$$x_1 = \frac{2}{3};\ x_{n+1} = \frac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1},\ n = 1, 2, \ldots.$$

Tìm $P = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Lời giải. Ta có: $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_{n+1}} = 2(2n+1) + \frac{1}{x_n}.$$

Từ đó suy ra: $\dfrac{1}{x_2} = 2.3 + \dfrac{1}{x_1};\ \dfrac{1}{x_3} = 2.5 + \dfrac{1}{x_2};\ \ldots$

$$\frac{1}{x_n} = 2(2n-1) + \frac{1}{x_{n-1}}.$$

Cộng theo từng vế ta được:

$$\frac{1}{x_n} = 2(3 + 5 + \ldots + 2n - 1) + \frac{1}{x_1}$$

$$= 2(1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1) - 2 + \frac{1}{x_1}$$

$$= 2n^2 - \frac{1}{2} = \frac{4n^2 - 1}{2}$$

$$= \frac{(2n-1)(2n+1)}{2}$$

$\Rightarrow x_n = \dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}$.

Từ đó suy ra: $x_1 = 1 - \dfrac{1}{3}$;

$x_2 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}$;

.....

$x_n = \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 - \dfrac{1}{2n+1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right) = 1.$

Bài 4. *Cho dãy số (x_n) xác định bởi:*

$x_1 = 2026; x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1, n = 1, 2, \ldots.$

Đặt $y_n = 2026\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}\right)$. Tìm $P = \lim y_n$.

Lời giải. Ta có: $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$

$\Rightarrow x_{n+1} - 1 = x_n(x_n - 1)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x_{n+1}-1} = \dfrac{1}{x_n(x_n-1)} = \dfrac{1}{x_n - 1} - \dfrac{1}{x_n}.$

Suy ra: $\dfrac{1}{x_2 - 1} = \dfrac{1}{x_1 - 1} - \dfrac{1}{x_1}$;

$\dfrac{1}{x_3 - 1} = \dfrac{1}{x_2 - 1} - \dfrac{1}{x_2}$;

.....

$\dfrac{1}{x_{n+1} - 1} = \dfrac{1}{x_n - 1} - \dfrac{1}{x_n}.$

Cộng theo từng vế ta được:

$\dfrac{1}{x_{n+1}-1} = \dfrac{1}{x_1 - 1} - \left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{2025} - \dfrac{1}{x_{n+1}-1}$

$\Rightarrow P = \lim y_n = \lim 2026\left(\dfrac{1}{2025} - \dfrac{1}{x_{n+1}-1}\right).$

Để tìm $\lim y_n$ ta tìm $\lim x_n$.

Vì $x_{n+1} - x_n = (x_n - 1)^2 \geq 0, \forall n = 1, 2, \ldots$ nên (x_n) là dãy tăng, ta chứng minh

$x_n > n + 1, \forall n = 1, 2, \ldots$ (*) bằng qui nạp.

Dễ thấy (*) đúng với $n = 1$, giả sử nó đúng với n ta chứng minh (*) đúng với $n+1$. Thật vậy:

$x_{n+1} = x_n(x_n - 1) + 1 > (n+1)n + 1$

$= n^2 + n + 1 > n + 2, \forall n \geq 1.$

Vậy (*) đúng với $n+1$, suy ra (*) đúng với n bất kì. Từ (x_n) là dãy tăng và $x_n > n + 1, \forall n = 1, 2, \ldots$ (*) $\Rightarrow \lim x_n = +\infty$.

Từ đó suy ra: $P = \lim y_n = \dfrac{2026}{2025}$.

Bài 5. *Cho dãy số (a_n) xác định bởi:*

$a_1 = 2; 10a_n + 3a_n a_{n-1} - 4a_{n-1} = 0.$

Tìm $\lim a_n$.

Lời giải. Từ $10a_n + 3a_n a_{n-1} - 4a_{n-1} = 0$

$\Rightarrow a_n = \dfrac{4a_{n-1}}{3a_{n-1} + 10} \Rightarrow \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{2}.\dfrac{1}{a_{n-1}}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{a_{n-1}} + \dfrac{1}{2}\right).$

Đặt $u_n = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{2} \Rightarrow u_n = \dfrac{5}{2}u_{n-1}$. Suy ra (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = \dfrac{5}{2}; u_1 = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{2} = 1$

$\Rightarrow u_n = \left(\dfrac{5}{2}\right)^{n-1}, n = 1, 2, \ldots \Rightarrow \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^{n-1}$

$\Rightarrow a_n = \dfrac{1}{\left(\dfrac{5}{2}\right)^{n-1} - \dfrac{1}{2}}$. Từ đó $\lim a_n = 0$.

Bài 6. *Cho dãy số (x_n) xác định bởi:*

$x_1 = 2; x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n^2 + 1); n = 1, 2, \ldots.$

Đặt $S_n = \dfrac{1}{1+x_1} + \dfrac{1}{1+x_2} + \ldots + \dfrac{1}{1+x_n}$. Tìm $\lim S_n$.

Lời giải. Trước tiên ta chứng minh (x_n) tăng và không bị chặn trên. Ta có:

$x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{2}(x_n - 1)^2 \geq 0, \forall n = 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow (x_n)$ tăng và $x_n \geq x_1 = 2, \forall n = 1, 2, \ldots$

Giả sử (x_n) bị chặn trên thì nó có giới hạn hữu hạn $\lim x_n = a \Rightarrow a \geq 2$. Mặt khác

$$\lim x_{n+1} = \frac{1}{2}(a^2+1) \Rightarrow a = \frac{1}{2}(a^2+1) \Rightarrow a = 1,$$

mâu thuẫn với $a \geq 2$. Vậy (x_n) tăng và không bị chặn trên $\Rightarrow \lim x_n = +\infty$.

Ta có: $x_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(x_n - 1)(x_n + 1)$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_{n+1}-1} = \frac{2}{(x_n-1)(x_n+1)} = \frac{1}{x_n-1} - \frac{1}{x_n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_n+1} = \frac{1}{x_n-1} - \frac{1}{x_{n+1}-1}. \text{ Từ đó:}$$

$$S_n = \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n}$$

$$= \left(\frac{1}{x_1-1} - \frac{1}{x_2-1}\right) + \left(\frac{1}{x_2-1} - \frac{1}{x_3-1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{x_n-1} - \frac{1}{x_{n+1}-1}\right)$$

$$= \frac{1}{x_1-1} - \frac{1}{x_{n+1}-1} = 1 - \frac{1}{x_{n+1}-1} \Rightarrow \lim S_n = 1.$$

Bài 7. *Cho dãy số (x_n) xác định bởi:*

$$x_1 = 1; x_{n+1} = 1 + x_1 x_2 \ldots x_n, n = 1, 2, \ldots$$

Đặt $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$. Tìm $\lim S_n$.

Lời giải. Ta có: $x_{n+1} = 1 + x_1 x_2 \ldots x_n$

$$\Rightarrow x_{n+1} - 1 = x_1 x_2 \ldots x_n$$
$$= x_n(x_1 x_2 \ldots x_{n-1})$$
$$= x_n(x_1 x_2 \ldots x_{n-1} + 1 - 1) = x_n(x_n - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_{n+1}-1} = \frac{1}{x_n-1} - \frac{1}{x_n} \Rightarrow \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n-1} - \frac{1}{x_{n+1}-1}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_1} + \left(\frac{1}{x_2-1} - \frac{1}{x_3-1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{x_n-1} - \frac{1}{x_{n+1}-1}\right)$$

$$= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2-1} - \frac{1}{x_{n+1}-1} = 2 - \frac{1}{x_{n+1}-1}.$$

Ta chứng minh (x_n) tăng và không bị chặn trên. Thật vậy, dễ thấy $x_{n+1} > x_n$. Ta có:

$x_2 = 1 + x_1;$

$x_3 = 1 + x_1 x_2 > 1 + x_1;$

$x_4 = 1 + x_1 x_2 x_3 > 1 + x_1;$

.....

$$\Rightarrow x_{n+1} - 1 = x_1 x_2 \ldots x_n > x_1(1+x_1)(1+x_1)\ldots(1+x_1)$$
$$= x_1(1+x_1)^{n-1} = 2^{n-1}.$$

Vậy (x_n) tăng và không bị chặn trên. Do đó:

$$\lim(x_{n+1} - 1) = +\infty \Rightarrow \lim S_n = 2.$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$u_1 = \frac{1}{3}; u_{n+1} = \frac{u_n}{(2n+3)u_n + 1}, n = 1, 2, \ldots.$$

a) Tìm: $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{2019}$?

b) Tìm $\lim(u_n + 2021)$.

