TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

TẠP CHÍ Toán học & Văn học TRONG NHÀ TRƯỜNG

Số 582
Tháng 12 - 2025
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 62 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com



Nhà toán học cổ Hy Lạp **Pythagoras** chỉnh âm cây đàn Lyre



MỘT SỐ KỸ THUẬT SỬ DỤNG BIỆT THỨC DELTA ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ VÀ PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

VŨ DUY ĐĨNH
(GV THCS Phú Thái, xã Phú Thái, Hải Phòng)

1. Kỹ thuật sử dụng biệt thức Delta để giải phương trình vô tỉ

Một số phương trình vô tỉ hay nhưng rất khó. Nếu không có một phương pháp khoa học thì rất khó giải quyết được dạng toán này. Chính vì thế việc mày mò biến đổi nhằm đưa phương trình vô tỉ về dạng phương trình tích sẽ dễ dàng giải quyết hơn.

Bài toán 1. *Giải phương trình:*

$$3x^2 + 2\sqrt{x^2+3} = 4x + 3.$$

Phân tích. $3x^2 + 2\sqrt{x^2+3} = 4x+3 \quad (*)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3 + 2\sqrt{x^2+3} + 2x^2 - 4x - 6 = 0.$$

Xem đây là một phương trình bậc hai ẩn $\sqrt{x^2+3}$, khi đó ta có: $\Delta'_{\sqrt{x^2+3}} = 1^2 - 1.\left(2x^2 - 4x - 6\right)$

$$= 1 - 2x^2 + 4x + 6 = -2x^2 + 4x + 7.$$

Từ $\Delta'_{\sqrt{x^2+3}}$ ta không đưa được về bình phương của một biểu thức nên các biến đổi trên không giải quyết được bài toán.

Từ đó, ta phải biến đổi về một phương trình bậc hai khác như sau:

$$(*) \Leftrightarrow -3x^2 - 2\sqrt{x^2+3} + 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3 - 2\sqrt{x^2+3} - 4x^2 + 4x = 0.$$

Coi đây là một phương trình bậc hai ẩn $\sqrt{x^2+3}$, ta có: $\Delta'_{\sqrt{x^2+3}} = (-1)^2 - 1.\left(-4x^2 + 4x\right)$

$$= 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là:

$$\sqrt{x^2+3} = \frac{1+2x-1}{1} = 2x; \sqrt{x^2+3} = \frac{1-2x+1}{1} = 2-2x.$$

Do đó biến đổi phương trình thành:

$$\left(\sqrt{x^2+3} - 2x\right)\left(\sqrt{x^2+3} + 2x - 2\right) = 0.$$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq \frac{-3}{4}$.

$$(*) \Leftrightarrow -3x^2 - 2\sqrt{x^2+3} + 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3 - 2x\sqrt{x^2+3} + 2x\sqrt{x^2+3} - 4x^2 - 2\sqrt{x^2+3} + 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{x^2+3} - 2x\right) + 2x\left(\sqrt{x^2+3} - 2x\right) - 2\left(\sqrt{x^2+3} - 2x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+3} - 2x\right)\left(\sqrt{x^2+3} + 2x - 2\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} - 2x = 0 \text{ hoặc } \sqrt{x^2+3} + 2x - 2 = 0.$$

TH1: $\sqrt{x^2+3} - 2x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} = 2x$ (1).

ĐKXĐ: $x \geq 0$. Khi đó:

(1) $\Leftrightarrow x^2 + 3 = 4x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x = 1$ (thoả mãn) hoặc $x = -1$ (loại).

TH2: $\sqrt{x^2+3} + 2x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} = 2 - 2x$ (2).

ĐKXĐ: $x \leq 1$. Khi đó:

(2) $\Leftrightarrow x^2 + 3 = 4 - 8x + 4x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 1 = 0$.

Có $\Delta' = (-4)^2 - 3.1 = 13 > 0$.

Phương trình (2) có nghiệm $x = \frac{4+\sqrt{13}}{3}$ (loại) và $x = \frac{4-\sqrt{13}}{3}$ (thoả mãn).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=1$ và $x=\dfrac{4-\sqrt{13}}{3}$.

Chú ý. Phương trình này còn có thể biến đổi về tích đơn giản như sau:

$$\text{PT}(*)\Leftrightarrow 4x^2-4x+1-x^2-3+2\sqrt{x^2+3}-1=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2-\left(\sqrt{x^2+3}-1\right)^2=0.$$

Từ đây ta dễ dàng đưa về tích, nhưng không phải bài nào cũng dễ dàng và thuận lợi như vậy.

Bài toán 2. *Giải phương trình*:

$$7x^2+2x\sqrt{x^2+x+2}-13x+2=0.$$

Phân tích. $7x^2+2x\sqrt{x^2+x+2}-13x+2=0$ (*)

$$\Leftrightarrow x^2+x+2+2x\sqrt{x^2+x+2}+6x^2-14x=0.$$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn $\sqrt{x^2+x+2}$, ta có: $\Delta_{\sqrt{x^2+x+2}}=(-2x)^2-4.1.\left(6x^2-14x\right)$

$$=4x^2-24x^2+56x=-20x^2+56x.$$

Không đưa được biệt thức Delta về bình phương của một biểu thức nên ta phải biến đổi về phương trình bậc hai dạng khác như sau:

$$(*)\Leftrightarrow -7x^2-2x\sqrt{x^2+x+2}+13x-2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+x+2-2x\sqrt{x^2+x+2}-8x^2+12x-4=0.$$

Có: $\Delta_{\sqrt{x^2+x+2}}=(2x)^2-4.1.\left(-8x^2+12x-4\right)$

$$=4x^2+32x^2-48x+16=(6x-4)^2.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là:

$$\sqrt{x^2+x+2}=\frac{2x+6x-4}{2}=4x-2$$

và $\sqrt{x^2+x+2}=\dfrac{2x-6x+4}{2}=-2x+2.$

Do đó phương trình trở thành:

$$\left(\sqrt{x^2+x+2}-4x+2\right)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2x-2\right)=0.$$

Từ đây chúng ta có hướng để tách đưa phương trình về dạng tích và có lời giải như sau:

Lời giải. Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$.

$$\text{PT}(*)\Leftrightarrow -7x^2-2x\sqrt{x^2+x+2}+13x-2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+x+2+2x\sqrt{x^2+x+2}-2\sqrt{x^2+x+2}$$

$$-4x\sqrt{x^2+x+2}-8x^2+8x+2\sqrt{x^2+x+2}+4x-4=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+2}\left(\sqrt{x^2+x+2}+2x-2\right)$$

$$-4x\left(\sqrt{x^2+x+2}+2x-2\right)+2\left(\sqrt{x^2+x+2}+2x-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+x+2}+2x-2\right)\left(\sqrt{x^2+x+2}-4x+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+2}+2x-2=0 \quad (1)$$

hoặc $\sqrt{x^2+x+2}-4x+2=0$ (2).

TH1: $\sqrt{x^2+x+2}+2x-2=0$. ĐKXĐ: $x\le 1$.

Khi đó: $(1)\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+2}=2-2x$

$$\Leftrightarrow x^2+x+2=4-8x+4x^2\Leftrightarrow 3x^2-9x+2=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{9+\sqrt{57}}{6}\ \text{(loại)}$$

hoặc $x=\dfrac{9-\sqrt{57}}{6}$ (thoả mãn).

TH2: $\sqrt{x^2+x+2}-4x+2=0$. ĐKXĐ: $x\ge\dfrac{1}{2}$.

Khi đó: (2) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+2}=4x-2$

$$\Leftrightarrow x^2+x+2=16x^2-16x+4$$

$$\Leftrightarrow 15x^2-17x+2=0\Leftrightarrow (x-1)(15x-2)=0$$

$\Leftrightarrow x=1$ (thoả mãn) hoặc $x=\dfrac{2}{15}$ (loại).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm:

$$x=1 \text{ và } x=\frac{9-\sqrt{57}}{6}.$$

Bài toán 3 (Đề chọn HSG TP. Hải Dương năm học 2022-2023). Giải phương trình:

$$2x^2+6x+5=(2x+5)\left(\sqrt{x^2+3x+4}-1\right).$$

Phân tích.

$$2x^2+6x+5=(2x+5)\left(\sqrt{x^2+3x+4}-1\right) \quad (*)$$

$\Leftrightarrow x^2+3x+4-(2x+5)\sqrt{x^2+3x+4}+x^2+5x+6=0.$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn $\sqrt{x^2+3x+4}$, ta có:

$$\Delta_{\sqrt{x^2+3x+4}}=[-(2x+5)]^2-4.1.(x^2+5x+6)$$
$$=4x^2+20x+25-4x^2-20x-24$$
$$=1^2.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là:

$$\sqrt{x^2+3x+4}=\frac{2x+5+1}{2}=x+3;$$

$$\sqrt{x^2+3x+4}=\frac{2x+5-1}{2}=x+2.$$

Do đó phương trình được biến đổi thành:

$$\left(\sqrt{x^2+3x+4}-x-3\right)\left(\sqrt{x^2+3x+4}-x-2\right)=0.$$

Lời giải. (*) $\Leftrightarrow x^2+3x+4-(x+3)\sqrt{x^2+3x+4}$

$$-(x+2)\sqrt{x^2+3x+4}+(x+2)(x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x+4}\left(\sqrt{x^2+3x+4}-x-3\right)$$

$$-(x+2)\left(\sqrt{x^2+3x+4}-x-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+3x+4}-x-3\right)\left(\sqrt{x^2+3x+4}-x-2\right)=0$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x+4}-x-3=0$ (1)

hoặc $\sqrt{x^2+3x+4}-x-2=0$ (2).

TH1: $\sqrt{x^2+3x+4}-x-3=0$. ĐKXĐ: $x\ge -3$.

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x+4}=x+3$

$\Leftrightarrow x^2+3x+4=x^2+6x+9 \Leftrightarrow 3x=-5$

$\Leftrightarrow x=\frac{-5}{3}$ (thoả mãn).

TH2: $\sqrt{x^2+3x+4}-x-2=0$. ĐKXĐ: $x\ge -2$.

Khi đó: (2) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x+4}=x+2$

$\Leftrightarrow x^2+3x+4=x^2+4x+4 \Leftrightarrow x=0$ (thoả mãn).

Vậy phương trình (*) có nghiệm $x=\frac{-5}{3}$ và $x=0$.

Bài toán 4. *Giải phương trình:*

$$x^2+5x-1-(x-2)\sqrt{3x^2+2}=0.$$

Phân tích. Ta có:

$$x^2+5x-1-(x-2)\sqrt{3x^2+2}=0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+2-(x-2)\sqrt{3x^2+2}-2x^2+5x-3=0.$$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn $\sqrt{3x^2+2}$, ta có: $\Delta_{\sqrt{3x^2+2}}=[-(x-2)]^2-4.1.(-2x^2+5x-3)$

$$=x^2-4x+4+8x^2-20x+12$$
$$=9x^2-24x+16=(3x-4)^2.$$

Phương trình có nghiệm là:

$$\sqrt{3x^2+2}=\frac{x-2+3x-4}{2}=2x-3$$

và $\sqrt{3x^2+2}=\frac{x-2-3x+4}{2}=-x+1.$

Do đó phương trình đưa được về dạng:

$$\left(\sqrt{3x^2+2}-2x+3\right)\left(\sqrt{3x^2+2}+x-1\right)=0.$$

Lời giải.

(*) $\Leftrightarrow 3x^2+2-(x-2)\sqrt{3x^2+2}-2x^2+5x-3=0$

$\Leftrightarrow 3x^2+2+(x-1)\sqrt{3x^2+2}$

$$-(2x-3)\sqrt{3x^2+2}-(x-1)(2x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2+2}\left(\sqrt{3x^2+2}+x-1\right)$$

$$-(2x-3)\left(\sqrt{3x^2+2}+x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x^2+2}+x-1\right)\left(\sqrt{3x^2+2}-2x+3\right)=0$$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2+2}+x-1=0$ (1)

hoặc $\sqrt{3x^2+2}-2x+3=0$ (2).

TH1: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{3x^2+2}=-x+1$ (ĐKXĐ: $x\le 1$)

$\Leftrightarrow 3x^2+2=x^2-2x+1$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x+1=0.$

Phương trình này có $\Delta=-4<0$ nên vô nghiệm.

TH2: $(2) \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+2} = 2x-3$ (ĐKXĐ: $x \geq \frac{3}{2}$)

$\Leftrightarrow 3x^2+2 = 4x^2-12x+9$

$\Leftrightarrow x^2-12x+7=0 \Leftrightarrow x = \frac{6+\sqrt{29}}{1} = 6+\sqrt{29}$

(thoả mãn) hoặc $x = 6-\sqrt{29}$ (loại).

Vậy phương trình (*) có nghiệm $x = 6+\sqrt{29}$.

Bài toán 5. *Giải phương trình:*

$$9x^2+8x+2\sqrt{x^2+1}-2=0 \quad (*).$$

Phân tích. Đây là bài toán khó đòi hỏi kỹ thuật biến đổi khéo mới đạt được đích đến.

PT(*) $\Leftrightarrow -9x^2-8x-2\sqrt{x^2+1}+2=0$

$\Leftrightarrow 3(x^2+1)-2\sqrt{x^2+1}-12x^2-8x-1=0.$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn $\sqrt{x^2+1}$, có:

$\Delta'_{\sqrt{x^2+1}} = (-1)^2-3(-12x^2-8x-1)$

$= 36x^2+24x+4 = (6x+2)^2.$

Phương trình (*) có nghiệm là:

$\sqrt{x^2+1} = \frac{1+6x+2}{3} = 2x+1$

và $\sqrt{x^2+1} = \frac{1-6x-2}{3} = \frac{-6x-1}{3}$.

Do đó phương trình đưa được về dạng:

$$\left(\sqrt{x^2+1}-2x-1\right)\left(3\sqrt{x^2+1}+6x+1\right)=0.$$

Lời giải. $(*) \Leftrightarrow -9x^2-8x-2\sqrt{x^2+1}+2=0$

$\Leftrightarrow 3(x^2+1)-2\sqrt{x^2+1}-12x^2-8x-1=0$

$\Leftrightarrow 3(x^2+1)-6x\sqrt{x^2+1}-3\sqrt{x^2+1}$

$+6x\sqrt{x^2+1}-12x^2-6x+\sqrt{x^2+1}-2x-1=0$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}-2x-1\right)+6x\left(\sqrt{x^2+1}-2x-1\right)$

$+\left(\sqrt{x^2+1}-2x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1}-2x-1\right)\left(3\sqrt{x^2+1}+6x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-2x-1=0$ hoặc $3\sqrt{x^2+1}+6x+1=0.$

TH1: $\sqrt{x^2+1}-2x-1=0$. ĐKXĐ: $x \geq \frac{-1}{2}$.

Khi đó: $\sqrt{x^2+1}-2x-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 2x+1$

$\Leftrightarrow x^2+1 = 4x^2+4x+1 \Leftrightarrow 3x^2+4x=0$

$\Leftrightarrow x(3x+4)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ (thoả mãn) hoặc $x = \frac{-4}{3}$ (loại).

TH2: $3\sqrt{x^2+1}+6x+1=0$. ĐKXĐ: $x \leq \frac{-1}{6}$.

Khi đó: $3\sqrt{x^2+1}+6x+1=0$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+1} = -6x-1 \Leftrightarrow 9x^2+9 = 36x^2+12x+1$

$\Leftrightarrow 27x^2+12x-8=0.$

Có $\Delta' = 36+27.8 = 252$ nên $\sqrt{\Delta'} = \sqrt{252} = 6\sqrt{7}$.

Phương trình này có hai nghiệm:

$x = \frac{-6+6\sqrt{7}}{27} = \frac{-2+2\sqrt{7}}{9}$ (loại)

và $x = \frac{-6-6\sqrt{7}}{27} = \frac{-2-2\sqrt{7}}{9}$ (thoả mãn).

Phương trình đã cho có hai nghiệm:

$$x=0 \text{ và } x = \frac{-2-2\sqrt{7}}{9}.$$

Bài toán 6. *Giải phương trình:*

$$(x+3)\sqrt{48-x^2-8x} = x-24 \quad (*).$$

Phân tích. Phương trình không có nghiệm nguyên nên không thể chọn phương pháp liên hợp để giải. Nếu bình phương ta có phương trình bậc 4 với nghiệm vô tỉ thì phương pháp giải là rất khó khăn. Đặt ẩn phụ ngay cũng không có mối liên hệ để biểu diễn về phương trình một ẩn hoặc phương trình tích. Do các hạng tử bên ngoài căn là bậc nhất nên ta chọn phương án nhân thêm hai vế với 2 để các số hạng trong căn và ngoài căn tương đồng thuận lợi cho việc tách để đưa về dạng phương trình bậc 2 ẩn $\sqrt{48-x^2-8x}$. Ta có:

$(*) \Leftrightarrow 2(x+3)\sqrt{48-8x-x^2} = 2x-48$

$$\Leftrightarrow 48-2x+2(x+3)\sqrt{48-8x-x^2}=0$$

$$\Leftrightarrow -x^2-8x+48+2(x+3)\sqrt{48-8x-x^2}$$
$$+x^2+6x=0.$$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn $\sqrt{48-x^2-8x}$, ta có: $\Delta'_{\sqrt{48-x^2-8x}}=(x+3)^2-1.(x^2+6x)=9=3^2$.

Khi đó phương trình (*) có nghiệm:

$$\sqrt{48-x^2-8x}=\frac{-x-3+3}{1}=-x$$

và $\sqrt{48-x^2-8x}=\frac{-x-3-3}{1}=-x-6$.

Do đó phương trình sẽ viết được dưới dạng:

$$\left(\sqrt{48-x^2-8x}+x\right)\left(\sqrt{48-x^2-8x}+x+6\right)=0.$$

Lời giải. Điều kiện: $-12\le x\le 4$. Khi đó:

$$(*)\Leftrightarrow 2(x+3)\sqrt{48-8x-x^2}=2x-48$$

$$\Leftrightarrow 48-2x+2(x+3)\sqrt{48-8x-x^2}=0$$

$$\Leftrightarrow -x^2-8x+48+2(x+3)\sqrt{48-8x-x^2}$$
$$+x^2+6x=0.$$

Đặt $t=\sqrt{48-8x-x^2}$; $t\ge 0$. Khi đó phương trình trên trở thành:

$$t^2+2(x+3)t+x^2+6x=0$$

$$\Leftrightarrow (t+x)^2+6(t+x)=0$$

$$\Leftrightarrow (t+x)(t+x+6)=0.$$

• Nếu $t+x=0$, suy ra $t=-x$ (ĐK: $x\le 0$) ta được:

$$\sqrt{48-8x-x^2}=-x\Leftrightarrow 48-8x-x^2=x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x-24=0\Leftrightarrow (x+2)^2=28$$

$$\Leftrightarrow x+2=2\sqrt{7}\text{ hoặc }x+2=-2\sqrt{7}$$

$$\Leftrightarrow x=-2+2\sqrt{7}\text{ (loại)}$$

hoặc $x=-2-2\sqrt{7}$ (thoả mãn).

• Nếu $t+x+6=0$, suy ra $t=-x-6$ (ĐK: $x\le -6$), do đó ta được:

$$\sqrt{48-8x-x^2}=-x-6$$

$$\Leftrightarrow 48-8x-x^2=x^2+12x+36$$

$$\Leftrightarrow x^2+10x-6=0\Leftrightarrow (x+5)^2=31$$

$$\Leftrightarrow x+5=\sqrt{31}\text{ hoặc }x+5=-\sqrt{31}$$

$$\Leftrightarrow x=-5+\sqrt{31}\text{ (loại)}$$

hoặc $x=-5-\sqrt{31}$ (thoả mãn).