Bài 2. Cho dãy số (a_n) xác định bởi:

$$a_1 = \frac{1}{2}; a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}, n = 1, 2, \ldots.$$

Chứng minh rằng với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $\sum_{i=1}^{n} a_i < 1$.

Bài 3. Cho dãy số (x_n) xác định bởi:

$$x_1 = 1; x_{n+1} = x_n^2 + x_n, n = 1, 2, \ldots.$$

Tìm $\lim\left(\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n}\right)$.

Bài 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$u_1 = \frac{4}{5}; u_{n+1} = \frac{u_n^4}{u_n^4 - 8u_n^2 + 8}, n = 1, 2, \ldots$$

Tìm công thức u_n.

Bài 5. Cho dãy số (x_n) xác định bởi:

$$x_1 = 3; x_{n+1} = x_n^2 - 2, n = 1, 2, \ldots.$$

Tìm $\lim\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_2 x_3} + \ldots + \frac{1}{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n}\right)$.



TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

TRẦN XUÂN ĐẶNG
(5/7/136 Phan Đình Phùng, TP. Nam Định)

(*Kỳ 2*)

II. PHẦN THỨ HAI. ỨNG DỤNG CỦA DÃY SỐ

Bài toán 14 (Đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia năm 2001, Bảng A). *Cho hàm số* $g(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$. *Hãy tìm tất cả các hàm số* $f(x)$ *xác định ,liên tục trên khoảng* $(-1;1)$ *và thỏa mãn hệ thức* $(1-x^2)f(g(x))=(1+x^2)^2 f(x)$ *với mọi* $x\in(-1;1)$.

Sau đây là lời giải bài toán 14 của tác giả bài viết này (lời giải này khác với đáp án của Ban chấm thi).

Cách tiếp cận lời giải: Hàm $f(x)$ thỏa mãn $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2},\forall x\in(-1;1)$ thỏa mãn đề bài.

Xét hàm số $h:(-1;1)\to\mathbb{R}$ sao cho:

$$h(x)=(1-x^2)f(x),\forall x\in(-1;1).$$

Suy ra $h(g(x))=h(x),\forall x\in(-1;1)$.

Một tình huống xảy ra khi xét dãy (u_n) được xác định bởi $u_1=x(0<x<1);u_{n+1}=g(u_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ là $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$, nhưng 1 không thuộc tập xác định của hàm số $g(x)$.

Chúng ta xét dãy $(u_n)(n\in\mathbb{N}^*)$ được xác định bởi

$$u_1=x\in(0;1),u_{n+1}=\frac{1-\sqrt{1-u_n^2}}{u_n},\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $0<u_n<1,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Từ đó suy ra:

$$u_{n+1}<u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Suy ra dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$. Ta có $u_n=g(u_{n+1})$. Suy ra:

$$h(u_{n+1})=h(g(u_{n+1}))=h(u_n).$$

Vì $h(x)$ là hàm liên tục trên $(-1;1)$ nên

$$h(x)=h(u_1)=h(0).$$

Tương tự $h(x)=h(0),\forall x\in(-1;0)$.

Vậy $h(x)=c$ (c là hằng số). Suy ra:

$$f(x)=\frac{c}{1-x^2},\forall x\in(-1;1).$$

Thử lại ta thấy hàm số $f:(-1;1)\to\mathbb{R}$ sao cho $f(x)=\dfrac{c}{1-x^2},\forall x\in(-1;1)$ (c là hằng số) thỏa mãn đề bài.

III. PHẦN THỨ BA. MỘT SỐ CHUYEN DỀ VỀ DÃY SỐ (được viết bởi tác giả bài viết này).

CHUYÊN ĐỀ 1. *Về một bài toán tìm giới hạn của dãy số trong kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia năm 2005.*

Trong kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia năm 2005 có bài toán sau:

Bài toán 15. *Xét dãy số thực* $(x_n)(n=1,2,....)$ *được xác định bởi* $x_1=a$ *và* $x_{n+1}=3x_n^3-7x_n^2+5x_n$ *với mọi* $n=1,2,...$ *trong đó a là một số thực. Hãy xác định tất cả các giá trị của a để dãy số* (x_n) *có giới hạn hữu hạn khi* $n\to+\infty$. *Hãy tìm giới hạn của dãy số* (x_n) *trong các trường hợp đó.*

Sau đây là lời giải bài toán 15 của tác giả bài viết này (lời giải này khác với đáp án của Ban chấm thi).

Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b, (b \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow b = 3b^3 - 7b^2 + 5b \Rightarrow 3b^3 - 7b^2 + 4b = 0$

$\Rightarrow b \in \left\{0; 1; \frac{4}{3}\right\}$. Xét hàm

$$f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 5x \text{ có:}$$

$$f'(x) = 9x^2 - 14x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{5}{9} \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	$\frac{5}{9}$	1	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$ 0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{275}{243}$	↘ 1	↗	$+\infty$

($(f(1) = 1, f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}, f(0) = 0, f\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{275}{243}$).

TH1: $a = 0 \Rightarrow x_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0.$

TH2: $a = 1 \Rightarrow x_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1.$

TH3: $a = \frac{4}{3} \Rightarrow x_n = \frac{4}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{4}{3}.$

TH4: $a > \frac{4}{3} \Rightarrow x_n > \frac{4}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow x_{n+1} - x_n = x_n(x_n - 1)(3x_n - 4) > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Suy ra dãy (x_n) tăng. Giả sử tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$

$(b \in \mathbb{R}) \Rightarrow b > x_1 \Rightarrow b > \frac{4}{3}.$

Mặt khác $b \in \left\{0; 1; \frac{4}{3}\right\}$. Đó là điều vô lý. Vậy dãy

(x_n) không có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

TH5: $a < 0$

$\Rightarrow x_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_{n+1} - x_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ dãy (x_n) là dãy giảm.

Giả sử tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$ $(b \in \mathbb{R}) \Rightarrow b < x_1 < 0.$

Đó là điều vô lý vì $b \in \left\{0; 1; \frac{4}{3}\right\}$.

TH6: $1 < a < \frac{4}{3}$. Khi đó $x_n \in \left(1; \frac{4}{3}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$ và

$x_{n+1} - x_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ dãy (x_n) là dãy giảm

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b \left(1 \le b < \frac{4}{3}\right) \Rightarrow b = 1.$

TH7: $0 < a < 1 \Rightarrow x_n \in \left(0; \frac{4}{3}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*.$

+ Nếu $\exists n_o \in \mathbb{N}^*$ sao cho $x_{n_o} > 1$. Suy ra:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 1.$$

+ Nếu $0 < x_n \le 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_{n+1} \ge x_n$, $\forall n \ge 1$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$ $(0 < b \le 1) \Rightarrow b = 1.$

Tóm lại, dãy (x_n) là dãy hội tụ khi và chỉ khi $a \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$, và khi đó:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ nếu $a = 0$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{4}{3}$ nếu $a = \frac{4}{3}$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$ nếu $a \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$.