Vậy nghiệm phương trình (*) là:

$$x=-2-2\sqrt{7}\text{ và }x=-5-\sqrt{31}.$$

Bài toán 7. *Giải phương trình*:

$$x^4-2\sqrt{3}x^2+x+3-\sqrt{3}=0.$$

Phân tích. Ta viết lại phương trình thành:

$$3-(2x^2+1)\sqrt{3}+x+x^4=0\quad(1).$$

Ta có: $\Delta=\left[-(2x^2+1)\right]^2-4(x+x^4)$

$=4x^2-4x+1=(2x-1)^2$. Khi đó:

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{3}=\frac{1}{2}(2x^2+1+2x-1)=x^2+x\\ \sqrt{3}=\frac{1}{2}(2x^2+1-2x+1)=x^2-x+1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+x-\sqrt{3}=0\\ x^2-x+1-\sqrt{3}=0\end{array}\right.$$

Vậy phương đã cho có 4 nghiệm là:

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}$$

và $x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1. Giải phương trình:

$$8x^2+3x+\left(4x^2+x-2\right)\sqrt{x+4}=4.$$

Bài 2. Giải các phương trình:

1) $x^2+1-(x+1)\sqrt{x^2-2x+3}=0$;

2) $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$;

3) $(2x+7)\sqrt{2x+7}=x^2+9x+7$;

4) $10x^2-9x-8x\sqrt{2x^2-3x+1}+3=0$;

5) $x^3+6x^2-2x+3-(5x-1)\sqrt{x^3+3}=0$;

6) $4\sqrt{x+1}-1=3x+2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}$.

2. Kỹ thuật sử dụng biệt thức Delta để giải phương trình nghiệm nguyên

Bài toán 1. *Tìm các số nguyên x, y thoả mãn:*

$$x^2+3xy+2y^2-x-y+3=0.$$

Phân tích. Ta viết phương trình dưới dạng phương trình bậc hai ẩn x:

$$x^2+x(3y-1)+2y^2-y=-3.$$

Xét phương trình bậc 2 ẩn x và k là hằng số thoả mãn: $x^2+x(3y-1)+2y^2-y+k=0$.

Ta có:

$$\Delta_x=(3y-1)^2-4\left(2y^2-y+k\right)$$
$$=y^2-2y+1-4k.$$

Để Δ_x là một số chính phương ta chọn $k=0$, khi đó $\Delta_x=y^2-2y+1=(y-1)^2$.

Phương trình có nghiệm: $x=\dfrac{-3y+1+y-1}{2}=-y$

và $x=\dfrac{-3y+1-y+1}{2}=-2y+1$.

Do đó: $x^2+x(3y-1)+2y^2-y=(x+y)(x+2y-1)$.

Suy ra: $(x+y)(x+2y-1)=-3$.

Từ đây ta có: $x^2+3xy-x+2y^2-y=-3$

$$\Leftrightarrow x^2+xy+2xy+2y^2-x-y=-3$$
$$\Leftrightarrow x(x+y)+2y(x+y)-(x+y)=-3$$
$$\Leftrightarrow (x+y)(x+2y-1)=-3.$$

Đến đây việc giải bài toán không còn khó khăn nữa.

Với những bài đưa về tích hai nhân tử mà mỗi nhân tử có 3 số hạng là những bài toán khó, để mò mẫm thì rất khó khăn. Sau đây là một thí dụ.

Bài toán 2. *Tìm các số nguyên x, y thoả mãn:*

$$x^2+3xy+2y^2+3x+5y=15.$$

Phân tích. Viết phương trình dưới dạng phương trình bậc hai ẩn x, ta có:

$$x^2+x(3y+3)+2y^2+5y=15.$$

Xét phương trình:

$$x^2+x(3y+3)+2y^2+5y+k=0.$$

Ta có: $\Delta_x=(3y+3)^2-4\left(2y^2+5y+k\right)$

$$=9y^2+18y+9-8y^2-20y-4k$$
$$=y^2-2y+9-4k=(y-1)^2+8-4k.$$

Để Δ_x là một số chính phương ta chọn $k=2$, khi đó $\Delta_x=y^2-2y+1=(y-1)^2$.

Phương trình có nghiệm:

$$x=\frac{-3y-3+y-1}{2}=-y-2$$

và $x=\dfrac{-3y-3-y+1}{2}=-2y-1$.

Do đó: $x^2+x(3y+3)+2y^2+5y+2$

$$=(x+y+2)(x+2y+1).$$

Suy ra: $(x+y+2)(x+2y+1)=17$.

Đến đây việc giải quyết không còn khó khăn nữa.

Bài toán 3. *Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho* $\dfrac{p^2-p-2}{2}$ *là lập phương của một số tự nhiên.*

Phân tích. Từ giả thiết ta cần tìm số tự nhiên a thoả mãn $p(p-1)=2(a+1)\left(a^2-a+1\right)$.

• Nếu $p=2$ thì $a=0$ (thoả mãn).

• Nếu $p>2$ thì $a+1\vdots p$ hoặc $a^2-a+1\vdots p$.

TH1: $a+1\vdots p$, khi đó $p\le a+1$ mà dễ thấy $p>a$ suy ra $p=a+1$.

Do đó từ $p(p-1)=2(a+1)\left(a^2-a+1\right)$ suy ra:

$$a=2\left(a^2-a+1\right)\Leftrightarrow 2a^2-3a+2=0$$

(phương trình này vô nghiệm).

TH2: $a^2-a+1 \vdots p$.

Đặt $a^2-a+1=kp$ với $k\in\mathbb{N}^*$ (*).

Do đó từ $p(p-1)=2(a+1)(a^2-a+1)$ suy ra:

$$p-1=2k(a+1)\Rightarrow p=2k(a+1)+1 \quad (**).$$

Từ (*) và (**), ta có:

$$a^2-(2k^2+1)a+1-2k^2-k=0.$$

Có $\Delta=4k^4+12k^2+4k-3$, cần tìm k để Δ là số chính phương. Do $k\in\mathbb{N}^*$ nên:

$$(2k^2+2)^2<4k^4+12k^2+4k-3<(2k^2+4)^2$$

suy ra: $4k^4+12k^2+4k-3=(2k^2+3)^2$.

Từ đó ta tìm được $k=3$, suy ra $a=20$ (nhận) hoặc $a=-1$ (loại).

Với $a=20$ suy ra $p=127$.

Vậy tìm được hai số nguyên tố:

$$p=2;\ p=127.$$

Bài toán 4 (câu 4b, đề thi HSG Toán 9 cấp TP. Đà Nẵng, năm học 2024-2025). *Cho các số nguyên x, y, z thoả mãn:*

$$x^2-3y^2-z^2=xy+3xz-8yz.$$

Chứng minh rằng $5x+19y+15z \vdots 44$.

Phân tích. Ta coi phương trình đã cho là phương trình bậc hai theo một biến nào đó và xét Delta phải là số chính phương.

Coi phương trình đã cho là phương trình bậc hai theo biến x (y, z là tham số) và xét Δ phải là số chính phương. Ta có:

$$x^2-(y+3z)x-(3y^2+z^2-8yz)=0.$$

Có $\Delta_x=y^2+6yz+9z^2+12y^2+4z^2-32yz$

$=13y^2+13z^2-26yz$

$=13(y-z)^2$.

Vì x, y, z nguyên nên Δ_x phải là số chính phương, mà 13 không phải số chính phương nên

$$(y-z)^2=0,\ \text{suy ra}\ y=z.$$

Khi đó $\Delta_x=0$ và phương trình có nghiệm

$$x=\frac{y+3z}{2}=2z.$$

Lúc đó: $5x+19y+15z=5.2z+19z+15z$

$=(10+19+15)z$

$=44z \vdots 44$ (đpcm).

Nhận xét. Nếu coi phương trình đã cho là phương trình bậc hai theo biến z (với x, y là tham số) hoặc theo biến y (với x, z là tham số) và xét biệt thức Δ phải là số chính phương, ta cũng có cách giải tương tự như trên.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Tìm số nguyên x, y thoả mãn:

1) $y^2-xy+2y-5x-6=0$

Kết quả: $(y+5)(x-y+3)=9$.

2) $3y^2+xy+2x+y=17$

Kết quả: $(y+2)(x+3y-5)=7$.

3) $2x^2-xy+9x-3y+4=0$

Kết quả: $(x+3)(2x-y+3)=5$.

4) $x^2-xy-2y^2+x+y-5=0$

Kết quả: $(x+y)(x-2y+1)=5$.

5) $3x^2+y^2+4xy+2x=20$

Kết quả: $(x+y+1)(3x+y-1)=19$.

6) $2x^2+6y^2+7xy-x-y=6$

Kết quả: $(2x+3y+1)(x+2y-1)=5$.

7) $2x^2-y^2-xy+8y+x=22$

Kết quả: $(x-y+3)(2x+y-5)=7$.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT TP. HÀ NỘI
MÔN TOÁN (Chuyên Tin)

Năm học 2025-2026

Câu I. 1) *Gieo một xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Tính xác suất của biến cố A: "Tích của hai số chấm xuất hiện trên mặt xúc xắc trong hai lần gieo bằng 6".*

2) *Cho a,b là hai số thực phân biệt thoả mãn $a+b=6$ và $a+\frac{4}{a}=b+\frac{4}{b}$. Tính giá trị của biểu thức $M=\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{a^2+1}$.*

HD-Đáp số.

1) Không gian mẫu $\Omega=\{(i;j)\,|\,1\le i\le 6, 1\le j\le 6\}$ với i,j lần lượt là số chấm xuất hiện khi gieo xúc xắc lần thứ nhất và lần thứ hai.

Khi đó, các kết quả của không gian mẫu là đồng khả năng và $n(\Omega)=36$.

Có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố A là:

$$(2;3),(3;2),(1;6),(6;1).$$

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

2) Từ điều kiện $a+\frac{4}{a}=b+\frac{4}{b}\Rightarrow a-b+\frac{4}{a}-\frac{4}{b}=0$

$$\Rightarrow (a-b)\left(1-\frac{4}{ab}\right)=0.$$

Vì a, b phân biệt nên $1-\frac{4}{ab}=0\Rightarrow ab=4$.

Từ đó: $M=\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{a^2+1}=\frac{a^3+a+b^3+b}{a^2b^2+a^2+b^2+1}$

$$=\frac{(a+b)^3-3ab(a+b)+a+b}{a^2b^2+(a+b)^2-2ab+1}.$$

Suy ra $M=\frac{6^3-3.4.6+6}{4^2+6^2-2.4+1}=\frac{10}{3}$.

Câu II. 1) *Cho a,b và c là các số nguyên dương thoả mãn $\frac{1}{a}+\frac{3}{b+2}=\frac{5}{c+4}$.*

Chứng minh abc chia hết cho 4.

2) *Tìm tất cả cặp số tự nhiên $(x;y)$ thoả mãn $x(x-2y)=y^3-3y^2+2y-1$.*

HD-Đáp số.

1) Từ điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{3}{b+2}=\frac{5}{c+4}$

$$\Rightarrow (c+4)(b+2)+3a(c+4)=5a(b+2)\quad (*).$$

Nếu cả 3 số a,b,c đều là các số lẻ thì mâu thuẫn với (*).

Suy ra trong 3 số a,b,c có ít nhất một số chẵn.

Nếu a là số chẵn, suy ra $a(c+4)$ và $a(b+2)$ là các số chẵn.

Từ (*) suy ra $(c+4)(b+2)$ hay $bc+4b+2c$ là số chẵn, từ đó bc là số chẵn.

Do đó tích abc chia hết cho 4.

Chứng minh tương tự với trường hợp b hoặc c là số chẵn.

Vậy abc chia hết cho 4.

2) Từ $x(x-2y)=y^3-3y^2+2y-1$

$$\Rightarrow (x-y)^2=y^3-2y^2+2y-1$$

$$\Rightarrow (x-y)^2=(y-1)(y^2-y+1).$$

Nếu $y=0\Rightarrow x^2=-1$ (vô lí).

Nếu $y=1\Rightarrow (x-1)^2=0\Rightarrow x=1$.

Nếu $y\ge 2$ thì $y-1$ và y^2-y+1 là hai số nguyên dương.

Vì $y^2-y+1=y(y-1)+1$ nên:

$y-1$ và y^2-y+1 là hai số nguyên tố cùng nhau.

Do đó $y-1$ và y^2-y+1 là hai số chính phương.

Mà $(y-1)^2<y^2-y+1<y^2$ nên y^2-y+1 không thể là số chính phương (mâu thuẫn).

Suy ra với mọi giá trị $y\ge 2, y\in\mathbb{N}$ thì $(y-1)(y^2-y+1)$ không là số chính phương.

Do đó, trong trường hợp này không có cặp $(x;y)$ nào thoả mãn $(x-y)^2=(y-1)(y^2-y+1)$.

Vậy cặp số thoả mãn điều kiện bài toán là $(x;y)=(1;1)$.

Câu III. 1) *Với a,b và c là các số nguyên dương thoả mãn $a+b+c=12$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P=\left(a-\frac{4}{a}\right)^2+\left(b-\frac{4}{b}\right)^2+\left(c-\frac{4}{c}\right)^2.$$

2) *Cho a,b và c là các số nguyên dương thoả mãn $(a+2b)(2a+c)=(a^2-bc)^2$.*

Chứng minh $4ab+1$ là số chính phương.

HD-Đáp số. 1) Ta có:

$$P=(a^2+b^2+c^2)+16\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b^2}\right)-24$$

$$=\left(\frac{a^2}{16}+\frac{16}{a^2}\right)+\left(\frac{b^2}{16}+\frac{16}{b^2}\right)+\left(\frac{c^2}{16}+\frac{16}{c^2}\right)$$

$$+\frac{15}{16}(a^2+b^2+c^2)-24 \quad (1).$$

Chứng minh được:

$$\frac{a^2}{16}+\frac{16}{a^2}\ge 2;\ \frac{b^2}{16}+\frac{16}{b^2}\ge 2;\ \frac{c^2}{16}+\frac{16}{c^2}\ge 2 \quad (2).$$

Chứng minh được:

$$a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{1}{3}\cdot 12^2=48 \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) ta có: $P\ge 6+\frac{15}{16}\cdot 48-24=27$.

Với $a=b=c=4$ thì $P=27$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 27.

Vì a,b,c là các số nguyên dương và $a+b+c=12$ nên $1\le a\le 10$.

Từ đó $(a-1)(a-10)\le 0\Rightarrow a^2-11a+10\le 0$

$$\Rightarrow\frac{1}{a^2}\le\frac{11}{10a}-\frac{1}{10}\le\frac{111}{100}-\frac{11a}{100}.$$

Tương tự ta có:

$$\frac{1}{b^2}\le\frac{111}{100}-\frac{11b}{100}\text{ và }\frac{1}{c^2}\le\frac{111}{100}-\frac{11c}{100}.$$

Dẫn đến:

$$P=(a^2+b^2+c^2)+\left(\frac{16}{a^2}+\frac{16}{b^2}+\frac{16}{c^2}\right)-24$$

$$\le\left[11(a+b+c)-30\right]+16\left[\frac{333}{100}-\frac{11}{100}(a+b+c)\right]$$

$$-24=\frac{2754}{25}.$$

Với $a=1,b=1,c=10$ thì $P=\frac{2754}{25}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{2754}{25}$.

2) Từ điều kiện $(a+2b)(2a+c)=(a^2-bc)^2$

$$\Rightarrow(a^2+2ab)(2ab+bc)=ab(a^2-bc)^2.$$

Từ đó: $(a^2+2ab)(2ab+bc)$

$$=ab\left[(a^2+2ab)-(2ab+bc)\right]^2.$$

Đặt $x=a^2+2ab,\ y=2ab+bc\Rightarrow x,\ y$ là hai số nguyên dương khác nhau và

$$xy=ab(x-y)^2\Rightarrow ab=\frac{xy}{(x-y)^2}.$$

Do đó $4ab+1=\frac{4xy}{(x-y)^2}+1=\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2$.

Suy luận được $\frac{x+y}{x-y}$ là số nguyên. Từ đó suy ra $4ab+1$ là số chính phương.

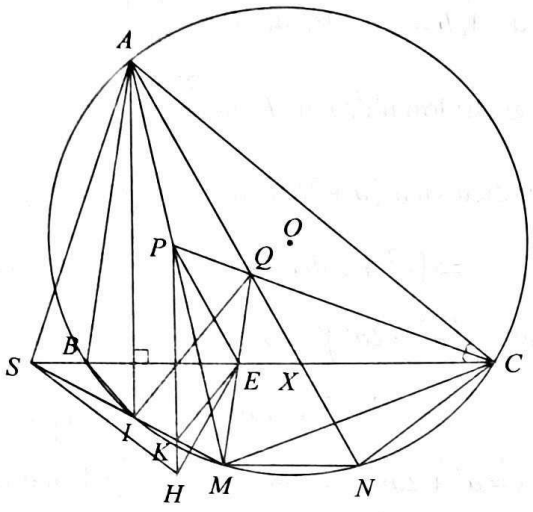
Câu IV. *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB<AC)$, nội tiếp đường tròn (O). Đường thẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC, cắt đường tròn (O) tại điểm I (I khác A). Lấy điểm M thuộc cung nhỏ IC của đường tròn (O) sao cho $MB<MC$. Kẻ dây cung MN của đường tròn (O) sao cho đường thẳng MN song song với đường thẳng BC. Tia phân giác của góc ACB cắt hai đường thẳng AM và AN lần lượt tại hai điểm P và Q.*

1) *Chứng minh $CM.CQ=CP.NQ$.*

2) *Gọi E là giao điểm của đường thẳng MQ với đường thẳng BC. Chứng minh đường thẳng PE song song với đường thẳng AN.*

3) *Gọi H là điểm đối xứng với điểm P qua đường thẳng BC. Gọi S là giao điểm của đường thẳng MI với đường thẳng BC. Chứng minh đường thẳng SH vuông góc với đường thẳng IQ.*

HD-Đáp số.



1) Chứng minh được $\widehat{PAC} = \widehat{BCN}$ và $\widehat{CPM} = \widehat{QCN}$. Dẫn đến $\Delta PMC \backsim \Delta CNQ$ (g.g).

Kéo theo $CM.CQ = PC.QN$.

2) Gọi X là giao điểm của AN và BC.

Từ $\Delta PMC \backsim \Delta CNQ$ suy ra: $\dfrac{MP}{NC} = \dfrac{MC}{NQ}$.

Chứng minh $\Delta CNX \backsim \Delta AMC$ suy ra:

$$\frac{CN}{AM} = \frac{NX}{MC}.$$

Vì $EX // MN$ suy ra:

$$\frac{NX}{NQ} = \frac{ME}{MQ}.$$

Suy ra:

$$\frac{MP}{MA} = \frac{MP}{CN}.\frac{CN}{MA} = \frac{MC}{NQ}.\frac{NX}{MC} = \frac{NX}{NQ} = \frac{ME}{MQ}.$$

Dẫn đến $PE // AN$.

3) Gọi K là giao điểm của PH và MS. Ta có:

$PK // AI$ và $PE // AN$ nên $\widehat{HPE} = \widehat{IAN}$ (1).

Ta có: $\widehat{MSE} = \widehat{IBC} - \widehat{BIS} = \widehat{IBC} - \widehat{BCM}$.

Mà $MN // BC$ nên $\widehat{BCM} = \widehat{NMC}$.

Do đó, chứng minh được $\widehat{MSE} = \widehat{IAN}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\widehat{MSE} = \widehat{HPE} = \widehat{EHP} = 90° - \widehat{HES}.$$

Dẫn đến $EH \perp MS$, kéo theo H là trực tâm của tam giác SKE, dẫn đến $SH \perp KE$ (3).

Ta có $PK // AI$ và $PE // AQ$ nên:

$$\frac{MK}{MI} = \frac{MP}{MA} = \frac{ME}{MQ}.$$

Từ đó $KE // IQ$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $SH \perp IQ$.

Câu V. *Xét bảng ô vuông kích thước $n \times n$, với n là số nguyên dương. Biết rằng bảng ô vuông đó có thể được phủ kín bởi hai loại mảnh ghép 1×1 và 8×8 sao cho không có hai mảnh ghép nào chồng lên nhau, số lượng hai loại mảnh ghép được dùng là bằng nhau và mỗi ô vuông nhỏ của các mảnh ghép chồng khít với một ô vuông nhỏ trong bảng.*

1) *Chứng minh n chia hết cho 5.*

2) *Tìm giá trị nhỏ nhất của n.*

HD-Đáp số. 1) Gọi m là số mảnh ghép mỗi loại 1×1 và 8×8 được dùng để phủ kín bảng ô vuông $n\times n$. Số ô vuông trong bảng $n\times n$ là n^2.