CHUYÊN ĐỀ 2. ***Về một bài toán tìm giới hạn của dãy số trong kì thi chọn đội tuyển Việt Nam dự thi Olympic Toán Quốc tế năm 1993***

Trong kì thi chọn đội tuyển Việt Nam dự thi Olympic Toán Quốc tế năm 1993 có bài toán sau

Bài toán 16. *Dãy số (a_n) được xác định bởi $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt{a_n}} (n \ge 1)$. Hãy xác định tất cả các số thực α sao cho dãy (u_n) được xác định bởi $u_n = \frac{a_n^\alpha}{n} (n \ge 1)$ có giới hạn hữu hạn khác 0 khi $n \to +\infty$.*

Lời giải. Ta có: $a_2 = 2, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt{a_n}}$

$$\Rightarrow a_{n+1}^3 = a_n^3 + 3 + 3a_n\sqrt{a_n} + \frac{1}{a_n\sqrt{a_n}}$$

$$> a_n^3 + 3a_n\sqrt{a_n} + \frac{9}{4}$$

$\Rightarrow \sqrt{a_{n+1}^3} > \sqrt{a_n^3} + \frac{3}{2} \Rightarrow a_n^{\frac{3}{2}} > \frac{3}{2}(n-1), \forall n \geq 2.$

Với $k \geq 1$, ta có $\frac{1}{\sqrt[3]{k}} < \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{k^2} - \sqrt[3]{(k-1)^2}\right)$.

Suy ra: $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} < \frac{3}{2}\sqrt[3]{(n-1)^2}$.

Với $n \geq 3$, ta có:

$$a_{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_k}} < 2 + \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2}(n-1)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^{\frac{3}{2}}}{n} = \frac{3}{2}.$$

Nếu $\alpha > \frac{3}{2}$ thì $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^\alpha}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n^{\frac{3}{2}}}{n} a_n^{\alpha-\frac{3}{2}}\right) = +\infty.$

Nếu $\alpha < \frac{3}{2}$ thì $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^\alpha}{n} = 0.$

Sử dụng định lí Stolz chúng ta có thể giải được bài toán 16: Ta chứng minh $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^{\frac{3}{2}}}{n} = \frac{3}{2}.$

Thật vậy ta có $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Xét hai dãy (x_n) và (y_n) được xác định bởi $x_n = a_n^{\frac{3}{2}}$ và $y_n = n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Ta có:

$y_{n+1} > y_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$ và

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(a_{n+1}^{\frac{3}{2}} - a_n^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{a_{n+1}^{\frac{3}{2}} + a_n^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1}^2 + a_n^2 + a_n a_{n+1})}{a_{n+1}^{\frac{3}{2}} + a_n^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{a_n}}(a_n^2 + a_{n+1}^2 + a_n a_{n+1})}{a_{n+1}^{\frac{3}{2}} + a_n^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2}$$

(vì $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$).

Bài toán sau là bài toán tổng quát của bài toán 16

Bài toán 17. *Cho các số thực dương r, a. Xét dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^r}$ $(n \geq 1)$. Chứng minh rằng tồn tại các hằng số α, A sao cho $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^\alpha}{n} = A$.*

Lời giải. Ta chứng minh

$$x_n > \left[(r+1)(n-1)\right]^{\frac{1}{r+1}} \ (1), \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2.$$

Với $n = 2$ thì (1) trở thành $a + \frac{1}{a^r} > (r+1)^{\frac{1}{r+1}}$. Xét hàm số

$$f(x) = x + \frac{1}{x^r} (x > 0) \text{ có}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{r}{x^{r+1}} = \frac{x^{r+1} - r}{x^{r+1}} = 0 \Leftrightarrow x = r^{\frac{1}{r+1}}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	0		$r^{\frac{1}{r+1}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f\left(r^{\frac{1}{r+1}}\right)$	↗	

$\Rightarrow f(x) \geq f(r^{\frac{1}{r+1}}) = \frac{r+1}{r^{\frac{r}{r+1}}}, \forall x > 0.$ Mặt khác

$$\frac{r+1}{r^{\frac{r}{r+1}}} > (r+1)^{\frac{1}{r+1}} \Rightarrow a + \frac{1}{a^r} > (r+1)^{\frac{1}{r+1}}$$

Vậy (1) đúng với $n = 2$. Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 2$. Ta chứng minh:

$$x_{k+1} > \left[(r+1)k\right]^{\frac{1}{r+1}}.$$

Thật vậy, vì $\left[(r+1)(k-1)\right]^{\frac{1}{r+1}} > r^{\frac{1}{r+1}}$ nên

$$x_{k+1} = f(x_k) > f\left(\left[(r+1)(k-1)\right]^{\frac{1}{r+1}}\right)$$

$$= \left[(r+1)(k-1)\right]^{\frac{1}{r+1}} + \frac{1}{\left[(r+1)(k-1)\right]^{\frac{r}{r+1}}}.$$

Ta chứng minh:

$$\left[(r+1)(k-1)\right]^{\frac{1}{r+1}}+\frac{1}{\left[(r+1)(k-1)\right]^{\frac{r}{r+1}}}$$

$$>\left[(r+1)k\right]^{\frac{1}{r+1}} \quad (2).$$

Thật vậy, (2) tương đương với

$$(r+1)^{\frac{1}{r+1}}\left[k^{\frac{1}{r+1}}-(k-1)^{\frac{1}{r+1}}\right]<\frac{1}{\left[(r+1)(k-1)\right]^{\frac{r}{r+1}}}.$$

Xét hàm số $g(x)=(r+1)x^{\frac{1}{r+1}}$ $(x\in[k-1;k])$

$(k\in\mathbb{N}^*, k\geq 2)$. Ta có: $g'(x)=x^{-\frac{r}{r+1}}$.

Theo định lí Lagrange $\exists b\in(k-1;k)$ sao cho

$$g(k)-g(k-1)=g'(b)$$

$$\Rightarrow (r+1)\left[k^{\frac{1}{r+1}}-(k-1)^{\frac{1}{r+1}}\right]=b^{-\frac{r}{r+1}}.$$

Vì $0<k-1<b<k$ nên

$$k^{-\frac{r}{r+1}}<b^{-\frac{r}{r+1}}<(k-1)^{-\frac{r}{r+1}}.$$

Suy ra:

$$\frac{1}{k^{\frac{r}{r+1}}}<(r+1)\left[k^{\frac{1}{r+1}}-(k-1)^{\frac{1}{r+1}}\right]$$

$$<\frac{1}{(k-1)^{\frac{r}{r+1}}}$$

$$\Rightarrow (r+1)^{\frac{1}{r+1}}\left[k^{\frac{1}{r+1}}-(k-1)^{\frac{1}{r+1}}\right]<\frac{1}{\left[(r+1)(k-1)\right]^{\frac{r}{r+1}}}$$

$\Rightarrow$ (1) đúng. Với $n\geq 3$ ta có:

$$x_n=a+\frac{1}{a^r}+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{x_k^r}$$

$$<a+\frac{1}{a^r}+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{\left[(r+1)(k-1)\right]^{\frac{r}{r+1}}}$$

$$=a+\frac{1}{a^r}+\left(\frac{1}{r+1}\right)^{\frac{r}{r+1}}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k^{\frac{r}{r+1}}}$$

$$<\left(\frac{1}{r+1}\right)^{\frac{r}{r+1}}(r+1)(n-2)^{\frac{1}{r+1}}+a+\frac{1}{a^r}$$

$$\Rightarrow \frac{(r+1)(n-1)}{n}<\frac{x_n^{r+1}}{n}$$

$$<\frac{1}{n}\left[(r+1)^{\frac{1}{r+1}}(n-2)^{\frac{1}{r+1}}+a+\frac{1}{a^r}\right]^{r+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{x_n^{r+1}}{n}=r+1.$$

CHUYÊN ĐỀ 3. ***Về sự hội tụ của một dãy số***

Bài toán18. *Giả sử a là số thực dương. Xét dãy (x_n) được xác định bởi $x_1=0$ và $x_{n+1}=a^{x_n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.. Tìm tất cả cá giá trị của a để dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$.*

Có nhiều bạn đọc quan tâm đến việc tìm lời giải cho bài toán 18. *Trong bài viết này, tác giả xin được giới thiệu với bạn đọc lời giải của bài toán 18.*

• TH1: $a=1$. Khi đó $x_n=1, \forall n\geq 2 (n\in\mathbb{N}^*)$. Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=1$.