Từ đó $n^2 = 65m \Rightarrow n \vdots 5$.

2) Gọi m là số mảnh ghép 1×1 và 8×8 được dùng để phủ kín bảng ô vuông đó.

Từ đó $n^2 = 65m$. Suy ra n chia hết cho 65 hay $n = 65k$. Từ đó $m = 65k^2$.

Nếu $k < 8$ thì n chia cho 8 được $8k$ dư k.

Từ đó số mảnh ghép 8×8 sử dụng tối đa trong bảng này là $(8k)^2 = 64k^2 < m$ (vô lí).

Nếu $k = 8 \Rightarrow n = 520$, $m = 4160$.

Do $520 : 8 = 65$ nên ta có thể sử dụng:

$$65.64 = 4160$$

mảnh ghép 8×8 và mảnh ghép 1×1 để phủ kín bảng vuông này (TMĐK).

Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 520.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG
(GV THCS Giảng Võ 2, Hà Nội)

Giới thiệu

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN TỈNH NGHỆ AN

Năm học 2025 - 2026

Thời gian làm bài: 150 *phút*

Câu I (*2,0 điểm*)

a) Biết rằng $(1^2+1)(2^2+1)(3^2+1)...(n^2+1)$ chia hết cho 1297^2, với n là số nguyên dương. Chứng minh $n \geq 649$.

b) Tìm các số nguyên dương a, b thoả mãn các điều kiện sau: $a-b$ là số nguyên tố, a,b là số chính phương và $a+b-3$ chia hết cho 5.

Câu II (*7,0 điểm*)

a) Giải phương trình $x^2+\dfrac{4x^2}{(x-2)^2}=5$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-9y=18x-5y^3 \\ x^2+4=5(y^2-1) \end{cases}$.

Câu III (*2,0 điểm*)

Kết thúc năm học, thầy giáo chọn ngẫu nhiên bốn trong năm bạn lớp 9A gồm: An, Bình, Cường, Dũng, Thảo để dự hội nghị tuyên dương.

a) Tính xác suất để trong bốn bạn được chọn có bạn An.

b) Ban tổ chức chuẩn bị bốn phần quà khác khau dành riêng cho mỗi bạn lớp 9A tham dự. Tại hội nghị, do quên ghi tên nên ban tổ chức đã phát ngẫu nhiên quà cho bốn bạn, mỗi bạn nhận một phần quà. Tính xác suất của biến cố "có ít nhất một bạn nhận đúng phần quà của mình".

Câu IV (*7,0 điểm*)

Cho tam giác ΔABC nhọn ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. Các đường cao AD, BE, CF của ΔABC cắt nhau tại H. Đường kính AK của đường tròn (O) cắt EF tại N.

a) Chứng minh tứ giác $BKNF$ nội tiếp và $\widehat{AKD}=\widehat{AHN}$.

b) Đường thẳng qua C song song với AB cắt đường thẳng BE tại M. Gọi Q là giao điểm của BC và HK, đường thẳng EF cắt QM tại P. Chứng minh ΔBPC vuông.

c) Giả sử A, C và đường tròn (O) cố định, $AC < R\sqrt{3}$, điểm B di động trên cung lớn AC. Xác định vị trí điểm B để tổng chu vi của các tam giác ΔAEF, ΔBFD, ΔCED lớn nhất.

Câu V (*1,0 điểm*)

Cho hai số thực a và b thoả mãn các điều kiện sau:

i) $a < b \leq 420$.

ii) Với mọi số thực x, y, z thoả mãn:

$$a \leq x \leq b,\ a \leq y \leq b,\ a \leq z \leq b,$$

ta luôn có $(x+y+z-420)^2 \leq \dfrac{1}{105}xyz$.

Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $T=a-b$.

Câu VI (*1,0 điểm*)

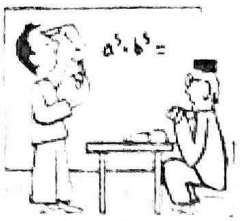
Trên bảng có dãy số 1; 2; 3;...; 2025 ta thực hiện như sau: Nếu trên bảng có 4 số a; b; c; d sao cho $d=a+b+c$ thì ta xóa 4 số đó và viết 3 số $a+b$; $b+c$; $c+a$ lên bảng. Giả sử tại một thời điểm trên bảng còn n số a_1; a_2;...; a_n.

Chứng minh rằng $a_1^4+a_2^4+a_3^4+\cdots+a_n^4-9$ chia hết cho 12 và $n \geq 1520$.

NGUYỄN TRẦN HOÀNG

(*SV Khoa Toán Tin, ĐHSP Hà Nội*)

Giới thiệu



THEO CHƯƠNG TRÌNH VÀ SGK MỚI

XÂY DỰNG PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN ĐẾM LỚP 10 TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

PHẠM THỊ NGA
(GV THPT Vĩnh Lộc, Vĩnh Lộc, Thanh Hoá)

Trong CTGDPT mới, Xác suất và Thống kê được Bộ GD&ĐT đưa vào giảng dạy từ cấp THCS, được giảng dạy khá hoàn thiện ở bậc THPT. Với mục tiêu cung cấp kiến thức, hình thành và phát triển năng lực mô hình hoá toán học, vận dụng kiến thức toán học vào giải quyết và dự đoán các tình huống thực tế đời sống, gắn học với hành, gắn kiến thức được học trong trường với thực tế cuộc sống lao động sản xuất của xã hội, mạch kiến thức này đã đem lại nhiều hứng thú cho học sinh, đồng thời cũng đem lại cho các em nhiều khó khăn thách thức. Trong quá trình giảng dạy, tổ chức cho học sinh chiếm lĩnh kiến thức kĩ năng, tôi mạnh dạn xây dựng phương pháp giải bài toán đếm cho học sinh lớp 10 như một tài liệu hỗ trợ học sinh tự học, tự nghiên cứu tìm cách giải quyết vấn đề theo tinh thần của Thông tư 29/2024/TT-BGDĐT.

1. Cơ sở lí luận của các phương pháp đếm

1.1. Quy tắc đếm

a) Quy tắc cộng

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện, hành động thứ hai có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m+n$ cách thực hiện.

Về mặt bản chất thì quy tắc cộng cho ta công thức tính số phần tử của hai tập hợp hữu hạn không giao nhau: $A\cap B=\varnothing\Rightarrow|A\cup B|=|A|+|B|$.

Quy tắc cộng mở rộng:

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|;$$

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|.$$

Đối với n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bất kì ta có nguyên lí bù trừ sau:

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n|=\sum_{1\le i\le n}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|+\ldots+(-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|.$$

b) Quy tắc nhân

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì có $m.n$ cách hoàn thành công việc.

Về mặt bản chất thì quy tắc nhân cho ta công thức tính số phần tử của tập tích Descartes của hai tập hợp A, B, kí hiệu $A\times B$.

Định nghĩa: Tích Descartes của hai tập hợp A, B kí hiệu $A\times B$ là tập hợp tất cả các cặp thứ tự (a,b) với $a\in A, b\in B$.

Nguyên lí nhân: Nếu A và B là hai tập hợp hữu hạn thì $A\times B$ cũng hữu hạn và ta có:

$$|A\times B|=|A|\times|B|.$$

1.2. Hoán vị

Cho tập A gồm n phần tử $(n\ge 1)$. Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó. Số các hoán vị của n phần tử, kí hiệu là:

$$P_n=n!=n.(n-1).(n-2)\ldots 3.2.1,$$

quy ước $0!=1$.

1.3. Chỉnh hợp

Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n\ge 1)$. Kết quả của việc lấy k $(1\le k\le n)$ phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho. Số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử là

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

1.4. Tổ hợp

Giả sử tập A có n phần tử $(n \geq 0)$. Mỗi tập con gồm k $(0 \leq k \leq n)$ phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho. Số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử là:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!.(n-k)!}, \forall k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n.$$

2. Các phương pháp đếm

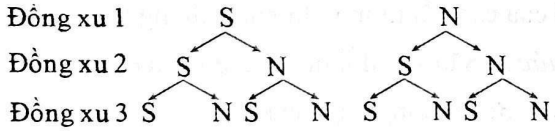
2.1. Phương pháp đếm trực tiếp

Nội dung phương pháp: Liệt kê các trường hợp cụ thể có thể xảy ra rồi dùng quy tắc cộng. Phương pháp này chỉ áp dụng cho các bài toán đơn giải và cho các tập hợp có số phần tử ít. Thông thường ta có thể dùng thêm các công cụ hỗ trợ để dễ dàng thống kê như: Bảng hai chiều, sơ đồ cây,...

Thí dụ 1. *Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra khi lần lượt gieo ba đồng xu cân đối đồng chất và phân biệt?*

Phân tích tìm hướng giải. Đồng xu có hai mặt nên ta có thể quy ước một mặt là sấp, mặt còn lại là ngửa. Do ba đồng xu độc lập nhau nên sự xuất hiện mặt sấp (S) hay ngửa (N) của đồng xu này là không liên quan đến sự xuất hiện của các đồng xu còn lại, do đó ta có hai cách đếm trực tiếp sau:

Cách 1. *Lập sơ đồ hình cây.*



Vậy ta có thể liệt kê đầy đủ các kết quả có thể xảy ra như sau:

$\Omega = \{SSS; SSN; SNS; SNN; NSS; NSN; NNS; NNN\}$.

Suy ra số các kết quả là 8.

Ưu điểm: Chỉ ra cụ thể, rõ ràng từng kết quả xảy ra.

Nhược điểm: Cách làm dài, chỉ có thể đếm khi số đồng xu đem gieo là nhỏ.

Cách 2. *Dùng quy tắc nhân.*

Đồng xu 1 có 2 cách xuất hiện là mặt sấp hoặc mặt ngửa; Đồng xu 2 có 2 cách xuất hiện là mặt sấp hoặc mặt ngửa; Đồng xu 3 có 2 cách xuất hiện là mặt sấp hoặc mặt ngửa.

Theo quy tắc nhân có: $2.2.2 = 8$ kết quả.

Ưu điểm: Ngắn gọn, có thể đếm khi số đồng xu đem gieo là rất lớn.

Nhược điểm: Không thể chỉ ra cụ thể, rõ ràng từng kết quả xảy ra.

Thí dụ 2. *Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra khi lần lượt gieo hai con xúc xắc cân đối đồng chất và phân biệt?*

Phân tích tìm hướng giải. Mỗi con xúc xắc có sáu mặt nên ta có thể gọi tên mỗi mặt theo số chấm có trên mặt đó. Ta có hai các đếm trực tiếp sau:

Cách 1. *Lập bảng hai chiều.*

Con 1 / Con 2	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

Có 36 kết quả.

Ưu điểm: Chỉ ra cụ thể, rõ ràng từng kết quả xảy ra.

Nhược điểm: Cách làm dài và chỉ đếm được khi số con xúc xắc là 2 con.

Cách 2. *Dùng quy tắc nhân.*

Con xúc xắc 1: Có 6 cách xuất hiện.

Con xúc xắc 2: Có 6 cách xuất hiện.

Theo quy tắc nhân có: $6.6 = 36$ kết quả.

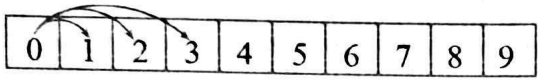
Ưu điểm: Ngắn gọn, có thể đếm khi số con xúc xắc đem gieo lớn.

Nhược điểm: Không thể chỉ ra cụ thể, rõ ràng từng kết quả xảy ra.

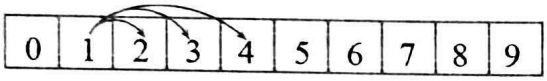
Thí dụ 3. *Cho tập hợp* $A = \{0; 1; 2; 3; ...; 9\}$, *hỏi có bao nhiêu tập con gồm ba phần tử của* A *có tổng bằng* 10?

Phân tích tìm hướng giải. Ta cần chọn ra 3 số khác nhau sao cho có tổng bằng 10. Để quá trình lựa chọn không bị lặp và không thiếu trường hợp nào ta nên làm theo kĩ thuật sau tạm gọi là "*lùa cừu vào chuồng*" cho học sinh dễ nhớ. Nguyên tắc của kĩ thuật là ta sẽ đếm từ những phần tử đầu tiên của dãy và lùa về phía sau để chọn được bộ số thoả mãn đề ra; tuyệt đối không quay ngược về phía trước nữa. Làm tương tự cho các phần tử liền kề phía sau cho đến hết.

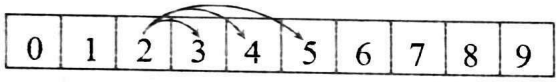
Lời giải.



Bắt đầu từ số 0 sẽ có các bộ: $(0;1;9)$, $(0;2;8)$, $(0;3;7)$, $(0;4;6)$.



Bắt đầu từ số 1 ta có các bộ: $(1;2;7)$, $(1;3;6)$, $(1;4;5)$.



Số 2 đứng đầu ta có bộ $(2;3;5)$.

Vì tổng của ba số bất kì kể từ số 3 trở đi đều lớn hơn 10 nên công việc kết thúc.

Như vậy có tổng 8 tập con thoả mãn đề ra.

Ưu điểm của phương pháp đếm trực tiếp là có thể chỉ ra hết tất cả các trường hợp có thể xảy ra một cách cụ thể, rõ ràng. Song nhược điểm là chỉ đếm được những tập hợp có kích thước nhỏ.

2.2. Phương pháp đếm theo vị trí

Nội dung phương pháp: Xét sự phù hợp của phần tử cần xếp với mỗi vị trí trong dãy để xem có bao nhiêu cách thiết lập rồi dùng quy tắc nhân. Có hai cách xét:

Cách 1: Chọn phần tử cho từng vị trí.

Cách 2: Chọn vị trí cho từng phần tử.

Thí dụ. *Biển số xe máy của tỉnh A (nếu không kể mã số tỉnh) có 6 kí tự, trong đó kí tự ở vị trí đầu tiên là một chữ cái (trong bảng 26 chữ cái tiếng Anh), kí tự ở vị trí thứ hai là một chữ số thuộc tập $\{1;2;...;9\}$, mỗi kí tự ở bốn vị trí tiếp theo là một chữ số thuộc tập $\{0;1;2;...;9\}$. Hỏi nếu chỉ dùng một mã số tỉnh thì tỉnh A có thể làm được nhiều nhất bao nhiêu biển số xe máy khác nhau?*

Phân tích tìm hướng giải. Sáu kí tự tương ứng với sáu vị trí. Mỗi vị trí trong sáu vị trí này đều đã có những yêu cầu cụ thể về các phần tử được phép xếp vào. Vì vậy ta nên chọn cách 1 là đếm số cách xếp phần tử cho mỗi vị trí để giải bài toán.

Lời giải. Giả sử biển số xe là $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$.

- Có 26 cách chọn a_1;
- Có 9 cách chọn a_2;
- Có 10 cách chọn a_3;
- Có 10 cách chọn a_4;
- Có 10 cách chọn a_5;
- Có 10 cách chọn a_6.

Vậy theo quy tắc nhân ta có:

$$26.9.10.10.10.10 = 2\,340\,000$$ biển số xe.

2.3. Phương pháp buộc phần tử

Nội dung phương pháp: Khi cần đếm một tập hợp mà có hai hoặc nhiều đối tượng luôn đứng cạnh nhau trong một phần tử của tập hợp thì ta có thể coi các đối tượng đó là một, cùng chiếm một vị trí trong số các vị trí cấu tạo nên phần tử, rồi sắp xếp các đối tượng theo yêu cầu đề ra.

Bước 1: Buộc các đối tượng thoả mãn yêu cầu bài toán thành một đối tượng kèm theo việc sắp xếp vị trí của các đối tượng khi buộc chúng vào với nhau.

Bước 2: Sắp xếp đối tượng theo yêu cầu đề ra.

Bước 3: Áp dụng quy tắc nhân.

Chú ý. Thường dùng cho những bài toán có sự sắp xếp, cạnh nhau, có mặt,...

Thí dụ. *Một tổ học sinh lớp 11A2 có 10 bạn, trong đó có bạn Hà Anh và Gia Lan, xếp thành một hàng dọc để tập thể dục giữa giờ. Hỏi tổ học sinh đó có bao nhiêu cách xếp hàng, sao cho hai bạn Hà Anh và Gia Lan luôn đứng cạnh nhau?*

Phân tích tìm hướng giải. Coi hai bạn Hà Anh và Gia Lan là một phần tử vì luôn đứng cạnh nhau nên có 2! cách xếp 2 bạn gần nhau. Lúc này, hai bạn chiếm một vị trí trong hàng. Khi đó ta cần sắp xếp cho 9 đối tượng thành một hàng dọc để được

cách xếp thoả mãn đề ra. Có 2 cách sắp xếp như sau:

Lời giải. Cách 1. Xếp 2 bạn Hà Anh, Gia Lan luôn đứng cạnh nhau có $2!$ cách.

Xếp cặp Hà Anh, Gia Lan cùng 8 bạn còn lại thành một hàng có $9!$ cách.

Theo quy tắc nhân có $2!.9!$ cách xếp thoả mãn đề ra.

Cách 2. Có $8!$ cách xếp 8 bạn (không có Hà Anh và Gia Lan) thành một hàng dọc. Khi đó 8 bạn đó tạo ra 9 khoảng trống, ta chọn 1 khoảng trống để xếp Hà Anh và Gia Lan vào nên có 9 cách. Có 2 cách để đổi chỗ hai bạn Hà Anh và Gia Lan.

Vậy ta có $8!.9.2 = 2.9!$ cách xếp thoả mãn yêu cầu bài toán.

2.4. Phương pháp chọn trước xếp sau

Nội dung phương pháp: Để đếm số phần tử của một số tập hợp ta có thể xem xét quá trình hình thành, thiết lập mỗi phần tử trong tập hợp bằng cách chọn ra đủ số lượng theo yêu cầu rồi xếp theo yêu cầu đề ra.

Bước 1: Chọn ra cho đủ số lượng và thoả mãn tính chất bài toán yêu cầu.

Bước 2: Sắp xếp.

Bước 3: Áp dụng quy tắc nhân.

Thí dụ. *Cho các chữ số* $\{1; 2; 3; 5; 6; 7; 8; 9\}$ *lập thành một số tự nhiên có dạng* $\overline{a_1a_2...a_5}$, *biết rằng mỗi chữ số được sử dụng tối đa 2 lần. Có bao nhiêu số lập được từ các chữ số trên thoả mãn đề bài?*

Phân tích tìm hướng giải. Do số có 5 chữ số và mỗi chữ số được dùng tối đa 2 lần nên xảy ra 3 trường hợp: Không có số nào lặp lại; có 1 số lặp lại 2 lần và có hai số lặp lại hai lần. Do đó ta phải chọn ra các số thoả mãn yêu cầu rồi sắp xếp chúng theo một trình tự. Từ đó có lời giải sau:

Lời giải.

TH1: Không có số nào lặp lại. Số các số thoả mãn là $A_8^5 = 6\,720$ số.

TH2: Có 1 số lặp lại hai lần.

Chọn 4 số trong 8 số không lặp C_8^4. Chọn 1 số trong 4 số này để lặp C_4^1.

Xếp 5 số vừa chọn được có: $\frac{5!}{2!}$ cách (vì có đổi chỗ hai số giống nhau).

Theo quy tắc nhân ta có: $C_8^4.C_4^1\frac{5!}{2!} = 16\,800$ (số).

TH3: Có 2 số lặp lại hai lần.

Chọn 3 số trong 8 số không lặp C_8^3. Chọn 2 số trong 3 số này để lặp C_3^2.

Xếp 5 số vừa chọn được: $\frac{5!}{2!2!}$. Theo quy tắc nhân ta có: $C_8^3.C_3^2.\frac{5!}{2!.2!} = 5\,040$ (số).