• TH2: $a>1$. Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $x_n\geq 0, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Xét hàm số $f(x)=a^x$ $(x\geq 0)$ có

$$f'(x)=a^x\ln a>0, \forall x>0.$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$. Ta có $x_2=1>x_1$. Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $x_{n+1}>x_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Suy ra dãy (x_n) là dãy tăng. Giả sử dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$. Khi đó PT $x=a^x$ (1) có nghiệm dương.

PT(1) $\Leftrightarrow x\ln a=\ln x\Leftrightarrow x\ln a-\ln x=0$.

Xét hàm số $g(x)=x\ln a-\ln x (x>0)$ có:

$$g'(x)=\ln a-\frac{1}{x}=\frac{x\ln a-1}{x}(x>0);$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{\ln a}.$$

Đặt $x_0=\frac{1}{\ln a}$. Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	0	x_0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$ 0 $+$	
$g(x)$		$g(x_0)$	

Vì phương trình (1) có nghiệm dương nên

$$g(x_0)\le 0\Rightarrow x_0\ln a-\ln x_0\le 0$$

$$\Rightarrow 1-\ln\frac{1}{\ln a}\le 0\Rightarrow \ln\frac{1}{\ln a}\ge 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln a}\ge e\Rightarrow \ln a\le\frac{1}{e}\Leftrightarrow a\le e^{\frac{1}{e}}.$$

Ngược lại giả sử $a\le e^{\frac{1}{e}}$. Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $x_n<e,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Suy ra dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$.

• TH3: $e^{-e}\le a<1$. Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $1\ge x_n\ge 0,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Xét hàm số $f(x)=a^x$ $(1\ge x\ge 0)$. Ta có:

$$x_{n+1}=f(x_n),\forall n\in\mathbb{N}^*$$

và $\quad f'(x)=a^x\ln a<0,\ \forall x\in(0;1).$

Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên $[0;1]$.

Ta có: $x_3=a>x_1=0\Rightarrow f(x_3)<f(x_1)$

$\Rightarrow x_4<x_2\Rightarrow f(x_4)>f(x_2)\Rightarrow x_5>x_3$.

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được:

$$x_{2k-1}<x_{2k+1},x_{2k}>x_{2k+2},\forall k\in\mathbb{N}^*.$$

Vì vậy các dãy số $(x_{2k-1}),(x_{2k})$ có giới hạn hữu hạn khi $k\to+\infty$. Khi đó tồn tại các số thực b,c sao cho: $\lim\limits_{k\to+\infty}x_{2k-1}=b$, $\lim\limits_{k\to+\infty}x_{2k}=c$

$$(0<b\le 1,0\le c<1),b=a^c \text{ và } c=a^b.$$

Suy ra $b=a^{ab}$ và $c=a^{ac}$. Suy ra $c>0$.

Xét phương trình $x=a^{ax}$ (2) $(x>0)$. Ta có:

$$(2)\Leftrightarrow a^x\ln a=\ln x\ (x>0)\Leftrightarrow\frac{\ln x}{a^x}-\ln a=0.$$

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{\ln x}{a^x}-\ln a\ (x>0)$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{1-(x\ln a)\ln x}{xa^x}$.

Xét hàm số $h(x)=1-(x\ln a)\ln x\ (x>0)$ có:

$$h'(x)=(-\ln a)(1+\ln x)(x>0)$$

$$h'(x)=0\Leftrightarrow x=e^{-1}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau:

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$h'(x)$		$-$ 0 $+$	
$h(x)$		$h(e^{-1})$	

Chúng ta xét hai trường hợp

i) $a>e^{-e}$. Ta có: $h(e^{-1})=1+\dfrac{\ln a}{e}>0$

$\Rightarrow h(x)>0,\forall x>0\Rightarrow g'(x)>0,\forall x>0$. Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra phương trình $g(x)=0$ có không quá 1 nghiệm. Mặt khác $g(b)=0$ và $g(c)=0$ nên $b=c$. Vậy dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$.

ii) $a=e^{-e}$. Khi đó $h(e^{-1})=0$. Suy ra:

$$h(x)\ge 0,\forall x>0;\ h(x)=0\Leftrightarrow x=e^{-1}.$$

Suy ra: $g'(x)\ge 0,\ \forall x>0;\ g'(x)=0\Leftrightarrow x=e^{-1}$.

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra phương trình $g(x)=0$ có không quá 1 nghiệm. Mặt khác $g(b)=0$ và $g(c)=0$ nên $b=c$. Vậy dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$.

• TH4: $0<a<e^{-e}$. Xét hàm số

$$\lambda(t)=a^t-t\ \ (0\le t\le 1).$$

Ta có $\lambda'(t)=a^t\ln a-1<0,\forall t\in(0;1)$.

Mặt khác $\lambda(t)$ liên tục trên $[0;1]$ nên $\lambda(t)$ nghịch biến trên $[0;1]$. Ta có:

$$0<a<e^{-e}\Rightarrow\ln a<-e\ \Rightarrow e^{-1}\ln a<-1$$

$$\Rightarrow\ln a^{e^{-1}}<-1\Rightarrow a^{e^{-1}}<e^{-1}.$$

Suy ra $\lambda(e^{-1})<0$. Mặt khác $\lambda(0)=1>0$. Vì vậy tồn tại $t_0\in(0;e^{-1})$ sao cho $\lambda(t_0)=0$.

Vì $\lambda(t)$ nghịch biến trên $[0;1]$ nên phương trình $\lambda(t)=0$ có nghiệm duy nhất.

Xét hàm số $\varphi(t)=a^{a^t}-t\ (0\le t\le 1)$.

Ta có $\varphi'(t)=a^{a^t}.a^t(\ln a)^2-1,\forall t\in(0;1)$

và $a^{t_0}=t_0\Rightarrow t_0\ln a=\ln t_0$.

Vì $t_0<e^{-1}$ nên

$$\ln t_0<-1\Rightarrow t_0^2(\ln a)^2=(\ln t_0)^2>1.$$

Suy ra $\varphi'(t_0)=t_0^2(\ln a)^2-1>0$. Mặt khác do $\varphi'(t)$ liên tục trên $(0;1)$ nên tồn tại $t_1,t_2\in(0;1)$ sao cho $t_1<t_0<t_2$ và $\varphi'(t)>0,\forall t\in(t_1;t_2)$.

Suy ra $\varphi(t)$ đồng biến trên $[t_1;t_2]$. Suy ra $\varphi(t_1)<\varphi(t_0)<\varphi(t_2)$. Vì $\varphi(t_0)=0$ nên $\varphi(t_1)<0<\varphi(t_2)$. Ta có $\varphi(0)=a>0$ nên tồn tại $t_3\in(0;t_1)$ sao cho $\varphi(t_3)=0$.

Xét hàm số $\beta(t)=a^{a^t}\ (0\le t\le 1)$. Ta có:

$$\beta'(t)=a^{a^t}.a^t(\ln a)^2>0,\forall t\in(0;1).$$

Suy ra $\beta(t)$ đồng biến trên $[0;1]$. Ta có:

$$x_1=0,x_3=\beta(x_1).$$

Vì $x_1<t_3$ nên $\beta(x_1)<\beta(t_3)$. Suy ra $x_3<t_3$.

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được:

$$x_{2k-1}<t_3,\forall k\in\mathbb{N}^*.$$

Giả sử dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=b\ (b\in\mathbb{R})$.

Khi đó $\lim\limits_{k\to+\infty}x_{2k-1}=b$ và $b\in[0;1]$. Vì $x_{2k-1}<t_3,\forall k\in\mathbb{N}^*$ nên $b\le t_3$. Suy ra $b<t_0$.

Mặt khác ta có $b=a^b$. Suy ra $b=t_0$. Mâu thuẫn nhận được chứng tỏ rằng dãy (x_n) không có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$.

Tóm lại dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$ khi và chỉ khi $e^{-e}\le a\le e^{\frac{1}{e}}$.

Cuối cùng là một số bài tập dành để luyện tập.

BÀI TẬP

Bài 1. Xét dãy số thực $(x_n)\ (n\ge 1)$ được xác định bởi $x_1=a(a\in\mathbb{R})$ và $x_{n+1}=2x_n^3-5x_n^2+4x_n$ với $n\ge 1$. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn. Hãy tìm giới hạn của dãy số (x_n) trong các trường hợp đó.