Vậy theo quy tắc cộng, số các số có 5 chữ số lập được thoả mãn đề bài là 28 560.

2.5. Phương pháp đếm loại trừ

Nội dung phương pháp: Khi cần đếm số phần tử của tập hợp mà có nhiều trường hợp xảy ra chúng ta nên sử dụng phương pháp đếm loại trừ gồm ba bước sau:

Bước 1: Đếm số phương án xảy ra bất kì ta có kết quả n_1.

Bước 2: Đếm số phương án xảy ra không thoả mãn bài toán được kết quả n_2.

Bước 3: Số phương án đúng là: $n = n_1 - n_2$.

Thí dụ. *Một đoàn đại biểu gồm 4 học sinh được chọn từ một tổ gồm 5 nam và 4 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho có ít nhất 1 nam và ít nhất 1 nữ.*

Phân tích tìm hướng giải. Nếu đếm trực tiếp ta sẽ có 4 trường hợp: trong đoàn đại biểu có đúng 1 nam ; đúng 2 nam; đúng 3 nam và đúng 4 nam. Còn đếm số phương án không thoả mãn: không có nam; không có nữ.

Lời giải. Chọn 4 bạn bất kì: $C_9^4 = 126$ (cách).

Chọn đoàn đại biểu gồm toàn nam hoặc toàn nữ có: $C_5^4 + C_4^4 = 5 + 1 = 6$ (cách).

Do đó số cách chọn đoàn đại biểu thoả mãn đề ra là: $126 - 6 = 120$ (cách).

Phân tích sai lầm học sinh thường gặp khi làm bài.

Khi làm bài toán đếm dạng này nói chung và bài này nói riêng, đa số học sinh thường xác định sai các phương án không thoả mãn đề bài. Khi đó, tôi sẽ hướng dẫn học sinh vận dụng kiến thức về mệnh đề phủ định mà các em đã được học ở lớp 10 để xử lí. Cụ thể, với bài toán này, khái niệm có ít nhất 1 tương ứng với khái niệm tồn tại $(\exists)$ và phủ định của mệnh đề chứa kí hiệu tồn tại là mệnh đề chứa kí hiệu với mọi $(\forall)$.

Phương pháp đếm này chứa đựng cơ hội rất tốt cho các em phát triển tư duy biện chứng và tư duy giải quyết vấn đề, cũng như rèn luyện các kĩ năng lập luận, trình bày.

2.6. Phương pháp tạo vách ngăn

Nội dung phương pháp: Khi cần đếm số phần tử của một tập hợp mà mỗi phần tử có yêu cầu các đối tượng cấu thành cụ thể nào đó không được phép xếp gần nhau ta chọn phương pháp tạo vách ngăn thông qua các bước sau:

Bước 1: Sắp xếp m đối tượng vào m vị trí tạo ra m vách ngăn, $m+1$ chỗ trống.

Bước 2: Sắp xếp các đối tượng khác theo yêu cầu bài toán vào $m+1$ chỗ trống.

Bước 3: Áp dụng quy tắc nhân.

Thí dụ. *Có bao nhiêu số tự nhiên có 10 chữ số đôi một khác nhau, trong đó các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 được xếp theo thứ tự tăng dần từ trái qua phải và chữ số 7 luôn đứng trước chữ số 6.*

Phân tích tìm hướng giải. Vì các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 được xếp cố định theo chiều tăng dần nên sắp xếp các chữ số này trước. Sau đó xếp chữ số 7 theo yêu cầu đề bài, rồi đến số 8, 9 và cuối cùng là số 0 vì số 0 không thể đứng đầu. Do đó ta có lời giải sau:

Lời giải.

Bước 1: Xếp 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 theo thứ tự tăng dần từ trái qua phải thì có 1 cách. Sáu chữ số này tạo thành 6 vách ngăn và 7 vị trí trống gồm 5 khoảng giữa các vách ngăn và 2 vị trí bên ngoài.

$$\downarrow_1 \downarrow 2 \downarrow 3 \downarrow 4 \downarrow 5 \downarrow 6 \downarrow$$

Bước 2: Vì chữ số 7 luôn đứng trước chữ số 6 nên không thể xếp số 7 vào vị trí bên ngoài phía sau. Do đó cách xếp số 7 là C_6^1 cách.

Bước 3: Sau khi xếp số 7 sẽ tạo được 7 vách ngăn và 8 vị trí trống nên số cách xếp chữ số 8 là C_8^1 cách.

Bước 4: Tương tự chữ số 9 có số cách xếp là C_9^1 cách.

Bước 5: Số cách xếp để chữ số 0 không thể đứng ở vị trí đầu tiên là C_9^1 cách.

Vậy tổng số các số thoả mãn đề là:

$$C_6^1.C_8^1.C_9^1.C_9^1 = 3\,888 \text{ (cách).}$$

***Phân tích sai lầm học sinh thường gặp*:** Học sinh thường mắc sai lầm ở bước 3, bước 4 và bước 5.

Ở bước 3 và bước 4, học sinh thường chọn luôn số cách xếp hai số 8, 9 là A_8^2, cách làm này sẽ dẫn đến hai số 8, 9 sẽ luôn không được đứng gần nhau trong dãy số, mà giả thiết không yêu cầu điều kiện này dẫn đến thiếu trường hợp hai số 8, 9 được đứng gần nhau, từ phân tích đó học sinh sẽ biết cách khắc phục như lời giải trên hoặc bổ sung thêm trường hợp thiếu vào lời giải.

Ở bước 5, học sinh hay xếp số 0 là C_{10}^1 cách hoặc làm bài toán bằng cách này mà xếp số 0 trước hoặc xếp đồng thời cùng các số 7, 8, 9. Làm như vậy, số 0 có thể đứng ở vị trí đầu tiên của dãy số. Khi hiểu được điều này học sinh sẽ tự biết cách khắc phục ở các tình huống khác nữa.

2.7. Phương pháp đặt biến

Nội dung phương pháp: Trong những bài toán đếm phức tạp, các đối tượng đếm có mối liên hệ chặt chẽ với nhau mà đề bài lại chưa cho các kết

quả cụ thể phục vụ trực tiếp quá trình đếm thì ta phải sử dụng phương pháp đặt biến (giải bài toán bằng cách lập phương trình và hệ phương trình) để tìm thêm các dữ kiện rồi mới thực hiện đếm.

Bước 1: Đặt biến và dựa vào giả thiết để lập các phương thình theo biến đã đặt. Nếu lập hệ thì đặt bao nhiêu biến phải lập được bấy nhiêu phương trình.

Bước 2: Giải các phương trình, hệ phương trình hoặc phương trình nghiệm nguyên vừa lập được để tìm ra nghiệm.

Bước 3: Áp dụng các phương pháp đếm để giải quyết bài toán.

Thí dụ. *Một giáo viên chuẩn bị 7 cuốn sách Toán, 9 cuốn sách Lí và 8 cuốn sách Hóa để làm phần thưởng cho 12 học sinh trong đó có hai bạn Hoa và Lan. Các cuốn sách cùng môn là như nhau. Mỗi học sinh nhận được 2 cuốn sách khác môn. Hỏi giáo viên có bao nhiêu cách chia phần thưởng cho 12 học sinh?*

Phân tích tìm hướng giải. Trước hết xét xem 24 cuốn sách đề cho được phân thành bao nhiêu cặp (Toán; Lí), (Toán; Hóa), (Lí; Hóa) rồi chọn số học sinh tương ứng để trao các cặp sách nói trên.

Lời giải. Gọi x, y, z lần lượt là số học sinh nhận được các phần thưởng gồm sách Toán và Lí, Toán và Hóa, Lí và Hóa, $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Theo giả thiết, ta có hệ:

$$\begin{cases} x+y+z=12 \\ x+y=7 \\ x+z=9 \\ y+z=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3. \\ z=5 \end{cases}$$

Do đó số cách chia 24 cuốn sách gồm 7 cuốn sách Toán, 8 cuốn sách Hóa và 9 cuốn sách Lí để làm phần thưởng cho 12 học sinh, mỗi học sinh nhận được 2 cuốn sách khác môn là:

$$C_{12}^4.C_8^3.C_5^5 = 27\,720 \text{ (cách).}$$

***Phân tích sai lầm học sinh thường gặp*:** Học sinh không chia được 24 cuốn sách ra thành từng cặp. Cách khắc phục: đặt ẩn hoặc chọn sách từng môn để chia lần lượt cho đến hết, ta có cách làm thứ 2 như sau:

Lượt 1: Chọn 7 học sinh để chia sách Toán có C_{12}^7 cách, trao 5 sách Hoá cho 5 bạn còn lại.

Lượt 2: Chọn 3 trong 7 học sinh đã nhận sách Toán để chia nốt 3 cuốn sách Hoá nên C_7^3 cách, 9 bạn còn lại nhận 9 cuốn sách Lí. Khi đó nhận được kết quả: $C_{12}^7.C_7^3 = 27\,720$ (cách).

2.8. Vận dụng các phương pháp đếm để giải bài toán bằng nhiều cách

Thí dụ. *Có bao nhiêu cách sắp xếp các kí tự trong từ THANHCONG sao cho 2 kí tự giống nhau không đứng cạnh nhau?*

Lời giải. Cách 1. *Phương pháp tạo vách ngăn.*

TH1: H không đứng giữa hai chữ N.

Xếp 5 kí tự khác nhau ta có: $5!$ cách.

Chèn 2 chữ N vào các khoảng trống mà các vách ngăn tạo nên có: C_6^2 cách.

Chèn 2 chữ H vào các khoảng trống mà các vách ngăn tạo nên có: C_8^2 cách.

Vậy số cách xếp là: $5!.C_6^2.C_8^2 = 50\,400$ (cách).

TH2: H đứng giữa 2 chữ N.

Coi 2 chữ N là một kí tự ta có số cách xếp 2 chữ N và 5 kí tự khác là: $6!$ cách. Chèn một chữ H vào giữa 2 chữ N có 1 cách, chèn chữ H còn lại vào 7 khoảng trống khác có 7 cách. Vậy có $7!$ cách.

Vậy tổng số cách xếp là: $5!.C_6^2.C_8^2 + 7! = 55\,440$ (cách).

Cách 2. *Phương pháp đếm loại trừ kết hợp với đếm theo vị trí.*

Số cách xếp 9 kí tự trên thoả mãn đề bài ta làm như sau: coi như ta có 9 ô trống xếp thành hàng ngang. Do kí tự N và H được lặp lại 2 lần nên ta sẽ

xếp 5 kí tự còn lại trước thì số cách xếp là 9.8.7.6.5, sau đó ta xếp 2 kí tự N vào 4 chỗ còn lại ta có 6 cách.

Khi hai kí tự N đứng cạnh nhau ta có thể coi đó là kí tự NN và số cách xếp là 8.7.6.5.4.3 và tương tự với HH. Ta nhận thấy hai trường hợp này bị trùng nhau trường hợp xuất hiện đồng thời NN và HH và số cách xếp đó là 7!. Vậy tổng số cách xếp thoả mãn đề bài là:

$$9.8.7.6.5.6-\left(2.8.7.6.5.4.3-7!\right)=55\,440 \text{ (cách).}$$

Cách 3. *Phương pháp đếm loại trừ kết hợp với buộc phần tử.*

Số cách sắp xếp ngẫu nhiên 9 chữ cái là $\frac{9!}{2!2!}$ cách.

Số cách xếp cho hai chữ H hoặc hai chữ N đứng cạnh nhau đều là $\frac{8!}{2!}$ cách.

Xếp cho hai chữ H đứng cạnh nhau, 2 chữ N đứng cạnh nhau là 7! cách.

Ta có số cách xếp thoả mãn đề ra là:

$$\frac{9!}{2!2!}-\left(\frac{8!}{2!}+\frac{8!}{2!}-7!\right)=55440 \text{ (cách).}$$

Các sai lầm thường gặp của học sinh:

Trong cách 1, khi tách các kí tự NN và HH bởi 5 kí tự khác nhau, học sinh quên mất trường hợp 2 là H có thể đứng giữa hai chữ N hoặc N đứng giữa hai chữ H, dẫn đến kết quả là $5!.C_6^2.C_8^2=50400$

Trong cách 2, học sinh không nhận thấy hai trường hợp NN, HH đứng gần nhau bị trùng nhau trường hợp xuất hiện đồng thời NN và HH, dẫn đến kết quả: $9.8.7.6.5.6-2.8.7.6.5.4.3=50\,400$ (cách).

2.9. Bài tập tự luyện

Bài 1. Giải bài toán bằng phương pháp chọn vị trí: Có bao nhiêu số tự nhiên có 10 chữ số đôi một khác nhau, trong đó các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 được xếp theo thứ tự tăng dần từ trái qua phải và chữ số 7 luôn đứng trước chữ số 6.

Bài 2. Có bao nhiêu cách sắp xếp các kí tự trong từ "THÀNH TÀI" sao cho 2 kí tự giống nhau không đứng cạnh nhau? (*Gợi ý*: dùng đếm loại trừ và quy tắc cộng mở rộng).

Bài 3. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau mà trong đó hai số chẵn không thể đứng cạnh nhau?

Đáp số: Bài 2: 32 040 số.

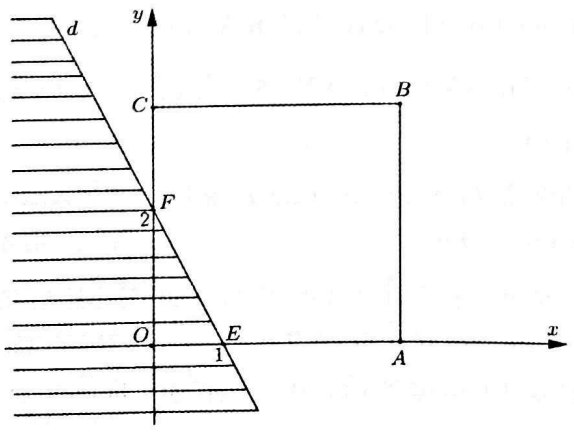
Bài 3: 11 340 số.

****

SAI LẦM . . .

(*Tiếp theo trang 47*)

Một học sinh đã giải bài toán như sau:



Miền nghiệm của bất phương trình $2x+y\geq 2$ là nửa mặt phẳng không bị gạch kể cả đường thẳng d. Diện tích phần chung giữa miền nghiệm (H) và miền hình vuông $ABCO$ là phần tô sẫm.

Ta có: $S=S_{ABCO}-S_{\Delta OEF}=OA^2-\frac{1}{2}OE.OF$

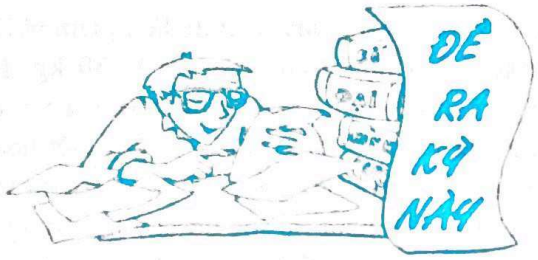
$$=a^2-\frac{1}{2}.1.2=a^2-1.$$

Vậy $a^2-1=\frac{1}{4}\Leftrightarrow a^2=\frac{5}{4}\Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Theo em lời giải trên có đúng không?

TRẦN ĐỨC PHƯƠNG

(*GV THPT Giao Thủy, Ninh Bình*)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/582 (Lớp 6). Tìm tất các các số tự nhiên $\overline{ab}$ (có hai chữ số) sao cho thỏa mãn:

$$\overline{ab} + 5ab = (a+3b)^2.$$

HUỲNH THANH TÂM
(CB Bưu điện phường Bình Định, Gia Lai)

Bài T2/582 (Lớp 7). Số Palindrome là số nguyên dương đọc xuôi hay đọc ngược đều giống nhau. Ví dụ: 323 là số Palindrome có 3 chữ số; 2552 là số Palindrome có 4 chữ số; 47974 là số Palindrome có 5 chữ số. Hỏi số Palindrome có 5 chữ số nhỏ nhất là bội số của 99 là bao nhiêu?

NGUYỄN ĐỨC TƯỞNG
(Pleiku)

Bài T3/582. Cho đa thức $f(x)$ bậc ba có hệ số cao nhất là một số nguyên dương thỏa mãn $f(2024)=3$ và $f(2025)=5$. Chứng minh $f(2026)-f(2023)$ là hợp số.

NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG
(GV THCS Đa Tốn, xã Bát Tràng, Hà Nội)

Bài T4/582. Cho đường tròn $(O; R)$ có hai đường kính $AB \perp CD$. Gọi E là điểm di động trên cung nhỏ BC. AE cắt DB tại F, DE cắt AC tại G, BE cắt OC tại H, CE cắt OB tại I, HG cắt IF tại K. Chứng minh:

a) Tích $FI.GH$ luôn không đổi.

b) EK luôn đi qua một điểm cố định.

LỤC BÌNH
(GV trường Trưng Vương, Đông Hà, Quảng Trị)

Bài T5/582. Cho x, y, z là ba số thực thỏa mãn:

$$|x| \le 3, |y| \le 3, |z| \le 3.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \left| \frac{x}{x^2+16} + \frac{y}{y^2+16} + \frac{z}{z^2+16} \right|.$$

NGUYỄN KHẮC TOÀN
(36 Đào Nhuận, Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/582. Chứng minh rằng trong biểu diễn thập phân của số $(9+4\sqrt{5})^{2025}$ thì đằng sau dấu phẩy có ít nhất 2025 chữ số 9.

NGUYỄN KIM SỐ
(TT Bồi dưỡng và Phát triển tài năng Toán học Nam Sáng - SMATH)

Bài T7/582. Giải phương trình

$$2026^{\sqrt{x}} = 2024 + \log_{2025}\left(2024 + \sqrt{x}\log_{2025} 2026\right).$$

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Bài T8/582. Cho điểm B nằm trong đoạn thẳng AC. Chứng minh rằng

$$d(B,m) \le \max\{d(A,m), d(C,m)\}$$

với m là đường thẳng bất kỳ trong không gian.

LA ĐẠI CƯƠNG
(GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị)

Bài T9/582. Cho biểu thức $Q = \frac{36a}{b+c} + \frac{7b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ trong đó a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện: $a+b>0$, $b+c>0$, $c+a>0$. Tìm giá trị của a khi biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất và $a+b+c=1$.

PHẠM HUY THÔNG
(49 Bạch Mai, Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/582. Cho dãy các đa thức $(P_n(x))_{n=0}^{+\infty}$ thỏa mãn: $P_0(x)=0$, $P_1(x)=x+2$ và

$$P_n(x) = 2P_{n-1}(x)\left(P_{n-1}(x)+1\right)\left(2P_{n-2}(x)+1\right) + P_{n-2}(x),$$

$\forall n \in \mathbb{N}, n \ge 2$.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k, m, nếu $k \mid m$ thì $P_k(x) \mid P_m(x)$.

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T11/582. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ tăng ngặt thỏa mãn:

$$nf\left(f(n)\right)=\left(f(n)\right)^2,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(GV THPT chuyên Tiền Giang, Tiền Giang)

Bài T12/582. Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Các đường thẳng AI, BI, CI cắt lại (O) tương ứng tại D, E, F. Gọi D', E', F' lần lượt đối xứng với D, E, F tương ứng qua BC, CA, AB.

a) Chứng minh các tam giác ABC và $D'E'F'$ có chung tâm đường tròn Euler.

b) Giả sử các đường thẳng ID', IE', IF' lần lượt cắt BC, CA, AB tương ứng tại X, Y, Z. Chứng minh X, Y, Z cùng nằm trên đường thẳng vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác $D'E'F'$.