Bài 2. Cho dãy số thực (x_n) được xác định bởi $x_1=0,\ x_2=2$ và $x_{n+2}=2^{-x_n}+\frac{1}{2}\ (n=1,2,3,...)$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$. Tìm giới hạn đó.

Bài 3. Cho số thực dương a. Xét dãy (x_n) được xác định bởi $x_1=a,x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n^2}(n\ge 1)$.

Chứng minh rằng tồn tại các hằng số dương α,A sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n^\alpha}{n}=A$.

Bài 4. Xét dãy số $(x_n)(n\in\mathbb{N}^*)$ được xác định bởi $x_1=1,x_{n+1}=x_n+\frac{1}{\sqrt[3]{x_n}}(n\ge 1)$

Hãy tìm tất cả các số thực α sao cho dãy $(u_n)(n\ge 1)$ được xác định bởi $u_n=\frac{x_n^\alpha}{n}\ (n\ge 1)$ có giới hạn hữu hạn khác 0 khi $n\to+\infty$

Bài 5. Cho dãy số $(x_n)(n\in\mathbb{N}^*)$ được xác định bởi $x_1=0$ và $x_{n+1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{x_n},\forall n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

Bài 6. Cho dãy số $(x_n)(n\ge 1)$ được xác định bởi Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

Bài 7. Cho tập hợp F gồm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(3x)\ge f(f(2x))+x$$

với mọi số thực dương x. Hãy tìm số thực α lớn nhất sao cho với mọi hàm số f thuộc tập hợp F ta đều có $f(x)\ge\alpha x$ với mọi số thực dương x.

Bài 8. Tìm tất cả các hàm liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho $f\left(x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}\right)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

Bài 9. Cho dãy số $(u_n)(n\in\mathbb{N}^*)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau $0<u_n<1,\forall n\in\mathbb{N}^*$ và $u_{n+1}(1-u_n)\ge\frac{1}{4},\forall n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}<u_n\le\frac{1}{2},\forall n\in\mathbb{N}^*$

Bài 10. Cho dãy số thực (x_n) được xác định bởi $x_1=\frac{1}{2}$ và $x_n=\frac{\sqrt{x_{n-1}^2+4x_{n-1}}++x_{n-1}}{2}\ (\forall n\ge 2)$.

Với mỗi số nguyên dương n, đặt $y_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}$.

Chứng minh rằng dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$. Hãy tìm giới hạn đó.

Bài 11. Xét dãy số thực (u_n) $(n\in\mathbb{N}^*)$ được xác định bởi $u_1=a\ (a\in\mathbb{R})$

và $u_{n+1}=\frac{1}{2}\ln\left(1+u_n^2\right)-2024,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng (u_n) là một dãy hội tụ.

****

TỪ BÀI TOÁN ...

(Tiếp theo trang 20)

Thí dụ 7. *Lớp 12A có 30 học sinh, trong đó có 17 bạn nữ còn lại là nam. Có 3 bạn tên Hiền, trong đó có 1 bạn nữ và 2 bạn nam. Thầy giáo gọi ngẫu nhiên 1 bạn lên bảng.*

a) *Xác suất để gọi một bạn tên Hiền là* $\frac{1}{10}$.

b) *Xác suất để có tên Hiền, với điều kiện bạn đó giới tính nữ là* $\frac{3}{17}$.

c) *Xác suất để có tên Hiền, với điều kiện bạn đó giới tính nam là* $\frac{2}{13}$.

d) *Nếu thầy giáo gọi một bạn tên Hiền lên bảng thì xác suất để bạn đó mang giới tính nữ là* $\frac{3}{17}$.

Kết quả. a) Đúng; b) Sai; c) Đúng; d) Sai.

Lời giải. Gọi A là biến cố "Học sinh được gọi lên bảng tên là Hiền", Gọi B là biến cố "Học sinh được chọn mang giới tính nữ".

a) Xác suất để thầy giáo gọi một bạn tên Hiền lên bảng là $P(A)=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$.

b) Xác suất để thầy giáo gọi bạn đó lên bảng có tên Hiền, nhưng với điều kiện bạn đó nữ là $P(A\mid B)$. Ta có: $P(B)=\frac{17}{30}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{30}$,

do đó: $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{30}}{\frac{17}{30}}=\frac{1}{17}$.

c) Gọi C là biến cố " Học sinh được chọn mang giới tính nam".

Xác suất thầy giáo gọi bạn đó lên bảng có tên Hiền, với điều kiện bạn đó nam là $P(A\mid C)$.

Ta có: $P(C)=\frac{13}{30}$, $P(A\cap C)=\frac{2}{30}$.

Do đó: $P(A\mid C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{2}{30}}{\frac{13}{30}}=\frac{2}{13}$.

d) Nếu thầy giáo gọi 1 bạn có tên là Hiền lên bảng thì xác xuất để bạn đó là bạn nữ là $P(B\mid A)$.

Ta có: $P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{30}}{\frac{3}{30}}=\frac{1}{3}$.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 115

PROBLEM. *Show that if a sequence given by the iterative formula* $x_{n+1} = \sqrt{x_n + \frac{6}{x_n}}, x_1 = 2.5$ *converges then it converges to a real root of the equation* $x^3 - x^2 - 6 = 0$.

Solution. Assume that $x_n \to l$.

Let $n \to \infty$ in both sides of the equality

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + \frac{6}{x_n}}$$

we get $l = \sqrt{l + \frac{6}{l}}$. Therefore, $l^2 = l + \frac{6}{l}$.

And hence $l^3 - l^2 - 6 = 0$.

Then the given sequence converges to a real root of the equation $x^3 - x^2 - 6 = 0$.

***Remark*:** This problem is based on a problem on an A-level Math paper.

TỪ VỰNG

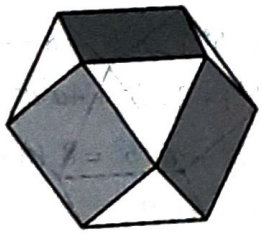
iterative : *lặp*

converge : *hội tụ*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 113

BÀI TOÁN. *Mỗi mặt của một khối đa diện ở hình dưới là một hình tam giác hoặc một hình vuông. Mỗi hình vuông giáp với với 4 hình tam giác, mỗi hình tam giác giáp với 3 hình vuông. Biết khối đa diện có 6 hình vuông, hỏi hình đa diện có bao nhiêu hình tam giác?*



Lời giải. Mỗi hình vuông giáp với 4 hình tam giác và có 6 hình vuông nên chúng ta nhận được 24 hình tam giác trong đó một số hình tam giác có thể được tính nhiều hơn một lần. Mỗi hình tam giác được đếm 3 lần vì nó giáp với 3 hình vuông. Do đó số hình tam giác trong khối đa diện là:

$$24 : 3 = 8 \text{ (hình)}$$

***Lưu ý*:** *Bài toán này được sưu tầm, chuyển thể từ một đề thi toán Kanggaroo.*

Nhận xét. Rất tiếc là Tòa soạn không nhận được bài dịch nào của bài này gửi về Tòa soạn.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

****

TIN BUỒN

Tòa soạn Tạp chí Toán học và Văn học trong nhà trường (TH&VH TNT) vô cùng thương tiếc báo tin: Đồng chí *Hồ Quang Vinh*, sinh ngày 29/9/1971, là thư ký Tòa soạn Tạp chí TH&VH TNT, sau một thời gian lâm bệnh, mặc dù đã được gia đình, bạn bè tận tình chăm sóc, các thầy thuốc hết lòng cứu chữa, nhưng do bệnh nặng, đồng chí đã từ trần vào ngày 10/3/2025. Đồng chí *Hồ Quang Vinh* mất đi là một sự mất mát không gì có thể bù đắp được đối với gia đình, bạn bè, đồng nghiệp và Tạp chí. Cầu mong đồng chí yên giấc ngàn thu trong cõi vĩnh hằng.

Tòa soạn Tạp chí TH&VH TNT kính báo.