LÊ VIẾT ÂN
(Ocean Education, 40 đs 9, p. 10, KDC CityLand, Gò Vấp, TP. Hồ Chí Minh)

Bài L1/582. Một đứa trẻ bị sốt ở nhiệt độ 101 °F được cho dùng thuốc hạ sốt. Giả sử cơ chế bay hơi của mồ hôi là cách duy nhất để làm giảm nhiệt độ cơ thể. Khối lượng của đứa trẻ là 30 kg. Nhiệt dung riêng của cơ thể con người bằng nhiệt dung riêng của nước là 1000 cal/kg.K và nhiệt hoá hơi của nước khoảng 580 cal/g. Nếu cơn sốt hạ xuống 98 °F trong 20 phút thì tốc độ bay hơi trung bình do thuốc gây ra ước tính khoảng bao nhiêu g/phút? *Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.*

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

Bài L2/582. Vào thời điểm hiện tại, uranium tự nhiên chứa hai đồng vị phóng xạ $^{235}_{92}U$ và $^{238}_{92}U$, với tỉ lệ số hạt $^{235}_{92}U$ và số hạt $^{238}_{92}U$ là $\frac{7}{1000}$. Biết chu kì bán ra của hai đồng vị này lần lượt là 0,7 tỉ năm và 4,5 tỉ năm. Hỏi cách đây bao nhiêu tỉ năm, uranium tự nhiên có tỉ lệ số hạt $^{235}_{92}U$ và số hạt $^{238}_{92}U$ là $\frac{1}{100}$? *Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.*

THANH LÂM (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/582 (Grade 6). Find 2-digit numbers $\overline{ab}$ such that $\overline{ab}+5ab=(a+3b)^2$.

Problem T2/582 (Grade 7). A palindrome number is a positive integer that reads the same forwards or backwards. For example, 323 is a 3-digit palindrome number; 2552 is a 4-digit palindrome number; 47974 is a 5-digit palindrome number. What is the smallest 5-digit palindrome number that is a multiple of 99?

Problem T3/582. Given a cubic polynomial $f(x)$ whose the highest coefficient is a positive integer and satisfying $f(2024)=3$, $f(2025)=5$. Prove that $f(2026)-f(2023)$ is composite.

Problem T4/582. Given circle $(O;\ R)$ with two diameters $AB\perp CD$. Let E be a moving point on the minor arc BC. Suppose that AE intersects DB at F, DE intersects AC at G, BE intersects OC at H, CE intersects OB at I, HG intersects IF at K. Prove that

a) The product $FI.GH$ is fixed.

b) The line EK always goes through a fixed point.

Problem T5/582. Let x, y, z be three real numbers satisfying $|x|\le 3, |y|\le 3, |z|\le 3$.

Find the maximum value of the expression

$$P=\left|\frac{x}{x^2+16}+\frac{y}{y^2+16}+\frac{z}{z^2+16}\right|.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/582. Prove that the decimal form of the number $(9+4\sqrt{5})^{2025}$ has at least 2025 digits 9 behind the decimal point.

Problem T7/582. Solve the equation

$$2026^{\sqrt{x}}=2024+\log_{2025}\left(2024+\sqrt{x}\log_{2025}2026\right).$$

Problem T8/582. Given a point B on the line segment AC. Prove that

$$d(B,m)\le\max\left\{d(A,m),d(C,m)\right\}$$

where m is any line in the space.

(Xem tiếp trang 37)



Bài T1/578. *Tìm các số nguyên dương phân biệt a, b sao cho $P=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2025$ là một số nguyên.*

Lời giải. Nếu $P=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2025$ là một số nguyên thì $P-2025=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ là số nguyên. Đặt ước số chung lớn nhất của a và b là $(a, b)=e$ thì $a=me$ và $b=ne$ với các số nguyên dương e, m, n và $(m, n)=1$. Từ đó:

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{me}{ne}+\frac{ne}{me}=\frac{m}{n}+\frac{n}{m}=\frac{m^2+n^2}{mn}$ là số nguyên.

Do đó m^2+n^2 chia hết cho mn (*).

Từ (*) suy ra m^2+n^2 chia hết cho m, mà m^2 chia hết cho m nên n^2 chia hết cho m. Do $(m, n)=1$ thì n^2 chia hết cho m chỉ khi $m=1$. Thay $m=1$ vào (*) được $1+n^2$ chia hết cho n, do n^2 chia hết cho n thì xảy ra 1 chia hết cho n, suy ra $n=1$.

Từ $m=n=1$ thì $a=me=e$ và $b=ne=e$, dẫn đến $a=b$, điều này không thỏa mãn giả thiết a, b là các số nguyên dương phân biệt. Vậy không có các số nguyên dương phân biệt a, b nào thỏa mãn đề bài.

Nhận xét. Một số bạn xét $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}$ là số nguyên suy ra a^2+b^2 chia hết cho ab. Từ đó suy ra a^2+b^2 chia hết cho b nên a^2 chia hết cho b, đến đây suy ra b (khác a) bằng 1 hoặc bằng a^2. Lập luận này không đúng. Chẳng hạn với $a=6$ thì ước số của 36 có thể là 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36. Các bạn sau có lời giải đúng. **Phú Thọ:** *Nguyễn Hữu Khanh*, 7A6, THCS Yên Lạc, xã Yên Lạc; **Thanh Hóa**: *Lê Minh Huy*, 6B2, THCS Đông Bắc Ga, P. Hạc Thành; **Nghệ An**: *Phạm Nguyễn Nguyệt Linh*, 7B, *Trương Đình Quốc Anh*, 7E, THCS Lý Nhật Quang, xã Đô Lương.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/578. *Đặt*

$$S=\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+...+\frac{1}{2026^2-1}.$$

Chứng minh $\frac{1}{5}<S<\frac{1}{2}$.

Lời giải. Ta có: $S=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots+\frac{1}{2025.2027}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2025}-\frac{1}{2027}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2027}\right)=\frac{1}{2}.\frac{2026}{2027}$$

$$=\frac{1013}{2027}<\frac{1013}{2026}=\frac{1}{2} \quad (1).$$

Mặt khác: $S=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots+\frac{1}{2025.2027}$

$$>\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{6.8}+\cdots+\frac{1}{2026.2028}.$$

Mà $\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{6.8}+\cdots+\frac{1}{2026.2028}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\cdots+\frac{1}{2026}-\frac{1}{2028}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2028}\right)=\frac{1}{2}.\frac{1013}{2028}>\frac{1013}{5.1013}=\frac{1}{5},$$

do đó $S>\frac{1}{5}$ (2). Từ (1) và (2) ta có: $\frac{1}{5}<S<\frac{1}{2}$.

Nhận xét. Ngoài cách giải tác giả đưa ra, nhiều bạn tham gia có lời giải ngắn gọn và chính xác. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt.

Hà Nội: *Dương Đức Anh*, 7M, THCS Ngô Sĩ Liên, Cửa Nam; **Phú Thọ:** *Bùi Thiên Long*, 6A6, *Phạm Quỳnh Chi*, *Nguyễn Bảo Châu*, *Nguyễn Hữu Bảo Châu* và *Nguyễn Văn Hoàng*, 7A6, THCS Yên Lạc, Tam Hồng; **Quảng Ngãi:** *Trần Phạm Minh Thuý*, 6B, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; *Nguyễn Đăng Khôi* và *Phạm Thị Bảo Uyên*, 6B, THCS Phạm Văn Đồng, Đình Cương; *Trần Văn Phụng*, 7C, THCS Nguyễn Kim Vang, Đình Cương; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thái Sơn*, 7A, THCS Yên Phong, Yên Phong; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Xuân Tùng*, 6A6, THCS Yên Lạc, Tam Hồng; **Nghệ An:** *Phạm Nguyễn Nguyệt Linh*, 7B, *Thái Bùi Hà Anh*, 7E, THCS Lý Nhật Quang; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, trường Quốc tế Song ngữ cấp 2,3 GIBS, TP. Graz.

TRẦN THỊ KIM THANH

Bài T3/578. *Tìm các bộ số nguyên dương* (x, y, z) *thỏa mãn* $x^6+(y^2+3)^3=z(3x^2y^2+9x^2-z^2)$ (1).

Lời giải. Biến đổi (1) thành

$$x^6+(y^2+3)^3+z^3=3x^2z(y^2+3).$$

Đặt $a=x^2, b=y^2+3, c=z.$

Ta có: $a^3+b^3+c^3=3abc$ (2).

Nhận thấy :

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3-3abc&=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc\\&=(a+b+c)\left[(a+b)^2-(a+b)c+c^2\right]-3ab(a+b+c)\\&=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)\\&=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right].\end{aligned}$$

Do x, y, z nguyên dương nên $a + b + c > 0$, suy ra đẳng thức (2) xảy ra khi

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0\Leftrightarrow a=b=c.$$

Dẫn đến $x^2=y^2+3=z.$

Từ $x^2=y^2+3$ suy ra $(x-y)(x+y)=3$.

Do x, y nguyên dương nên chỉ xảy ra:

$$\begin{cases}x-y=1\\x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}.$$

Suy ra $z = 2^2 = 4$. Vậy bộ số nguyên dương duy nhất thoả mãn (1) là $(x, y, z) = (2, 1, 4)$.

Nhận xét. Có nhiều bạn tham gia giải bài này và đa số giải theo cách trên. Một số bạn đã vận dụng ngay bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương để có $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$, đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ và cho kết quả đúng.

Tuyên dương các bạn sau có lời tốt:

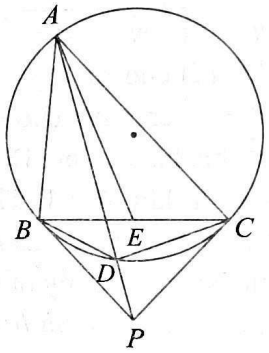
Hà Nội: *Dương Đức Anh,* 7M, THCS Ngô Sĩ Liên; *Doãn Hải Dương,* 9A6, THCS Thanh Xuân, *Nguyễn Thành Nam,* 9A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Mai; **Phú Thọ**: *Tạ Minh Hằng, Nguyễn Bảo Châu,* 8A6, THCS Yên Lạc; *Nguyễn Thanh Mai, Chu Ngọc Anh,* 9A, THCS Lý Nam Đế; **Nghệ An**: *Phạm Hồng Quân,* 8B, THCS Lý Nhật Quang; **Thanh Hoá**: *Nguyễn Bá Đức Anh,* 8A, TH và THCS Lương Chí, Tĩnh Gia; *Mai Thiện Ân,* 9B, THCS Chu Văn An, Nga Sơn; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Mai Trâm,* 9A6, THCS Lê Văn Thiêm, Thành Sen; **Quảng Trị**: *Nguyễn Chính Quân,* 8/2, THCS Đồng Hải; **TP. Hồ Chí Minh**: *Mai Phú Khang,* 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; *Trần Khánh Tùng,* 9/2, THCS Trần Quốc Toản, Bình Tân.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/578. *Cho hai đường tròn* (O) *và* (O') *cắt nhau tại hai điểm* H *và* L. *Điểm* X *nằm trên* (O'). *Các đường thẳng* HX, LX *cắt* (O) *lần lượt tại* E, F (E, F *khác* H, L). *Các tiếp tuyến tại* H *và* L *của* (O') *cắt nhau tại* Y. *Chứng minh rằng đường thẳng* XY *đi qua trung điểm của* EF.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Tam giác ABC *nội tiếp đường tròn* (O), *hai tiếp tuyến tại* B *và* C *cắt nhau tại* P. *Gọi* E *là trung điểm của* BC. *Khi đó* $\widehat{BAP}=\widehat{CAE}$.



Đây là kết quả quen thuộc về đường đối trung, có nhiều cách chứng minh bổ đề trên. Chúng tôi giới thiệu cách chứng minh sử dụng định lý Ptolemy.

Gọi D là giao điểm thứ hai của AP và đường tròn (O), ta có:

• $\Delta PBD \backsim \Delta PAB$ (g.g), suy ra $\frac{PB}{PA}=\frac{BD}{AB}$.

Tương tự, $\frac{PC}{PA}=\frac{CD}{AC}$.

Mà $PB = PC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên

$$\frac{BD}{AB}=\frac{CD}{AC}, \text{ hay } AC.BD = AB.CD \quad (1).$$

• Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho

$\widehat{MAC}=\widehat{DAB}$, suy ra $\widehat{MAB}=\widehat{DAC}$.

Từ đó, dễ thấy $\Delta AMC \backsim \Delta ABD$ (g.g), suy ra

$$AC \,.\, BD = AD \,.\, MC \quad (2).$$

Tương tự, $\Delta AMB \backsim \Delta ACD$, suy ra

$$AB \cdot CD = AD \cdot MB \quad (3).$$

Từ (2) và (3) suy ra:

$$AB.CD + AC.BD = AD.BC \quad (4).$$

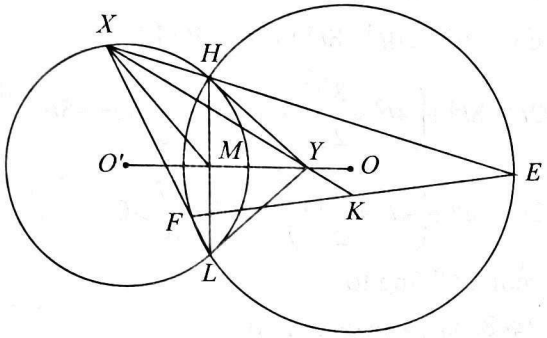
Từ (1) và (4) suy ra:

$$AD.BC = 2AC.BD \Leftrightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{EC}.$$

Từ đó suy ra: $\Delta ABD \backsim \Delta AEC$ (c.g.c).

Do đó $E \equiv M$, hay $\widehat{BAP} = \widehat{CAE}$.

Trở lại bài toán, gọi K là giao điểm của XY và EF, M là trung điểm của HL. Áp dụng bổ đề trên, ta có $\widehat{YXH} = \widehat{MXL}$



Mặt khác, theo tính chất góc nội tiếp ta có:

$$\widehat{LHE} = \widehat{LFE}; \widehat{FLH} = \widehat{FEH}.$$

Suy ra: $\widehat{XEF} = \widehat{XLH}$.

Từ đó $\Delta XKE \backsim \Delta XML$, do đó:

$$\frac{KE}{ML} = \frac{XE}{XL} = \frac{EF}{LH} = \frac{EF}{2ML}.$$

Vậy $EF = 2EK$, do đó K là trung điểm EF.

Bài toán được chứng minh xong.

Nhận xét. 1) Đẳng thức (4) là đẳng thức Ptolemy, đúng cho một tứ giác nội tiếp $ABDC$ bất kỳ.

2) Bạn *Trần Đức Hiếu*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long, **Lâm Đồng** sử dụng tính chất của hàng điểm điều hòa, chùm điều hòa để giải.

3) Các bạn dưới đây cũng cho lời giải tốt:

Thanh Hóa: *Nguyễn Bá Đức Anh*, 8A, TH và THCS Lương Chí, Tĩnh Gia; **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, Hùng Châu; *Hoàng Văn Duy*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Mai Trâm*, 9A6, THCS Lê Văn Thiêm, Thành Sen; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đỗ Hoàng Quân*, 9A2, THCS Đào Duy Anh, Phú Nhuận; **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, 9A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Mai; **Quảng Trị:** *Nguyễn Chính Quân*, 8/2, THCS Đồng Hải; **Ninh Bình:** *Đào Việt Trung*, 9B, THCS Thanh Sơn; **Hải Phòng:** *Nguyễn Việt Cường*, 10C1, THPT Vĩnh Bảo.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/578. *Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức:*

$$P = (1-5ab)^2 + (1-5bc)^2 + (1-5ca)^2.$$

Lời giải. Ta có: $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 0 \le ab \le \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} \le 1-5ab \le 1$$

$$\Rightarrow |1-5ab| \le 1 \Rightarrow (1-5ab)^2 \le 1.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right.$.

Tương tự: $(1-5bc)^2 \le 1$; $(1-5ca)^2 \le 1$.

Suy ra: $P = (1-5ab)^2 + (1-5bc)^2 + (1-5ca)^2 \le 3$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$(a,b,c) = (0,0,1)$ và các hoán vị của chúng.

Vậy $\max P = 3$, giá trị đó đạt được khi và chỉ khi một trong ba số a, b, c bằng 1 và hai số còn lại bằng 0.

Mặt khác ta có: $\left(ab - \frac{1}{9}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow a^2b^2 \ge \frac{2ab}{9} - \frac{1}{81}$.

Tương tự: $b^2c^2 \ge \frac{2bc}{9} - \frac{1}{81}$; $c^2a^2 \ge \frac{2ca}{9} - \frac{1}{81}$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \ge \frac{2(ab+bc+ca)}{9} - \frac{1}{27}.$$

Do đó: $P = 3 - 10(ab+bc+ca) + 25(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$

$$\ge 3 - 10(ab+bc+ca) + 25\left[\frac{2(ab+bc+ca)}{9} - \frac{1}{27}\right]$$

$$\Rightarrow P \ge \frac{56}{27} - \frac{40}{9}(ab+bc+ca).$$

Lại có $3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2 = 1$, suy ra:

$$P \ge \frac{56}{27} - \frac{40}{9}(ab+bc+ca) \ge \frac{56}{27} - \frac{40}{27} = \frac{16}{27}.$$

Dấu bằng đạt được khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Vậy $\min P=\frac{16}{27}$, giá trị đó đạt được khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Nhận xét. 1) Bất đẳng thức

$$3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0,\ \text{đúng.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

2) Có thể tìm giá trị nhỏ nhất của P bằng cách khác: Áp dụng BĐT $x^2+y^2+z^2\ge\frac{1}{3}(x+y+z)^2$ ta có: $P=(1-5ab)^2+(1-5bc)^2+(1-5ca)^2$

$$\ge\frac{1}{3}\left[3-5(ab+bc+ca)\right]^2.$$

Vì $ab+bc+ca\le\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow 3-5(ab+bc+ca)\ge 3-\frac{5}{3}=\frac{4}{3}.$$

Ta được: $P\ge\frac{1}{3}\left[3-5(ab+bc+ca)\right]^2\ge\frac{16}{27}$, dấu bằng đạt được khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Nghệ An: *Hoàng Văn Duy*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí kiên, Hùng Châu; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Mai Trâm*, 9A6, THCS Lê Văn Thiêm, Thành Sơn; **Thanh Hoá:** *Nguyễn Bá Đức Anh*, 8A, TH và THCS Lương Chí, Tĩnh Gia, *Mai Thiện Ân*, 9B, THCS Chu Văn An, Nga Sơn; **Hà Nội:** *Nguyễn Thành Nam*, 9A1, THCS Linh Đàm, Hoàng Liệt, Hoàng Mai.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/578. *Giải phương trình*

$$(8\cos^3 x+1)^3=162\cos x-27 \quad (1).$$

Lời giải. Cách 1 (của *Lê Ánh Dương, Hà Hoàng Uyên Nhi, Phan Việt Hoàng* và nhiều bạn khác)

Đặt $t=\cos x$, ta có:

$$(1)\Leftrightarrow(8t^3+1)^3=162t-27$$
$$\Leftrightarrow 512t^9+192t^6+24t^3+1=162t-27$$
$$\Leftrightarrow 256t^9+96t^6+12t^3-81t+14=0$$
$$\Leftrightarrow 256t^9+192t^7+64t^6+144t^5+24t^4+112t^3$$
$$-192t^7-144t^5-48t^4-108t^3-18t^2-84t$$
$$+32t^6+24t^4+8t^3+18t^2+3t+14=0$$
$$\Leftrightarrow 8t^3(32t^6+24t^4+8t^3+18t^2+3t+14)$$
$$-6t(32t^6+24t^4+8t^3+18t^2+3t+14)$$
$$+(32t^6+24t^4+8t^3+18t^2+3t+14)=0$$
$$\Leftrightarrow(8t^3-6t+1)(32t^6+24t^4+8t^3+18t^2+3t+14)=0 \quad (2).$$

Ta có: $32t^6+24t^4+8t^3+18t^2+3t+14$

$$=32t^6+8t^4+\left(4t^2+\frac{3}{2}\right)^2+2t\left(4t^2+\frac{3}{2}\right)+t^2+5t^2+\frac{47}{4}$$
$$=32t^6+8t^4+\left(4t^2+\frac{3}{2}+t\right)^2+5t^2+\frac{47}{4}>0$$

với mọi t. Chứng tỏ

$(2)\Leftrightarrow 8\cos^3 x-6\cos x+1=0$

$$\Leftrightarrow 2(4\cos^3 x-3\cos x)+1=0\Leftrightarrow 2\cos 3x+1=0$$
$$\Leftrightarrow\cos 3x=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}$$
$$\Leftrightarrow 3x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Lời bình: Nhiều bạn đã đặt ẩn phụ và giải hệ phương trình, tuy nhiên cũng chỉ là các phép biến đổi tương đương của (1).

Cách 2 (của *Nguyễn Hoài Nhanh* và nhiều bạn)

Đặt $t=2\cos x, -2\le t\le 2$. Khi ấy ta có:

$$(1)\Leftrightarrow(t^3+1)^3=81t-27$$
$$\Leftrightarrow(t^3+1)^3+27(t^3+1)=(3t)^3+27\cdot(3t)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+27t$. Ta có $f'(t)=3t^2+27>0$ với mọi t. Chứng tỏ hàm số $f(t)$ đơn điệu ngặt trên $[-2;2]$. Suy ra phương trình $f(t^3+1)=f(3t)$ có một nghiệm duy nhất

$$t^3+1=3t\Leftrightarrow(2\cos x)^3+1=6\cos x$$
$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}.$$

Đáp số: $x=\pm\frac{2\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$.

Nhận xét. Bài này dễ nên nhiều bạn tham gia giải và giải đúng.

An Giang: *Trương Tấn Dũng*, 10T1, *Lưu Minh Trí*, *Nguyễn Thành Khánh*, 10T2, *Đào Đức Phúc Nguyên*, 11T1, *Trần Hoàng Bách*, *Nguyễn Đức Mạnh*, *Nguyễn Hoài Nhanh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, TP. Rạch Giá; **Cần Thơ:** *Nguyễn Tấn Phát*, 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Hà Nội:** *Nguyễn Kim Thành*, 11 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Trung Hải*, *Bùi Tùng Lâm*, 11 Toán 1, *Phạm Viết Lê Huy*, 11 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; *Nguyễn Mai Trâm*, 9A6, THCS Lê Văn Thiêm, phường Thành Sen; **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10 chuyên Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 10T, THPT chuyên Thăng Long; **Long An:** *Huỳnh Phan Kim Ngân*, 11T2, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Nghệ An:** *Nguyễn Đức Dũng*, 11A1, THPT Yên Thành, *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 11A3, THPT Hoàng Mai, phường Hoàng Mai, *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, xã Hùng Châu; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 12 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Trị:** *Lê Ánh Dương*, 12 Toán 2, *Phạm Viết Hoàng*, 11 Toán 2, *Hoàng Thị Uyên Nhi*, 10 Toán 1, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Tây Ninh:** *Trần Lê Trọng Phúc*, 11T1, THPT Trần Văn Giàu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chí Đại*, *Nguyễn Hải Đăng*, 11A1, THPT Lê Thánh Tông, *Phan Phạm Gia Huy*, 11A1, THPT Phú Hòa, Củ Chi, *Nguyễn Chánh Thiện*, 11CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Vĩnh Long:** *Huỳnh Minh Đức*, 11T2, *Lê Hoàng Khang*, *Lê Duy Minh*, *Thái Minh Phúc*, *Nguyễn Thanh Trúc*, *Đặng Hoàng Trung*, 11T1, *Lê Thiện Khiêm*, 12T2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm. Có một bạn không ghi tên.

TẠ DUY PHƯỢNG

Bài T7/578. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{a^4+b+c}+\frac{b}{b^4+c+a}+\frac{c}{c^4+a+b}\le\frac{3(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có: $(a^4+b+c)\left(\frac{1}{a^2}+b+c\right)\ge(a+b+c)^2$.

Suy ra:

$$\frac{a}{a^4+b+c}\le\frac{1+a^2b+a^2c}{a(a+b+c)^2}=\frac{1}{a(a+b+c)^2}+\frac{ab+ac}{(a+b+c)^2}.$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b}{b^4+c+a}\le\frac{1}{b(a+b+c)^2}+\frac{ab+bc}{(a+b+c)^2};$$

$$\frac{c}{c^4+a+b}\le\frac{1}{c(a+b+c)^2}+\frac{ca+bc}{(a+b+c)^2}.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta thu được:

$$\text{VT}\le\frac{1}{(a+b+c)^2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}\left(2+\frac{1}{abc}\right)=\frac{3(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}.$$

Chứng minh hoàn tất.

Nhận xét. Đây là một bài bất đẳng thức khá cơ bản, sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky đánh giá mẫu để đưa về mẫu chung. Có nhiều bạn tham gia gửi lời giải về tòa soạn và đa số các bạn đều có lời giải đúng. Tuy nhiên vẫn có một vài bạn giải sai do ngộ nhận, nhầm chiều bất đẳng thức, áp dụng sai bất đẳng thức Bunyakovsky. Có bạn chứng minh $\text{VT}\le1$ và $\text{VP}\le1$ để suy ra bất đẳng thức đúng-đây là lỗi sai rất cơ bản do chưa nắm vững các tính chất về bất đẳng thức. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Tây Ninh: *Trần Lê Trọng Phúc*, 11T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Tiền Giang:** *Phạm Nguyễn Anh Duy*, 11 Toán 1, THPT chuyên Tiền Giang; **Sóc Trăng:** *Trần Nhật Tiến*, 11A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Quảng Bình:** *Lê Ánh Dương*, 12 chuyên Toán 2, *Phan Viết Hoàng*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **TP. Huế:** *Nguyễn Duy Phúc*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc Học Huế; **Hà Nội:** *Nguyễn Kim Thành*, 11 Toán 2, THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội; *Nguyễn Thành Nam*, 9A1, THCS Linh Đàm; *Nguyễn Phương Linh*, 9C, THCS Mỹ Hưng; **An Giang:** *Nguyễn Sơn Khánh*, *Nguyễn Hoài Nhanh*, *Nguyễn Đức Mạnh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 10T, *Phạm Quang Minh*, 10, THPT chuyên Thăng Long; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 11CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; *Phan Phạm Gia Huy*, 11A1, THPT Phú Hòa; *Mai Phú Khang*, 9A12, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Thanh Trúc*, *Thái Minh Phúc*, *Lê Duy Minh*, *Lê Hoàng Khang*, 11T1, *Huỳnh Minh Đức*, 11T2, *Lê Thiện Khiêm*, 12T2,

THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Hưng Yên:** *Dương Trường Giang*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Phú Thọ:** *Trần Mạnh Phong*, 8E, THCS Vĩnh Tường; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Mai Trâm*, 9A6, THCS Lê Văn Thiêm; *Nguyễn Viết Thế Tài, Lê Minh Mạnh, Bùi Tùng Lâm*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 12 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Cần Thơ:** *Nguyễn Tấn Phát*, 10A2, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Cộng hòa Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 3B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp 2,3 GIBS, TP. Graz; **Nghệ An:** *Hoàng Văn Duy*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Nguyễn Văn Đức Thắng*, 11A3, THPT Hoàng Mai, phường Hoàng Mai.

HOÀNG NGỌC MINH

Bài T8/578. *Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn ABC ta có:* $\frac{1}{IA}+\frac{1}{IB}+\frac{1}{IC}\le\frac{1}{HA}+\frac{1}{HB}+\frac{1}{HC}$ *trong đó H và I lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.*

Lời giải. Gọi O, R lần lượt là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC, M,D lần lượt là hình chiếu của O,I trên BC. Ta có:

$$AH=2OM=2R.\cos A.$$

Tương tự: $BH=2R.\cos B$, $CH=2R.\cos C$.

Ta có: $2R.\sin A=BC=BD+CD=r.\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$

$$=r.\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

Suy ra: $4R.\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=r.\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$.

Lại có $IA=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$ nên $IA=4R.\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$.

Tương tự với IB,IC. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\ge\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+\frac{1}{2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}.$$

Ta cần hai bổ đề quen thuộc sau:

Bổ đề 1. *Nếu $x+y+z+2=xyz$ thì tồn tại a,b,c sao cho $x=\frac{b+c}{a},y=\frac{a+c}{b},z=\frac{a+b}{c}$.*

Bổ đề 2. *Trong tam giác ABC, ta luôn có*

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C=1.$$

Trở lại bài toán: Từ bổ đề 2 ta có:

$$\frac{\cos A}{\cos B\cos C}+\frac{\cos B}{\cos A\cos C}+\frac{\cos C}{\cos A\cos B}+2=\frac{1}{\cos A\cos B\cos C}.$$

Đặt $m=\frac{\cos A}{\cos B\cos C},n=\frac{\cos B}{\cos A\cos C},p=\frac{\cos C}{\cos A\cos B}$ thì $m+n+p+2=mnp$. Do đó, theo bổ đề 1, tồn tại $x,y,z>0$ sao cho: $m=\frac{y+z}{x},n=\frac{x+z}{y},p=\frac{x+y}{z}$.

Suy ra: $\frac{1}{\cos^2A}=np=\frac{(x+z)(x+y)}{yz}$.

Tương tự ta thu được:

$$\cos A=\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}};\cos B=\sqrt{\frac{xz}{(y+x)(y+z)}};$$

$$\cos C=\sqrt{\frac{xy}{(z+x)(z+y)}}.$$

Ta có: $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}=\frac{1-\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}}}{2}$

$$=\frac{\sqrt{(x+y)(x+z)}-\sqrt{yz}}{2\sqrt{(x+y)(x+z)}}\ge\frac{x}{2\sqrt{(x+y)(x+z)}}.$$

Suy ra $\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\le\sqrt[4]{\frac{4(x+y)(x+z)}{x^2}}$. Tương tự:

$$\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}\le\sqrt[4]{\frac{4(y+x)(y+z)}{y^2}},\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\le\sqrt[4]{\frac{4(z+x)(z+y)}{z^2}}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$2\sum_{cyc}\sqrt{\frac{(x+y)(x+z)}{yz}}\ge2\sum_{cyc}\sqrt[4]{\frac{(y+z)^2(x+y)(x+z)}{y^2z^2}}$$

$$\Leftrightarrow2\sum_{cyc}\sqrt{x(x+y)(x+z)}\ge2\sum_{cyc}\sqrt[4]{x^2(y+z)^2(x+y)(x+z)}.$$

Chú ý rằng $VP\le\sum_{cyc}\sqrt{x(x+y)(x+z)}+\sum_{cyc}(y+z)\sqrt{x}$.

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc}\sqrt{x(x+y)(x+z)}+\sum_{cyc}(y+z)\sqrt{x}\le2\sum_{cyc}\sqrt{x(x+y)(x+z)}.$$

hay

$$\sqrt{x(x+y)(x+z)}+\sqrt{y(y+x)(y+z)}+\sqrt{z(z+x)(z+y)}$$
$$\geq (y+z)\sqrt{x}+(x+z)\sqrt{y}+(x+y)\sqrt{z} \quad (*)$$

Bằng cách bình phương hai vế, dễ thấy rằng

$$\sqrt{x(x+y)(x+z)}\geq x(\sqrt{y}+\sqrt{z}),$$
$$\sqrt{y(y+x)(y+z)}\geq y(\sqrt{x}+\sqrt{z}),$$
$$\sqrt{z(z+x)(z+y)}\geq z(\sqrt{x}+\sqrt{y}).$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức cùng chiều ta thấy rằng (*) đúng.

Vậy bài toán được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Nhận xét. Đây là một bài toán khó, chỉ có một bạn gửi lời giải nhưng không đúng.

NGUYỄN VĂN LINH

Bài T9/578. *Tồn tại hay không $2n$ $(n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2)$ số hữu tỷ $a_i, b_i, i=\overline{1,n}$ thỏa mãn*

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i\sqrt{2})^{2n}=1+\sqrt{2}\ ?$$

Lời giải (của bạn *Nguyễn Thanh Trúc*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long**)

Giả sử tồn tại $2n$ số hữu tỷ a_i, b_i $(i = 1,\ldots, n)$ thỏa mãn: $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+b_i\sqrt{2}\right)^{2n}=1+\sqrt{2}$ (1).

Áp dụng khai triển nhị thức Newton ta có:

$$\left(a_i+b_i\sqrt{2}\right)^{2n}=A_i+B_i\sqrt{2} \quad (2),$$

ở đó A_i, B_i là các số hữu tỷ. Từ đó

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+b_i\sqrt{2}\right)^{2n}=A+B\sqrt{2} \quad (3),$$

ở đó $A=\sum_{i=1}^{n}A_i, B=\sum_{i=1}^{n}B_i$ là các số hữu tỷ.

Ta cũng có: $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-b_i\sqrt{2}\right)^{2n}=A-B\sqrt{2}$ (4).

Từ (1) và (3) suy ra:

$$1+\sqrt{2}=A+B\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}(1-B)=A-1.$$

Nếu $B\neq 1$ thì $\sqrt{2}=\frac{A-1}{1-B}$ là số hữu tỷ, mâu thuẫn,

Vậy $B = 1$ do đó $A = 1$.

Thay vào (4) ta được: $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-b_i\sqrt{2}\right)^{2n}=1-\sqrt{2}<0.$

Ta có mâu thuẫn vì vế trái là số không âm. Vậy không tồn tại $2n$ số hữu tỷ a_i, b_i $(i = 1,\ldots, n)$ thỏa mãn (1).

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Hà Tĩnh:** *Bùi Tùng Lâm*, Toán 11, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên, Hùng Châu; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Thanh Trúc*, *Lê Duy* Minh, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T10/578. *Cho số nguyên $n \geq 2$. Tìm các đa thức $Q(x)$ có hệ số thực bậc cao nhất là $n-1$ sao cho $x(x-1)\ldots(x-n)Q(x)+x^2+1$ là bình phương của một đa thức.*

Lời giải (dựa theo ý của đa số các bạn). Ta chứng minh tồn tại đa thức $Q(x)$ để

$$x(x-1)\ldots(x-n)Q(x)=(P(x))^2 \quad (1)$$

với $P(x)$ là đa thức với hệ số thực.

Từ (1) suy ra: $(P(k))^2=k^2+1, k\in\{0,1,2,\ldots,n\}$

hay $P(k)=\varepsilon_k\sqrt{k^2+1}$, $\varepsilon_k\in\{-1,1\}$, $k\in\{0,1,2,\ldots,n\}$.

Ta thu được 2^n bài toán nội suy Lagrange là xác định các đa thức $P(x)$ với hệ số thực bậc n sao cho $P(k)=\varepsilon_k\sqrt{k^2+1}, \varepsilon_k\in\{-1,1\}, k\in\{0,1,2,\ldots,n\}$ (2).

Theo công thức Lagrange và (2) thì ứng với mỗi bộ giá trị $(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$ đã chọn, tồn tại duy nhất một đa thức $P(x)$ tương ứng có dạng

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}P(k)\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\frac{x-j}{k-j}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k\sqrt{k^2+1}\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\frac{x-j}{k-j} \quad (3).$$

Thay $P(x)$ từ (3) vào (1), ta thu được 2^n đa thức $Q(x)$ dạng $Q(x)=\frac{(P(x))^2-x^2-1}{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}$.

Từ cách xây dựng, ta thu được $Q(x)$ là các đa thức bận $n-1$ thỏa mãn đề bài.

Nhận xét. Đây là dạng toán cơ bản về nội suy đa thức và ứng dụng định lý Lagrange để tìm các dạng đa thức thỏa mãn các điều kiện bài ra.

Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Viết Thế Tài, Nguyễn Trung Hải, Ngô Bửu Anh Khoa*, 11T1, 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** *Lê Vũ Quỳnh Như*, 9A, THCS Phùng Chí Kiên; **Tiền Giang:** *Đặng Quang Minh*, 11T1, THPT chuyên Tiền Giang; **An Giang:** *Nguyễn Hoài Nhanh*, 11T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T11/578. *Cho dãy số* (x_n) *được xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n} \end{cases}$$

với mọi $n = 1, 2, 3, \ldots$ *và* $a > 0$.

Chứng minh rằng $\sqrt{a^2+2n} < x_n < \sqrt{a^2+2n} + \dfrac{1}{2a}$ *với mọi* $n = 1, 2, 3, \ldots$

Lời giải. Dễ thấy $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ và do $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n} > x_n$ nên (x_n) là dãy tăng.

Ta có: $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n} \geq 2\sqrt{x_n . \dfrac{1}{x_n}} = 2$. Ta sẽ chứng minh $x_n > \sqrt{a^2+2n}$.

Ta có: $x_{n+1}^2 = \left(x_n + \dfrac{1}{x_n}\right)^2 = x_n^2 + 2 + \dfrac{1}{x_n^2} \geq x_n^2 + 2$.

Vậy $x_n^2 > x_{n-1}^2 + 2 > x_{n-2}^2 + 2 + 2 > \ldots > x_0^2 + 2n = a^2 + 2n$ hay $x_n > \sqrt{a^2+2n}$.

Ta cần chứng minh: $x_n < \sqrt{a^2+2n} + \dfrac{1}{2a}$ (*). Đặt $t_n = \sqrt{a^2+2n}$, $c = \dfrac{1}{2a}$. Ta sẽ chứng minh quy nạp BĐT(*). Với $n = 1$ ta có: $x_1 = a + \dfrac{1}{a}$. Ta cần chứng minh:

$$a + \frac{1}{a} < \sqrt{a^2+2} + \frac{1}{2a} \Leftrightarrow a + \frac{1}{2a} < \sqrt{a^2+2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 1 + \frac{1}{4a^2} < a^2 + 2 \Leftrightarrow a > \frac{1}{2}.$$

Như vậy (*) chỉ đúng với $a > \dfrac{1}{2}$ nên ta sẽ xét với $a > \dfrac{1}{2}$. Giả sử (*) đúng tới n, ta chứng minh (*) đúng với $n + 1$. Xét hàm số:

$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ có $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} > 0, \forall x \in [2; +\infty)$.

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[2; +\infty)$.

Theo giả thiết quy nạp: $x_n < t_n + c$ nên:

$x_{n+1} = f(x_n) < f(t_n + c) = t_n + c + \dfrac{1}{t_n + c}$. Ta cần chứng minh: $t_n + c + \dfrac{1}{t_n + c} < t_{n+1} + c \Leftrightarrow \dfrac{1}{t_n + c} < t_{n+1} - t_n = \dfrac{2}{t_{n+1} + t_n}$

$$\Leftrightarrow t_{n+1} - t_n < 2c \Leftrightarrow \frac{2}{t_{n+1} + t_n} < 2c \Leftrightarrow t_{n+1} + t_n > \frac{1}{c} = 2a.$$

Điều trên hiển nhiên đúng vì

$$t_{n+1} + t_n = \sqrt{a^2 + 2(n+1)} + \sqrt{a^2 + 2n} > 2a.$$

Bài toán được giải quyết.

Nhận xét. Các bạn gửi lời giải bài này về Tòa soạn hầu hết đã phát hiện bài toán cần thêm điều kiện $a > \dfrac{1}{2}$ và giải bài toán với điều kiện đó. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Tĩnh:** *Ngô Bùi Anh Khoa, Lê Minh Mạnh, Nguyễn Viết Thế Tài*, 11 Toán 1, *Phan Viết Lê Huy*, 11 Toán 2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Gia Lai:** *Lương Xuân Nghĩa*, 11A7, THPT Chi Lăng; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Đăng Khoa*, 11 Toán 1, THPT chuyên Tiền Giang; **Lâm Đồng:** *Huỳnh Nguyễn Lê Minh*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long.

Một bạn có lời giải đúng nhưng quên ghi họ tên và địa chỉ.

TRẦN HỮU NAM

Bài T12/578. *Cho tam giác đều ABC với bán kính đường tròn ngoại tiếp R và P là điểm nằm trong tam giác đó. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng:* $PA.PB.PC + PD.PE.PF \leq \dfrac{9R^3}{8}$.

Lời giải. Để cho đơn giản, khi không có gì nhầm lẫn, ta dùng các dấu $\sum$ và $\prod$ để chỉ tổng và tích. Ta cần có hai bổ đề.

Bổ đề 1. *Cho tam giác đều ABC, h là độ dài các đường cao, P nằm trong ABC. D, E, F theo thứ tự là hình chiếu của P trên BC, CA, AB. Khi đó*

$$PD + PE + PF = h.$$

Bổ đề 2. Với mọi số thực không âm x, y, z, ta có:

1) $\dfrac{1}{3}\sum x \geq \prod x \geq \prod (y + z - x)$.