BÀI TOÁN 94. *Giải phương trình sau trên tập số thực*

$$(1-x)\sqrt{1+x}+(1+x)\sqrt{1-x}=2\sqrt{1+x^2}.$$

Lời giải.

Cách 1. ĐK: $-1\le x\le 1$. Phương trình được viết lại dưới dạng:

$$\left(\sqrt{1+x}-1\right)+\left(\sqrt{1-x}-1\right)+x\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)=2\left(\sqrt{1+x^2}-1\right).$$

Bằng cách nhân lượng liên hợp ta được:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1+x}+1}\right)+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}+1}\right)+x\left(\frac{-2x}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right)=2\left(\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}-\frac{1}{\sqrt{1-x}+1}\right)-\frac{2x^2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}=\frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{-2x}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}\right)-\frac{2x^2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}-\frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow -2x^2\left(\frac{1}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}+\frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)=0.$$

Tới đây ta thấy rằng phương trình chỉ có nghiệm $x=0$ thỏa mãn điều kiện.

Cách 2. ĐK: $-1\le x\le 1$. Khi đó, vì hai vế của phương trình là các số không âm nên bình phương hai vế ta được phương trình tương đương:

$$(1-x)^2(1+x)+2\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}+(1+x)^2(1-x)=4\left(1+x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(1-x^2\right)+2\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}=4\left(1+x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}=1+3x^2.$$

Đến đây vì hai vế đều không âm, ta tiếp tục bình phương và được phương trình tương đương:

$$\left(1-x^2\right)^3=\left(1+3x^2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 1-3x^2+3x^4-x^6=1+6x^2+9x^4$$

$$\Leftrightarrow x^6+6x^4+9x^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x^4+6x^2+9\right)=0.$$

Tới đây, vì $x^4+6x^2+9\ge 9$ nên phương trình đã cho chỉ có nghiệm $x=0$ thỏa mãn ĐK.

Cách 3. ĐK: $-1\le x\le 1$.

Đặt $a=\sqrt{1-x};b=\sqrt{1+x},a,b\ge 0$ thì phương trình đã cho trở thành:

$$a^2b+ab^2=2\sqrt{2-a^2b^2} \text{ với } 0\le ab\le\sqrt{2} \ (*).$$

Mặt khác ta có: $a^2+b^2=1-x+1+x=2$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}a^2+b^2=2 & (1)\\ a^2b+ab^2=2\sqrt{2-a^2b^2} & (2)\end{cases}.$$

Với ĐK(*) ta có:

$(2)\Leftrightarrow a^4b^2+a^2b^4+2a^3b^3=8-4a^2b^2$

$\Leftrightarrow a^2b^2(a^2+b^2)+2a^3b^3+4a^2b^2=8$

$\Leftrightarrow 2a^2b^2+2a^3b^3+4a^2b^2=8$ (do (1))

$\Leftrightarrow a^3b^3+3a^2b^2-4=0$

$\Leftrightarrow (ab-1)(ab+2)^2=0$

$\Leftrightarrow ab=1$ (do (*)).

Với $ab=1$, ta có: $\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=1\Leftrightarrow 1-x^2=1\Leftrightarrow x=0.$

Vậy phương trình đã cho chỉ có nghiệm $x=0$ thỏa mãn ĐK.

Cách 4. ĐK: $-1\le x\le 1$, bình phương hai vế ta được: $\left(1-x^2\right)\left(2+2\sqrt{1-x^2}\right)=4\left(1+x^2\right)$

$$\Leftrightarrow \left(1-x^2\right)\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)=2\left(1+x^2\right).$$

Đặt $t=\sqrt{1-x^2}\ge 0\Rightarrow t^2=1-x^2\Leftrightarrow x^2=1-t^2$.

Ta được phương trình: $t^2(1+t)=2\left(1+1-t^2\right)$

$\Leftrightarrow t^3+3t^2-4=0\Leftrightarrow (t-1)(t+2)^2=0.$

Đến đây, ta được $t=1\Rightarrow x=0$. Vậy phương trình đã cho chỉ có nghiệm $x=0$ thỏa mãn ĐK.

Cách 5. ĐK: $-1\le x\le 1$. Phương trình được viết lại: $\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)=2\sqrt{1+x^2}$.

Hai vế đều không âm, bình phương hai vế ta được phương trình tương đương:

$$\left(1-x^2\right)\left(2+2\sqrt{1-x^2}\right)=4\left(1+x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(1-x^2\right)\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)=2\left(1+x^2\right).$$

Với điều kiện đã cho, đặt $x=\cos t, t\in[0;\pi]$, ta được phương trình:

$$\sin^2 t(1+\sin t)=2\left[1+\left(1-\sin^2 t\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 t+3\sin^2 t-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin t=1\\ \sin t=-2\ \text{(loại)}\end{array}\right.$$

Với $\sin t=1\Rightarrow x=\cos t=0$, thử lại $x=0$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Cách 6. ĐK: $-1\le x\le 1$, phương trình được viết lại:

$$\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)=2\sqrt{1+x^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\le\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left(\sqrt{1+x}^2+\sqrt{1-x}^2\right)}=2$$

và $\sqrt{1-x^2}\le\sqrt{1+x^2}$.

Do đó: $\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\le 2\sqrt{1+x^2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=0$.

Thử lại $x=0$ là nghiệm của phương trình đã cho.

TRẦN MINH VŨ

(GV THPT chuyên Gia Lai)

Nhận xét. Kỳ này bạn *Huỳnh Thanh Trúc*, 10 Toán 1, THPT chuyên Tiền Giang, **Tiền Giang** đóng góp một cách giải như cách 3, và các bạn: *Hà Lê Nguyên Phúc*, 10A8, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, **Sóc Trăng**, *Từ Thái Quân*, 10E1, TH, THCS& THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú, *Vũ Quốc Thắng*, THPT Tây Thạnh, **TP. Hồ Chí Minh** đóng góp một cách giải như cách 6 trong lời giải trên của bạn *Trần Minh Vũ*. Xin hoan nghênh các bạn.

HOÀNG CHI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 91 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30/5/2025.

BÀI TOÁN 96. *Cho tam giác đều ABC cạnh a. P là một điểm nằm trong tam giác. Biết rằng $PA=1$; $PB=\sqrt{3}$; $PC=2$, tìm a?*

NGUYỄN VĂN BẢN

(GV THCS Thanh Yên, Điện Biên)

****

SAI LẦM . . .

(Tiếp theo trang 47)

Gọi A là biến cố "*Chọn được một tam cân mà không phải tam giác đều*"

Xét đỉnh A_1 của đa giác đều $A_1A_2\ldots A_{18}$, ta có thể chọn được 8 cặp đỉnh (mỗi cặp đỉnh đối xứng nhau qua OA_1) để cùng với đỉnh A_1 tạo được 8 tam giác cân có đỉnh A_1 (trong số đó có 1 tam giác đều).

Số tam giác cân (không đều) là $8-1=7$.

Với các đỉnh còn lại từ $A_2, A_3,\ldots, A_{18}$ thì cũng cho ta kết quả tương tự.

Vậy số tam giác cân (không đều) là

$$18.7=126 \text{ hay } n(A)=126.$$

Do vậy:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{126}{C_{18}^3}=\frac{21}{136}.$$

Theo em lời giải của Hoàng kết quả có đúng không?

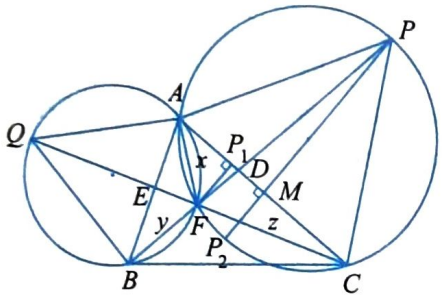
NGUYỄN THANH GIANG

(Trường THPT chuyên Hưng Yên)



BÀI TOÁN 102 (IMO short-list 2002). *Cho tam giác ABC và điểm F nằm trong tam giác thỏa mãn $\widehat{AFB} = \widehat{BFC} = \widehat{CFA}$. Gọi D và E lần lượt là giao điểm của BF với AC và CF với AB. Chứng minh $AB + AC \geq 4DE$ (1).*

Lời giải. Cách 1. Chúng ta cần nhận xét sau: *Cho tam giác DEF. P và Q lần lượt nằm trên các cạnh FD, FE sao cho $PF \geq \lambda DF$, $QF \geq \lambda EF$ với $\lambda > 0$. Nếu $\widehat{PFQ} \geq 90^0$ thì $PQ \geq \lambda DE$.*



Thậy vậy, đặt $\widehat{PFQ} = \alpha$ thì do $\alpha \geq 90^0$ nên $-\cos\alpha \geq 0$. Theo định lý cô sin ta có:

$$PQ^2 = PF^2 + QF^2 - 2\cos\alpha.PF.QF$$

$$\geq (\lambda DF)^2 + (\lambda EF)^2 - 2\cos\alpha(\lambda DF)(\lambda EF) = (\lambda DE)^2.$$

Vậy $PQ \geq \lambda DE$. *Quay trở lại bài toán.*

Dựng ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều AQB và APC. Dễ thấy các tứ giác $AQBF$ và $APCF$ nội tiếp và các điểm Q, E, F, C và P, D, F, B thẳng hàng. Kẻ $FP_1 \perp AC$ ($P_1 \in AC$). Gọi M là trung điểm của AC và $P_2 = PM \cap (APC)$. Suy ra $PM \perp AC$. Ta có: $\dfrac{PD}{DF} = \dfrac{PM}{FP_1} \geq \dfrac{PM}{MP_2} = 3$

$\Rightarrow PF \geq 4DF$. Tương tự: $QF \geq 4EF$.

Do $\widehat{DFE} = 120^0$ nên theo nhận xét trên ta có: $PQ \geq 4DE$. Theo BĐT tam giác ta có:

$AB + AC = AQ + AP \geq PQ \geq 4DE$ (đpcm).

Chú ý. Có thể chứng minh $PF \geq 4DF$ như sau:

$S_{AFC} = S_{AFD} + S_{CFD} \Leftrightarrow AF.CF = AF.DF + CF.DF$

$\Rightarrow DF = \dfrac{AF.CF}{AF + CF}$ (*). Theo định lý Ptolemy ta có:

$$PF = AF + CF \Rightarrow \frac{PF}{DF} = \frac{(AF + CF)^2}{AF.CF} \geq 4.$$

Cách 2. Đặt $AF = x$, $BF = y$, $CF = z$. Theo (*) ta có: $EF = \dfrac{xy}{x+y}$ và tương tự: $DF = \dfrac{xz}{x+z}$. Áp dụng định lý cô sin cho các tam giác ABF, ACF, DEF, BĐT(1) trở thành: $\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2}$

$$\geq 4\sqrt{\left(\frac{xy}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{xz}{x+z}\right)^2 + \frac{xy}{x+y}.\frac{xz}{x+z}} \quad (2).$$

Vì $\dfrac{x+y}{4} \geq \dfrac{xy}{x+y}$ và $\dfrac{x+z}{4} \geq \dfrac{xz}{x+z}$ nên BĐT(2) được chứng minh nếu ta chứng minh được:

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2}$$

$$\geq \sqrt{(x+y)^2 + (x+z)^2 + (x+y)(x+z)} \quad (3).$$

Ta có: (3) $\Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 + x^2 + xz + z^2$

$$+2\sqrt{(x^2 + xy + y^2)(x^2 + xz + z^2)}$$

$$\geq (x+y)^2 + (x+z)^2 + (x+y)(x+z)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x^2 + xy + y^2)(x^2 + xz + z^2)} \geq x^2 + 2(y+z)x + yz$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 + xy + y^2)(x^2 + xz + z^2) \geq \left[x^2 + 2(y+z)x + yz\right]^2$$

$\Leftrightarrow 3(x - yz)^2 \geq 0$. BĐT cuối đúng suy ra đpcm.

Nhận xét. Rất tiếc là Tòa soạn không nhận được bài giải nào của các bạn cho bài này.

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31/5/2025.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 104. *Cho các số thực a, b, c, d, e thỏa mãn các điều kiện: $a + b + c + d + e = 8$ và $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của a.*

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: KẾT QUẢ NÀO

(Đề đăng trên TH&TT số 570, tháng 12 năm 2024)

Phân tích sai lầm. Tồn tại duy nhất góc α thỏa mãn $\cos\alpha=\frac{1}{3}$ và $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$. Do đó $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$ chỉ có duy nhất một giá trị. Bạn Hà kết luận rằng $\cos 2\alpha=\pm\frac{7}{9}$ là không đúng.

Vì $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ và

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0<\cos\alpha=\frac{1}{3}<\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

nên $-\frac{\pi}{2}<\alpha<-\frac{\pi}{4}$, dẫn tới $-\pi<2\alpha<-\frac{\pi}{2}$.

Vì thế $\cos 2\alpha<0$. Ta tính được $\cos 2\alpha=-\frac{7}{9}$.

Lời giải đúng 1. Vì $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ nên $\sin\alpha<0$.

Do đó: $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2 x}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Suy ra:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2.\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right).\frac{1}{3}=-\frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

Ta lại có:

$$\cos^2 2\alpha=1-\sin^2 2\alpha=1-\left(-\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)^2=\frac{49}{81}.$$

Vì $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ và

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0<\cos\alpha=\frac{1}{3}<\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

nên $-\frac{\pi}{2}<\alpha<-\frac{\pi}{4}$, dẫn tới $-\pi<2\alpha<-\frac{\pi}{2}$.

Vì thế $\cos 2\alpha<0$. Suy ra $\cos 2\alpha=-\frac{7}{9}$. Vậy

$$\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=-\frac{4\sqrt{2}}{9}.\frac{1}{2}+\frac{7}{9}.\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{4\sqrt{2}-7\sqrt{3}}{18}.$$

Lời giải đúng 2. Ta có:

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2.\left(\frac{1}{3}\right)^2-1=-\frac{7}{9}.$$

Vì $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ nên $\sin\alpha<0$.

Do đó: $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2 x}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Suy ra:

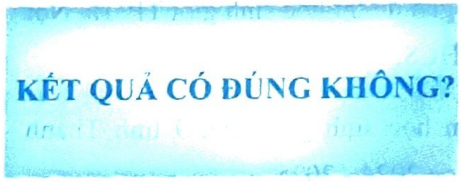
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2.\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right).\frac{1}{3}=-\frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

Vậy $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{3}$

$$=-\frac{4\sqrt{2}}{9}.\frac{1}{2}+\frac{7}{9}.\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{4\sqrt{2}-7\sqrt{3}}{18}.$$

Nhận xét. Hoan nghênh bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, **Bình Định** đã phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng..

KIHIVI





Trong đề kiểm tra có bài toán: *Cho một đa giác đều có 18 đỉnh nội tiếp trong một đường tròn tâm O. Gọi X là tập hợp các tam giác có các đỉnh là đỉnh của đa giác trên. Tính xác suất để chọn được một tam giác từ tập X là tam giác cân nhưng không phải là tam giác đều.*

Bạn Hoàng đưa ra lời giải bài toán như sau:

Số tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của đa giác đều 18 cạnh là $n(\Omega)=C_{18}^3$.

(Xem tiếp trang 45)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 574 (4.2025)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142040, 024.35082701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
NGUYỄN TIẾN THANH
Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam
PHẠM VĨNH THÁI
Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD
LÊ HỒNG SƠN

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : ***TS.*** **TRẦN HỮU NAM**
Phó tổng biên tập : ***CN.*** **TRẦN THỊ KIM CƯƠNG**
Thư kí Tòa soạn : ***ThS.*** **HỒ QUANG VINH**
TS. **LÊ HỒNG MAI**

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Nguyễn Văn Bản – Ứng dụng một bài toán hình học trong chứng minh bất đẳng thức.

8 Hướng dẫn giải đề thi học sinh giỏi TP. Hà Nội lớp 9 cấp THCS, năm học 2024 - 2025.

11 Đề thi chọn học sinh giỏi toán 9 tỉnh Thanh Hóa, năm học 2024 - 2025.