2) $\frac{1}{3}\sum x=\prod x$ khi và chỉ khi $x=y=z$.

3) $\prod x=\prod(y+z-x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=z \\ x=0,y=z \\ y=0,z=x \\ z=0,x=y \end{array}\right.$.

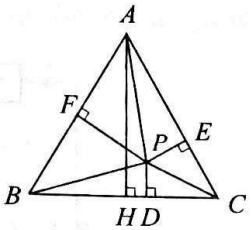
Phép chứng minh hai bổ đề trên rất đơn giản, không trình bày ở đây.

Trở lại giải bài toán T12.

Không mất tính tổng quát giả sử $R=\frac{2}{3}$. Gọi h là là độ dài đường cao của tam giác ABC.

Đặt $PD=x,PE=y,PF=z$.

Dễ thấy $x,y,z\geq 0$.



Theo bổ đề 1, chú ý rằng $h=\frac{3}{2}R$, ta có $x+y+z=1$.

Dễ thấy tứ giác $AEPF$ nội tiếp đường tròn đường kính AP và $\widehat{EPF}=120^\circ$.

Từ đó, theo các định lí sin và côsin, suy ra:

$$PA=\frac{EF}{\sin 120^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}EF=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{y^2+yz+z^2}.$$

Tương tự: $PB=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{z^2+zx+x^2}, PC=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+xy+y^2}$.

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh trở thành bất đẳng thức sau:

$$\frac{8\sqrt{3}}{9}\sqrt{\prod\left(y^2+yz+z^2\right)}+\prod x\leq\frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow 8\sqrt{3\prod\left(y^2+yz+z^2\right)}\leq 3\left(1-3\prod x\right)(*).$$

Đặt $\sum yz=m, \prod x=n$, ta có:

$$y^2+yz+z^2=\left(\sum x\right)^2-\left(\sum yz\right)-x\left(\sum x\right)=1-m-x.$$

Tương tự, ta có:

$$z^2+zx+x^2=1-m-y, x^2+xy+y^2=1-m-z.$$

Do đó: $\prod\left(y^2+yz+z^2\right)=\prod(1-m-x)$

$$=(1-m)^3-\left(\sum x\right)(1-m)^2+\left(\sum yz\right)(1-m)-\prod x$$
$$=(1-m)^3-(1-m)^2+m(1-m)-n=m^2-m^3-n.$$

Vậy (*) tương đương với bất đẳng thức sau:

$$8\sqrt{3\left(m^2-m^3-n\right)}\leq 3(1-3n)$$
$$\Leftrightarrow 64\left(m^2-m^3-n\right)\leq 3\left(1-6n+9n^2\right)$$
$$\Leftrightarrow 27n^2+46n+64m^3-64m^2+3\geq 0 \quad (**).$$

Theo bổ đề 2, $0\leq m=\sum yz\leq\frac{1}{3}\left(\sum x\right)^2=\frac{1}{3}$.

Do đó có hai trường hợp xảy ra.

TH1: $0\leq m\leq\frac{1}{4}$. Ta có:

$$27n^2+46n+64m^3-64m^2+3\geq 64m^3-64m^2+3$$
$$=(1-4m)\left(3+12m-16m^2\right)$$
$$=(1-4m)\left[3+8m+4m(1-4m)\right]\geq 0.$$

Vậy (**) đúng. Đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} n=0 \\ m=\frac{1}{4} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0,y=z=\frac{1}{2} \\ y=0,z=x=\frac{1}{2} \\ z=0,x=y=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

TH2: $\frac{1}{4}<m\leq\frac{1}{3}$. Theo bổ đề 2, chú ý rằng $x+y+z=1$, ta có:

$$n=\prod x\geq\prod(1-x)=1-2\sum x+4\sum yz-8\prod x$$
$$=-1+4m-8n.$$

Do đó $n\geq\frac{4m-1}{9}$.

$$27n^2+46n+64m^3-64m^2+3$$
$$\geq\frac{(4m-1)^2}{3}+\frac{46(4m-1)}{9}+(1-4m)\left(3+12m-16m^2\right)$$
$$=\frac{(4m-1)\left(144m^2-96m+16\right)}{9}=\frac{16(4m-1)(3m-1)^2}{9}\geq 0.$$

Vậy (**) đúng. Đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} n=\frac{4m-1}{9} \\ m=\frac{1}{3} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=y=z \\ x=0,y=z=\frac{1}{2} \\ y=0,z=x=\frac{1}{2} \\ z=0,x=y=\frac{1}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow x=y=z.$$

Tóm lại, bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi P là trung điểm

của một trong ba cạnh của tam giác ABC hay P là tâm của tam giác ABC.

Nhận xét. 1) Bài toán này khó, tòa soạn chỉ nhận được ba lời giải nhưng hai lời giải đều sai, chỉ có bạn *Vũ Duy Mạnh*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa** có lời giải đúng.

2) Bài toán trên mở rộng bài toán T12/401: *Cho tam giác đều ABC với bán kính đường tròn ngoại tiếp R và P là điểm nằm trong tam giác. Chứng minh rằng*

$$PA.PB.PA \leq \frac{9R^2}{8}.$$

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/578. *Mỗi lần bơm đưa được* $V_0 = 80\ \text{cm}^3$ *không khí vào ruột xe. Sau khi bơm diện tích tiếp xúc của vỏ xe với mặt đường là* $30\ \text{cm}^2$. *Thể tích của ruột xe sau khi bơm là* $2000\ \text{cm}^3$. *Áp suất khí quyển* $p_0 = 1$ atm. *Trọng lượng xe là* 600 N. *Coi nhiệt độ là không đổi. Tìm số lần bơm.*

Lời giải. Áp suất trong bánh xe khi bơm xong bằng: $p = p_0 + p'$, trong đó:

$$p' = \frac{600}{30.10^{-4}} = 2.10^5 \text{ Pa}.$$

Do đó: $p = 2.10^5 + 10^5 = 3.10^5$ Pa.

Sau n lần bơm có $80n\ \text{cm}^3$ không khí được đưa vào bánh xe. Sau lần bơm thứ nhất trong bánh xe có $2000\ \text{cm}^3$ không khí ở áp suất p_0 nên có thể coi trạng thái 1 ứng với các thông số:

$$p_1 = p_0 = 10^5 \text{ Pa}, V_1 = (2\,000 + 80n)\ \text{cm}^3;$$

trạng thái 2 ứng với thông số:

$$p_2 = 3.10^5 \text{ Pa}, V_2 = 2000\ \text{cm}^3.$$

Áp dụng định luật Bôilơ–Mariôt ta có:

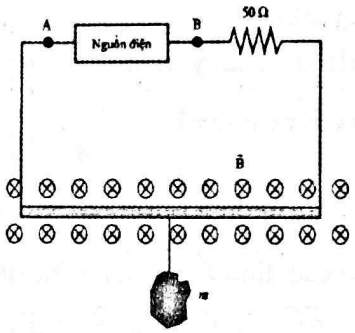
$$p_1V_1 = p_2V_2 \Rightarrow 10^5(2\,000 + 80n) = 3.10^5.2\,000.$$

Từ đó suy ra: $n = 50$ (lần).

Nhận xét. Chúc mừng các bạn sau đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Lê Ánh Dương*, 12 chuyên toán, *Phạm Viết Hoàng*, 11 Toán 2, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**; *Đặng Văn Mạnh*, 11 Toán, *Lê Khánh Hà*, *Trương Khánh Toàn*, *Đinh Văn Trường*, 11 Lý, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/578. *Mạch điện trong hình dưới được sử dụng để chế tạo một "cân từ" có thể xác định trọng lượng các vật. Vật khối lượng m được treo tại trọng tâm của thanh nằm ngang nằm trong một từ trường đều hướng thẳng vào mặt phẳng hình vẽ và có độ lớn* $B = 1{,}5$ T. *Hiệu điện thế của nguồn điện có thể điều chỉnh để làm thay đổi cường độ dòng điện trong mạch và có giá trị tối đa là* 17,5 V. *Thanh nằm ngang có độ dài* $L = 60$ cm *và được làm bằng vật liệu cực nhẹ. Nó được nối với nguồn điện bởi hai dây dẫn treo thẳng đứng rất mảnh, không chịu được lực căng. Toàn bộ trọng lượng của vật phải được cân bằng với lực từ tác dụng lên thanh. Một điện trở* $R = 50\ \Omega$ *được mắc nối tiếp với thanh và điện trở của phần còn lại trong mạch điện nhỏ hơn nhiều so với giá trị này.*



Lấy $g = 10\ \text{m/s}^2$. *Cho biết cực dương của nguồn điện là đầu A hay đầu B. Tính khối lượng lớn nhất mà thiết bị này có thể cân được.*

Lời giải. Để trọng lượng của vật cân bằng với lực từ tác dụng lên thanh thì lực từ tác dụng lên thanh phải có điểm đặt tại trọng tâm của thanh và có phương thẳng đứng chiều hướng từ dưới lên. Như vậy theo quy tắc bàn tay trái ta xác định được chiều của dòng điện chạy qua thanh là từ trái qua phải, tức cực dương của nguồn điện là đầu A và cực âm là đầu B. Nếu trọng lượng của vật cân bằng với lực từ tác dụng lên thanh thì ta có:

$$mg = BIL \Rightarrow m = \frac{BIL}{g} = \frac{BUL}{gR}.$$

$$\Rightarrow m_{\max} = \frac{BU_{\max}L}{gR} = \frac{1{,}5.17{,}5.0{,}6}{10.50} = 0{,}0315 \text{ kg}.$$

Vậy khối lượng lớn nhất mà thiết bị này có thể cân được là 0,0315 kg.

Nhận xét. Chúc mừng các bạn: *Đinh Văn Trường*, *Trương Khánh Toàn*, 11 Lý, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh** đã có lời giải đúng.

NGUYỄN XUÂN QUANG



MỘT SỐ ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC CÁC HÀM SỐ HỌC VÀ ỨNG DỤNG

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(GV THPT chuyên Tiền Giang)

Trong đề thi VMO vài năm gần đây, bài số học thường được cho các hàm số học. Việc sử dụng các đẳng thức và bất đẳng thức các hàm số học rất hữu dụng để giải quyết các bài toán này. Bài viết nhỏ này sẽ minh chứng cho điều đó.

1. CÁC ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CƠ BẢN

a) Các định nghĩa

Với mỗi số nguyên dương n, ta gọi

+ $\tau(n)$ là số các ước nguyên dương của n.

+ $\sigma(n)$ là tổng tất cả các ước nguyên dương của n.

+ $\varphi(n)$ (hàm Euler) là số các số nguyên dương không vượt quá n và nguyên tố cùng nhau với n.

+ $S(n)$ là tổng tất cả các chữ số của n.

b) Các tính chất

Tính chất 1. *Các hàm $\tau(n)$, $\sigma(n)$, $\varphi(n)$ là hàm nhân tính. Tức là: $\forall m,n\in\mathbb{Z}^+,(m,n)=1$ thì*

$$\tau(mn)=\tau(m).\tau(n);$$
$$\sigma(mn)=\sigma(m).\sigma(n);$$
$$\varphi(mn)=\varphi(m).\varphi(n).$$

Tính chất 2. *Nếu số nguyên $n>1$ có phân tích ra thừa số nguyên tố là $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ với $p_1<p_2<\ldots<p_k$ là các số nguyên tố thì*

$$+\tau(n)=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_k).$$

$$+\sigma(n)=\prod_{i=1}^{k}\left(1+p_i+\ldots+p_i^{\alpha_i}\right)=\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{p_i^{\alpha_i}-1}{p_i-1}\right).$$

$$+\varphi(n)=\prod_{i=1}^{k}\left(p_i^{\alpha_i}-p_i^{\alpha_i-1}\right)$$
$$=p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\ldots p_k^{\alpha_k-1}(p_1-1)\ldots(p_k-1)$$
$$=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

2. MỘT SỐ ĐẲNG THỨC CÁC HÀM SỐ HỌC VÀ ỨNG DỤNG

Đẳng thức 1. *Cho $n>1$ là số nguyên dương có $\tau(n)=k$. Gọi $1=d_1<d_2<\ldots<d_k=n$ là tất cả các ước nguyên dương của n. Khi đó*

$$n=d_id_{k+1-i},\ \forall i=1,2,\ldots,k.$$

Thí dụ 1 (Serbia MO 2024 – China 2019). *Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tất cả các ước dương của nó là $1=d_1<d_2<\ldots<d_k=n$, với $k\geq 4$ và thỏa mãn $d_2-d_1,d_3-d_2,\ldots,d_k-d_{k-1}$ lập thành một cấp số nhân.*

Lời giải. Gọi q là công bội của cấp số nhân. Ta có $q\in\mathbb{Q}^+$. Gọi p là ước nguyên tố bé nhất của n. Khi đó $d_2=p$. Ta có:

$$q^{k-2}=\frac{d_k-d_{k-1}}{d_2-d_1}=\frac{n-\frac{n}{d_2}}{d_2-1}=\frac{n}{d_2}=\frac{n}{p}\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow q\in\mathbb{Z}^+.$$

Do đó $n=p.q^{k-2}$. Ta sẽ chứng minh $p=q$. Thật vậy, giả sử $p\neq q$.

+ Nếu q là số nguyên tố thì

$$k=\tau(n)=\tau\left(pq^{k-2}\right)=\tau(p).\tau\left(q^{k-2}\right)=2(k-1)\Rightarrow k=2.$$

Mâu thuẫn.

+ Nếu q là hợp số thì ta xét các trường hợp sau:

TH1: $q=r^s$, trong đó r là số nguyên tố, $s\geq 2$.

Khi đó: $k=\tau(n)=\tau\left(pq^{k-2}\right)>\tau\left(q^{k-2}\right)=\tau\left(r^{s(k-2)}\right)$
$$=s(k-2)+1\geq 2(k-2)+1\Rightarrow k<3.$$

Mâu thuẫn.

TH2: q có ít nhất 2 ước nguyên tố là r,s thì

$$k=\tau(n)=\tau\left(pq^{k-2}\right)>\tau\left(q^{k-2}\right)\geq\tau\left(r^{k-2}.s^{k-2}\right)=(k-1)^2$$

$\Rightarrow k^2-k+1<0$. Mâu thuẫn.

Vậy $p=q$. Do đó $n=p^{k-1}$. Kiểm tra lại ta thấy thỏa mãn.

Thí dụ 2 (USA 2024). *Tìm tất cả các số nguyên $n\geq 3$ sao cho tất cả các ước dương của $n!$ là $1=d_1<d_2<\ldots<d_k=n!$ thỏa mãn*

$$d_2-d_1\leq d_3-d_2\leq\ldots\leq d_k-d_{k-1}.$$

Lời giải. Xét $n=3$ ta có tất cả các ước dương của $3!=6$ là $1;2;3;6$ thỏa mãn vì $2-1=3-2<6-3$.

Xét $n=4$ ta có tất cả các ước dương của $4!=24$ là $1;2;3;4;6;8;12;24$ thỏa mãn vì

$$2-1=3-2=4-3<6-4=8-6<12-8<24-12.$$

Xét $n\geq 5$. Gọi x là số nguyên dương bé nhất mà $x\nmid n!$. Vì $5!\mid n!$ nên $x\geq 7$.

Do tính bé nhất của x nên $x-2\mid n!$ và $x-1\mid n!$.

Suy ra tồn tại chỉ số i sao cho $d_i=x-2, d_{i+1}=x-1$.

Vì $x\nmid n!$ nên $d_{i+2}=x+m$, với $m\in\mathbb{Z}^+$.

Vì $n=d_i d_{k+1-i}=d_{i+1}d_{k-i}=d_{i+2}d_{k-1-i}$ nên

$$d_{k+1-i}=\frac{n!}{d_i}=\frac{n!}{x-2};d_{k-i}=\frac{n!}{x-1};d_{k-1-i}=\frac{n!}{x+m}.$$

Theo đề bài ta có: $d_{k+1-i}-d_{k-i}\geq d_{k-i}-d_{k-1-i}$

$$\Rightarrow\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\geq\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+m}\geq\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{(x-2)(x-1)}\geq\frac{2}{(x+1)(x-1)}\Rightarrow x^2-1\geq 2(x^2-3x+2)$$

$$\Rightarrow x^2-6x+5\leq 0\Rightarrow 1\leq x\leq 5.$$

Điều này mâu thuẫn. Suy ra $n\in\{3;4\}$.

Cách 2. Vì tồn tại các số nguyên liên tiếp là ước của $n!$ nhưng không phải tất cả các số nguyên $\leq n!$ đều là ước của $n!$ nên tồn tại chỉ số i sao cho $d_i+1=d_{i+1}$ và $d_{i+1}+1<d_{i+2}$.

Đặt $x-2=d_i\Rightarrow d_{i+1}=x-1, d_{i+2}=x+m$, với $m\in\mathbb{Z}^+$. Sau đó lí luận như trên.

Đẳng thức 2. *Tích tất cả các ước nguyên dương của số nguyên dương n là* $\prod_{d\mid n}d=\sqrt{n^{\tau(n)}}$.

Chứng minh. $\prod_{d\mid n}d=\sqrt{\left(\prod_{d\mid n}d\right)\cdot\left(\prod_{d\mid n}\frac{n}{d}\right)}=\sqrt{n^{\tau(n)}}$.

Thí dụ 3. *Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tổng và tích tất cả các ước dương của nó lần lượt là $2n$ và n^2.*

Lời giải. Ta có tích tất cả các ước của số nguyên dương n là $\prod_{d\mid n}d=\sqrt{n^{\tau(n)}}=n^2\Rightarrow\tau(n)=4$.

Đặt $a=d_2, b=d_3$. Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases}1+a+b+n=2n\\1.n.a.b=n^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=n-1\\ab=n\end{cases}$$

$$\Rightarrow ab-a-b=1\Rightarrow(a-1)(b-1)=2.$$

Suy ra: $\begin{cases}a-1=1\\b-1=2\end{cases}\vee\begin{cases}a-1=2\\b-1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}\vee\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}$.

Do đó: $n=6$.

Thí dụ 4 (All-Russia MO 2001). *Tồn tại hay không một số nguyên dương sao cho tích các ước thực sự của nó tận cùng bởi đúng 2001 chữ số 0?*

Lời giải. Ta có tích tất cả các ước của số nguyên dương n là $\prod_{d\mid n}d=\sqrt{n^{\tau(n)}}$. Do đó tích các ước thực sự của n bằng $n^{\frac{1}{2}\tau(n)-1}$.

Đặt $\alpha=\frac{1}{2}\tau(n)-1$. Theo giả thiết thì n^α chia hết cho 10^{2001} nên n phải chia hết cho 2 và 5.

Để n^α tận cùng bởi đúng 2001 chữ số 0 thì

$$\alpha v_2(n)=2001 \text{ và } \alpha v_5(n)\geq 2001$$

hoặc $\alpha v_2(n)\geq 2001$ và $\alpha v_5(n)=2001$.

Ta có thể chọn $v_2(n)=v_5(n)=1$ và $\alpha=2001$, khi đó: $\tau(n)=4004=2.2.7.11.13$.

Một số nguyên dương n thỏa mãn các điều kiện như thế là $n=2.5.7^6.11^{10}.13^{12}$.

Đẳng thức 3. *Cho số nguyên $n>1$. Khi đó tổng tất cả các số nguyên dương mà nguyên tố cùng nhau với n bằng* $\frac{n\varphi(n)}{2}$.

Chứng minh. Gọi $a_1,a_2,\ldots,a_{\varphi(n)}$ là tất cả các số nguyên dương mà nguyên tố cùng nhau với n.

Ta thấy nếu $(k,n)=1$ thì $(n-k,n)=1$. Do đó:

$$S=\sum_{i=1}^{\varphi(n)}a_i=\sum_{i=1}^{\varphi(n)}(n-a_i)\Rightarrow 2S=\sum_{i=1}^{\varphi(n)}n=n\varphi(n)\Rightarrow S=\frac{n\varphi(n)}{2}.$$

Thí dụ 5 (Dutch TST 2024). *Với mỗi số nguyên dương n, gọi $\alpha(n)$ là trung bình cộng của tất cả các ước dương của n và $\beta(n)$ là trung bình cộng của tất cả các số nguyên dương k mà nguyên tố cùng nhau với n. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $\alpha(n)=\beta(n)$.*

Lời giải. Với $n=1$ thì hiển nhiên $\alpha(1)=\beta(1)$. Xét $n>1$. Gọi $\tau(n)$ là số các ước nguyên dương của n. Và $\sigma(n)$ là tổng tất cả các ước nguyên dương của n. Ta có: $\alpha(n)=\dfrac{\sigma(n)}{\tau(n)}$ và $\beta(n)=\dfrac{\frac{n\varphi(n)}{2}}{\varphi(n)}=\dfrac{n}{2}$.

Như vậy: $\alpha(n)=\beta(n)\Leftrightarrow\dfrac{\sigma(n)}{\tau(n)}=\dfrac{n}{2}$ (*).

Ta xét các trường hợp sau:

+ TH1: $\tau(n)=2\Rightarrow n$ là số nguyên tố, $\sigma(n)=n+1,\tau(n)=2$. Không thỏa mãn (*).

+ TH2: $\tau(n)=3\Leftrightarrow n=p^2,p\in\wp\Rightarrow\sigma(n)=1+p+p^2$.

Suy ra $(*)\Leftrightarrow\dfrac{1+p+p^2}{3}=\dfrac{p^2}{2}\Leftrightarrow p^2-2p-2=0$.

Không thỏa mãn.

+ TH3: $\tau(n)\geq 4$. Ta thấy nếu $d|n$ thì $\dfrac{n}{d}$ cũng là ước của n.

Với $2\leq d<n, d|n$ thì $d+\dfrac{n}{d}\leq 2+\dfrac{n}{2}\leq 1+n$ (1).

Thật vậy, vì $d<n, d|n$ nên

$$n=kd\geq 2d\ \ (k\in\mathbb{Z},k\geq 2).$$

Do đó: $(2-d)\left(\dfrac{n}{2d}-1\right)\leq 0\Rightarrow 2-d\geq\dfrac{n}{d}-\dfrac{n}{2}$

và $2+\dfrac{n}{2}\leq 1+n\Leftrightarrow n\geq 2$ (đúng). Suy ra:

$$\sigma(n)\leq\frac{\tau(n)}{4}\left(n+1+2+\frac{n}{2}\right)=\frac{\tau(n)}{4}\left(\frac{3n}{2}+3\right)$$

$$\Rightarrow\frac{n}{2}=\frac{\sigma(n)}{\tau(n)}\leq\frac{3n}{8}+\frac{3}{4}\Rightarrow n\leq 6.$$

Vì $\tau(n)\geq 4$ nên $n=6$. Thử lại $\tau(6)=4,\sigma(6)=1+2+3+6=12$. Thỏa mãn (*).

Vậy $n=1$ hoặc $n=6$.

3. MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC CÁC HÀM SỐ HỌC VÀ ỨNG DỤNG

Bất đẳng thức 1. *Cho số nguyên dương $n>1$. Khi đó ta có $\sigma(n)\geq\sqrt{n}.\tau(n)$.*

Chứng minh. Giả sử $\tau(n)=k$ và $1=d_1<d_2<\ldots<d_k=n$ tất cả các ước nguyên dương của n.

Khi đó $\dfrac{n}{d_1}>\dfrac{n}{d_2}>\ldots>\dfrac{n}{d_k}$ cũng là tất cả các ước nguyên dương của n. Do đó:

$$2\sigma(n)=\sum_{i=1}^{k}\left(d_i+\frac{n}{d_i}\right)\geq\sum_{i=1}^{k}2\sqrt{n}=2\sqrt{n}.k=2\sqrt{n}.\tau(n)$$

$$\Rightarrow\sigma(n)\geq\sqrt{n}.\tau(n).$$

Thí dụ 6 (Australia Beginners' Competition 2018). *Tìm tất cả các số nguyên dương x sao cho*

$$\tau(x)\sigma(x)=96.$$

Lời giải. Dễ kiểm tra $x\leq 8$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Xét trường hợp $x\geq 9$. Ta có:

$$\sigma(x)\geq\sqrt{x}.\tau(x)\Rightarrow 96\geq\sqrt{x}.\tau^2(x)\geq 3\tau^2(x)\Rightarrow\tau(x)\leq 5.$$

Mặt khác theo giả thiết thì $\tau(x)|96$, thành thử $\tau(x)\in\{2,3,4\}$.

+ Nếu $\tau(x)=2$ thì x là số nguyên tố và $\sigma(x)=1+x=48$, dẫn tới $x=47$.

+ Nếu $\tau(x)=3$ thì $x=p^2,p\in\wp$ và $\sigma(x)=1+p+p^2=32$. (không có số nguyên tố nào thỏa mãn).

+ Nếu $\tau(x)=4$ thì $\sigma(x)=24$. Khi đó $x=p^3,p\wp$ hoặc $x=pq$, trong đó $p<q$ là hai số nguyên tố.

TH1: $x=p^3\Rightarrow\sigma(x)=1+p+p^2+p^3=24$. Nếu $p\geq 3$ thì $p^3\geq 27>24$ nên $p=2$. Không thỏa mãn.

TH2: $x=pq\Rightarrow\sigma(x)=1+p+q+pq=24$

$\Rightarrow (1+p)(1+q)=24=2.12=3.8=4.6.$

Từ đó suy ra $(p,q)=(2;7),(3;5)\Rightarrow x\in\{14;15\}$.

Vậy tất cả các giá trị cần tìm của x là

$$x\in\{14;15;47\}.$$

Bất đẳng thức 2. *Nếu n là số chính phương lẻ thì*

$$n\geq\tau^2(n).$$

Chứng minh. Vì n là số chính phương lẻ nên $n=p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\ldots p_k^{2\alpha_k}$ với $p_1<p_2<\ldots<p_k$ là các số nguyên tố lẻ, $\alpha_i\in\mathbb{N}$.

Khi đó: $\tau(n)=(1+2\alpha_1)(1+2\alpha_2)\ldots(1+2\alpha_k)$. Ta có:

$$p_i\geq 3\Rightarrow p_i^{\alpha_i}\geq 3^{\alpha_i}=(1+2)^{\alpha_i}\geq 1+2\alpha_i,\forall i=1,2,\ldots,k.$$

Do đó: $\sqrt{n}=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$

$$\geq(1+2\alpha_1)(1+2\alpha_2)\ldots(1+2\alpha_k)=\tau(n)$$

$\Rightarrow n\geq\tau^2(n)$. Dấu "=" xảy ra

$\Leftrightarrow\alpha_i=0,\forall i=\overline{1,k}$ hoặc $\begin{cases}k=1\\ \alpha_1=1\end{cases}\Leftrightarrow n=1$ hoặc $n=9$.

Thí dụ 7 (Canada 1999). *Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n=\tau^2(n)$.*

Lời giải. Vì $n=\tau^2(n)$ nên n là số chính phương. Do đó $\tau(n)$ là số lẻ, suy ra $n=\tau^2(n)$ cũng là số lẻ.

Do đó $n\geq\tau^2(n)$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow n=1$ hoặc $n=9$.

Bất đẳng thức 3. *Nếu n có $k\geq 1$ ước nguyên tố phân biệt thì $n+1\leq\sigma(n)<n(k+1)$.*

Chứng minh. Giả sử phân tích ra thừa số nguyên tố của n là $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, trong đó $p_1<p_2<\ldots<p_k$ là các số nguyên tố và $\alpha_i\in\mathbb{Z}^+$.

Vì n có $k\geq 1$ ước nguyên tố nên $n\geq 2$ và $1,n$ là ước của n nên $\sigma(n)\geq n+1$.

Ta có: $\sigma(n)=\left(1+p_1+\ldots+p_1^{\alpha_1}\right)\ldots\left(1+p_k+\ldots+p_k^{\alpha_k}\right)$.

$$\Rightarrow\frac{\sigma(n)}{n}=\prod_{i=1}^{k}\left(1+\frac{1}{p_i}+\ldots+\frac{1}{p_i^{\alpha_i}}\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{k}\frac{1-\frac{1}{p_i^{\alpha_i+1}}}{1-\frac{1}{p_i}}<\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}.$$

Vì $p_i\geq i+1$ nên

$$\frac{\sigma(n)}{n}<\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}\leq\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-\frac{1}{i+1}}=\prod_{i=1}^{k}\frac{i+1}{i}=k+1$$

$\Rightarrow\sigma(n)<n(k+1)$.

Thí dụ 8 (APMO 2023). *Tìm tất cả các số nguyên dương $n\geq 2$ thỏa mãn $\frac{\sigma(n)}{p(n)-1}=n$ trong đó $\sigma(n)$ là tổng tất cả các ước nguyên dương của n và $p(n)$ là ước nguyên tố lớn nhất của n.*

Lời giải. Giả sử phân tích ra thừa số nguyên tố của n là $=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, trong đó $p_1<p_2<\ldots<p_k$ là các số nguyên tố và $\alpha_i\in\mathbb{Z}^+$. Khi đó $p(n)=p_k$.

Ta có: $\sigma(n)=\left(1+p_1+\ldots+p_1^{\alpha_1}\right)\ldots\left(1+p_k+\ldots+p_k^{\alpha_k}\right)$.

Theo đề bài ta có:

$$p_k-1=\frac{\sigma(n)}{n}<k+1\Rightarrow p_k<k+2.$$

Vì $p_k\geq k+1$ nên $p_k=k+1\Rightarrow\sigma(n)=kn$.

Vì $p_k=k+1$ nên $k\leq 2$.

+ Nếu $k=1$ thì $\sigma(n)=n$. Mâu thuẫn vì $\sigma(n)\geq n+1,\forall n\geq 2$.

+ Nếu $k=2$ thì $p_1=2,p_2=3$ và $\sigma(n)=2n$. Khi đó: $2=\frac{\sigma(n)}{n}=\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{\alpha_1}}\right)\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^{\alpha_2}}\right)$.

Vì $\alpha_1\geq 1,\alpha_2\geq 1$ nên

$$\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{\alpha_1}}\right)\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^{\alpha_2}}\right)\geq\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{3}{2}.\frac{4}{3}=2.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\alpha_1=\alpha_2=1$. Khi đó $n=6$.

Bất đẳng thức 4. *Cho số nguyên dương n. Khi đó ta có $\sigma(n)<n\sqrt{2\tau(n)}$.*

Chứng minh. Đặt $k=\tau(n)$ và gọi $1=d_1<d_2<\ldots<d_k=n$ là tất cả các ước nguyên dương của n.

Ta cần chứng minh:

$$\sigma(n)=\frac{n}{d_1}+\frac{n}{d_2}+\cdots+\frac{n}{d_k}<n\sqrt{2k}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\cdots+\frac{1}{d_k}<\sqrt{2k}.$$

Thật vậy, ta có:

$$\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\cdots+\frac{1}{d_k}\right)^2\le k\left(\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\cdots+\frac{1}{d_k^2}\right)$$

$$\le k\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}\right).$$

Mặt khác ta lại có:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{(k-1)k}$$

$$=2-\frac{1}{k}<2.$$

Do đó: $\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\cdots+\frac{1}{d_k}\right)^2<2k$.

Từ đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Thí dụ 9. *Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn:* $\sigma(n)=n\sqrt{3\tau(n)-8}$.

Lời giải. Ta có:

$$\sigma(n)=n\sqrt{3\tau(n)-8}<n\sqrt{2\tau(n)}\Rightarrow\tau(n)<8.$$

Vì $3\tau(n)-8$ là số chính phương nên $\tau(n)\in\{3;4\}$.

+ Nếu $\tau(n)=3$ thì $\sigma(n)=n$. Loại vì $\sigma(n)\ge n+1$.

+ Nếu $\tau(n)=4$ thì $\sigma(n)=2n$.

Khi đó $n=p^3, p\in\mathbb{P}$ hoặc $n=pq$, trong đó $p<q$ là hai số nguyên tố.

TH1: $n=p^3\Rightarrow\sigma(n)=1+p+p^2+p^3=2p^3$. Phương trình không có nghiệm nguyên.

TH2: $n=pq\Rightarrow\sigma(n)=1+p+q+pq=2pq$

$$\Rightarrow(p-1)(q-1)=2\Rightarrow\begin{cases}p=2\\q=3\end{cases}.$$

Từ đó suy ra $n=6$.

Bất đẳng thức 5. *Cho số nguyên dương n. Khi đó ta có* $\tau(n)\le2\sqrt{n}$.

Chứng minh. Hiển nhiên BĐT đúng với $n=1$.

Với $n>1$, gọi $d_1<d_2<\ldots<d_k$ là các ước không vượt quá $\sqrt{n}$ của n, $d_k\le\sqrt{n}$.

Khi đó các ước lớn hơn hoặc bằng $\sqrt{n}$ là

$$\frac{n}{d_1}>\frac{n}{d_2}>\ldots>\frac{n}{d_k}.$$

Vì $\frac{n}{d_k}\ge\sqrt{n}$ nên số các ước của n là

$$\tau(n)\le2k\le2d_k\le2\sqrt{n}.$$

Thí dụ 10 (VMO 2024). *Với mỗi số nguyên dương n, gọi* $\tau(n)$ *là số các ước nguyên dương của n. Giải phương trình nghiệm nguyên dương* $\tau(n)+2023=n$ *với n là ẩn số.*

Lời giải. Ta có: $\tau(n)\le2\sqrt{n}$. Do đó:

$$n=\tau(n)+2023\le2\sqrt{n}+2023$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{n}-1\right)^2\le2024\Rightarrow n\le2115.$$

Nếu n là số nguyên tố thì $\tau(n)=2\Rightarrow n=2025$ không thỏa mãn. Do đó $\tau(n)\ge3\Rightarrow2026\le n\le2115$.

• Nếu n chẵn thì $\tau(n)$ là số lẻ, do đó n là số chính phương chẵn. Mà

$$44^2<2023<n\le2115<46^2,$$

điều này mâu thuẫn.

• Nếu n lẻ thì $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_s^{\alpha_s}$, trong đó $3\le p_1<p_2<\ldots<p_s$ là các số nguyên tố, $\alpha_i\in\mathbb{Z}^+$.

Vì $3.5.7.11.13>2115$ nên $s\le4$. Ta xét các trường hợp sau:

+ TH1: $s=4$. Vì $3^2.5.7.11>2115$ nên

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\le4\Rightarrow\alpha_1=\ldots=\alpha_4=1\Rightarrow\tau(n)=16.$$

+ TH2: $s=3$. Vì $3^4.5.7>2115$ nên

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\le5.$$

Do đó $(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)=(1;1;1),(1;1;2);(1;2;2),(1;1;3)$ và các hoán vị. Suy ra $\tau(n)\le16$.

+ TH3: $s=2$. Vì $3^6.5>2115\Rightarrow\alpha_1+\alpha_2\le6$

$\Rightarrow \tau(n)=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\le \frac{1}{4}(2+\alpha_1+\alpha_2)^2 \le 16.$

+ TH4: $s=1$. Vì $3^7>2115$ nên $\alpha_1\le 6\Rightarrow \tau(n)\le 7$.

Như vậy, ta luôn có $\tau(n)\le 16\Rightarrow 2027\le n\le 2039$.

Vì n lẻ nên

$n\in\{2027;2029;2031;2033;2035;2037;2039\}$.

Thử lại ta thấy không thỏa mãn.

Bất đẳng thức 6. *Nếu số nguyên dương n có i chữ số thì* $n\ge 10^{i-1}$ *và* $S(n)\le 9i$.

Thí dụ 11. *Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn* $n=2(S(n))^3+8$, *trong đó* $S(n)$ *là tổng các chữ số của n.*

Lời giải. Gọi i là số các chữ số của n. Ta có $n\ge 10^{i-1}$ và $S(n)\le 9i$. Do đó

$$10^{i-1}\le 2(9i)^3+8=1458i^3+8 \quad (*).$$

Xét dãy số $u_k=\frac{10^{k-1}}{k^3}, k\ge 1$.

Ta có: $\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{10k^3}{(k+1)^3}=10\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^3$

$$\ge 10\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=10.\frac{1}{8}>1.$$

Do đó (u_k) là dãy số tăng.

Mà $u_7=\frac{10^6}{7^3}>1459$. Do đó $u_k>1459, \forall k\ge 7$

$\Rightarrow 10^{k-1}\ge 1459k^3=1458k^3+k^3>1458k^3+8, \forall k\ge 7$.

Vì vậy từ (*) suy ra $i\le 6$. Do đó $S(n)\le 9.6=54$.

Vì $n\equiv S(n)(\text{mod}9)$ nên

$$n\equiv 2n^3+8(\text{mod}9)\Rightarrow n(2n^2-1)+8\vdots 9.$$

Suy ra $n\equiv 1(\text{mod}9)$. Do đó:

$$S(n)\equiv 1(\text{mod}9)\Rightarrow S(n)\in\{1;10;19;28;37;46\}.$$

Suy ra:

$$n\in\{10;2008;13726;43912;101314;194680\}.$$

Thử lại ta nhận $n\in\{10;2008;13726\}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. (*Romanian District Olympiad 2024*)

Cho $n>1$ là số nguyên dương. Gọi $1=d_1<d_2<\ldots<d_k=n (k\ge 3)$ là tất cả các ước dương của n. Giả sử rằng phương trình $d_{i+2}x^2-2d_{i+1}x+d_i=0$ có nghiệm thực với mọi $i=1,2,\ldots,k-2$. Chứng minh rằng $n=p^{k-1}$, trong đó p là số nguyên tố.

2. (*Bulgaria MO 2024*)

Một số nguyên dương n được gọi là "tốt" nếu $2|\tau(n)$ và nếu tất cả các ước nguyên dương của n là $1=d_1<d_2<\ldots<d_{2k-1}<d_{2k}=n$ thì $d_{k+1}-d_k=2$ và $d_{k+2}-d_{k-1}=65$. Tìm số nguyên dương n "tốt" bé nhất.

3. (*Kyiv City MO 2024*)

Tìm số nguyên dương n bé nhất sao cho nó có ít nhất 7 ước dương là $1=d_1<d_2<\ldots<d_k=n$, trong đó $k\ge 7$ và thỏa mãn $d_7=2d_5+1$ và $d_7=3d_4-1$.

4. Với mỗi số nguyên dương n, gọi $\tau(n)$ là số các ước nguyên dương của n và $t(n)$ là số các ước nguyên dương d của n sao cho $d+1|n+1$. Tìm giá trị lớn nhất của $2t(n)-\tau(n)$, trong đó $n\in\mathbb{Z}^+$.

5. (*Belaurus MO 1999*)

Cho a và b là các số nguyên dương. Chứng minh nếu tích các ước nguyên dương của a (kể cả 1 và a) bằng tích các ước nguyên dương của b (kể cả 1 và b) thì $a=b$.

6. (*IMO SL 2002*)

Cho số nguyên dương $n\ge 2$, $1=d_1<d_2<\ldots<d_k=n$ là tất cả các ước của n.

Đặt $S=d_1d_2+d_2d_3+\ldots+d_{k-1}d_k$. Chứng minh rằng $S<n^2$. Tìm điều kiện của n để $\frac{n^2}{S}$ là một ước của n.

7. Chứng minh rằng $\varphi(n).\tau(n)\geq n, \forall n\in\mathbb{N}$.

8. a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\geq 2$ thì $\sigma(n)+\varphi(n)\geq 2n$.

b) Cho hai số nguyên dương m và n sao cho $n\geq m!$. Chứng minh rằng $\varphi(n)\geq(m-1)!$.

9. Cho số nguyên dương $n\geq 2$ thỏa mãn

$$\frac{\sigma(n)}{n}=2p(n)-\frac{38}{5}$$

trong đó $\sigma(n)$ là tổng tất cả các ước nguyên dương của n và $p(n)$ là ước nguyên tố lớn nhất của n.

a) Chứng minh rằng $p(n)=5$.

b) Tìm tất cả các số nguyên $n