12 **Thử sức trước kỳ thi THPTQG** – Đề số 4.

15 **Diễn đàn dạy học toán**
Nguyễn Thanh Giang, Quách Thị Tuyết Nhung – Từ bài toán tự luận xây dựng câu hỏi theo dạng thức 2 trong cấu trúc đề thi tốt nghiệp THPT từ năm 2025.

21 **Đề ra kỳ này** *Problems in This Issue*
T1/574, ..., T12/574, L1/574, L2/574.

24 **Giải bài kì trước**
Solutions to Previous Problems
T1/570, ..., T12/570, L1/570, L2/570.

33 **Bạn đọc tìm tòi**
Dương Văn Duy - Dãy số nghịch đảo.

36 **Phương pháp giải toán**
Trần Xuân Đáng - Tìm giới hạn của dãy số (*kỳ 2*).

43 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 115 – Bài dịch số 113.

44 **Nhiều cách giải cho một bài toán** – Giải bài toán 94 – Đề bài toán 96.

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay** – Giải bài toán 102. Đề bài toán 104.

47 **Sai lầm ở đâu?**

Biên tập: KIM THANH, NHƯ HOÀNG
Trị sự, phát hành: TRẦN THỊ MINH HIỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu BỘ SÁCH

BÀI TẬP NÂNG CAO VÀ MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ

(DÀNH CHO HS THCS – THEO CHƯƠNG TRÌNH GDPT 2018)

TÁC GIẢ: BÙI VĂN TUYÊN



Bộ sách "Bài tập nâng cao và một số chuyên đề" môn Toán cấp THCS được biên soạn theo hướng phát triển năng lực, giúp củng cố và nâng cao kiến thức, bồi dưỡng học sinh khá giỏi hơn về môn Toán.

Cuốn sách có ba phần: Số học, Hình học và Thống kê – Xác suất. Mỗi phần có các chương, mỗi chương gồm nhiều bài. Mỗi bài bao gồm các mục:

- *BỔ SUNG: Phần này giới thiệu thêm những kiến thức liên quan đến chủ đề của bài học mà sách giáo khoa chưa đề cập.*
- *Ví dụ: Mỗi bài có một, hai ví dụ minh họa các vận dụng kiến thức cơ bản để giải toán và cách trình bày bài giải. Cuối mỗi ví dụ thường có nhận xét, lưu ý hoặc bình luận về phương pháp giải.*
- *Bài tập: Phần này có các bài tập được phân loại từ cơ bản đến nâng cao.*

Ngoài ra còn có các chuyên đề, được sắp xếp xen kẽ trong các chương, tương ứng với kiến thức đang học.

Cuối sách là phần hướng dẫn giải, chỉ dẫn hoặc đáp số. Các bạn có thể kiểm tra lời giải của mình, đối chiếu với lời giải trong sách để rút ra những kinh nghiệm giải toán.

Cuốn sách còn là tài liệu tham khảo cho các thầy giáo cô giáo chọn bài cho tiết luyện tập, bồi dưỡng học sinh. Các bậc phụ huynh cũng có thể dùng cuốn sách này để hướng dẫn con em học tập.

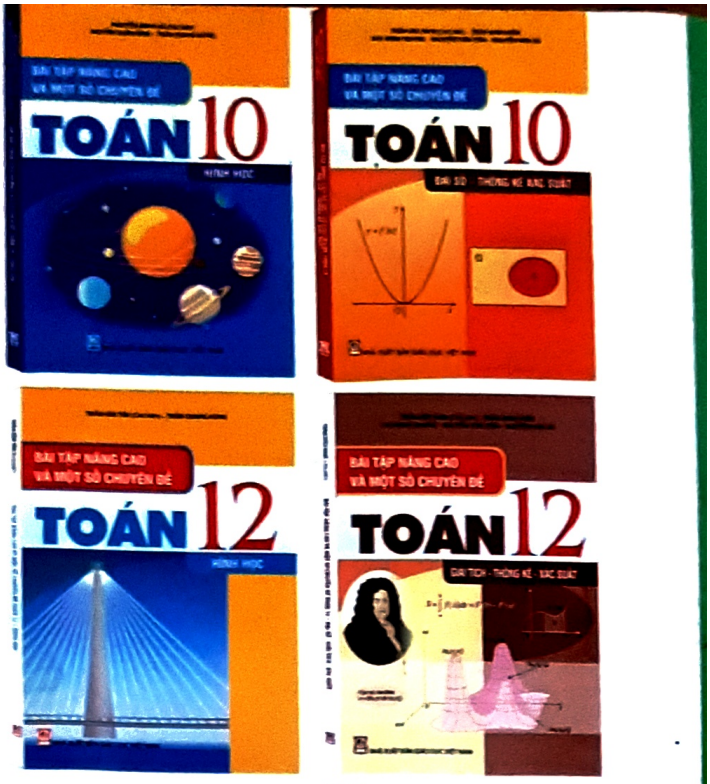
BẠN ĐỌC TÌM MUA SÁCH TẠI

CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

Địa chỉ: Tầng 4, Toà Diamond Flower, số 48 Lê Văn Lương, Q. Thanh Xuân, TP. Hà Nội
Điện thoại: 024.35121533 (số máy lẻ 118) - 0904893398 | **Fax:** 024.35123278
Email: kinhdoanh.heps@gmail.com | **Website:** http://xbgdhn.vn/

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Giới thiệu bộ sách



BÀI TẬP NÂNG CAO VÀ MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ TOÁN

(DÀNH CHO HỌC SINH THPT – THEO CHƯƠNG TRÌNH GDPT 2018)

TÁC GIẢ: TRẦN VĂN TẤN, NGUYỄN MINH HÀ, TRẦN QUANG HÙNG, TRẦN HỮU NAM,...

Bộ sách "Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Toán" gồm các cuốn:

– Bài tập nâng cao và một số chuyên đề - Đại số, Giải tích, Xác suất, Thống kê.

– Bài tập nâng cao và một số chuyên đề - Hình học

Mỗi cuốn sách gồm hai phần:

Phần một gồm các chương, bài bám sát Chương trình giáo dục phổ thông 2018, mỗi bài gồm:

• Tóm tắt kiến thức: tóm tắt những kiến thức trọng tâm của bài, được vận dụng để giải các bài tập, các dạng toán trong bài. Tuỳ theo nội dung từng bài mà ở phần này có thể có thêm phần Kiến thức bổ sung nâng cao liên quan đến chủ đề của bài học.

• Ví dụ minh hoạ: phương pháp giải, các ví dụ giúp học sinh hiểu sâu, rộng hơn những kiến thức đã học, đồng thời có được những kĩ năng cần thiết cho việc giải toán.

• Bài tập đề nghị: bổ sung các bài tập đề nghị cho mỗi dạng toán. Các bài tập được phân loại từ cơ bản đến nâng cao.

Phần hai gồm các Chuyên đề (dành cho học sinh khá, giỏi): các dạng toán thường xuất hiện trong các kì thi vào Đại học&Cao đẳng, trong các kì thi học sinh giỏi và Olympic. Các chuyên đề sẽ giúp học sinh phát triển kiến thức đã học, cung cấp cho học sinh cơ sở của những phương pháp giải toán thường sử dụng.

Sách được biên soạn theo Chương trình Giáo dục phổ thông 2018 để học sinh có thể củng cố kiến thức của mình ngay sau mỗi giờ học trên lớp, đồng thời bổ sung và khắc sâu thêm một số vấn đề lí thuyết nhằm bồi dưỡng học sinh giỏi.

BẠN ĐỌC TÌM MUA SÁCH TẠI

HEPS CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI
Địa chỉ: Tầng 4, Toà Diamond Flower, số 48 Lê Văn Lương, Q. Thanh Xuân, TP. Hà Nội
Điện thoại: 024.35121533 (số máy lẻ 118) - 0904893398 | **Fax:** 024.35123278
Email: kinhdoanh.heps@gmail.com | **Website:** http://xbgdhn.vn/

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT4M25
n tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
n xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2025

Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng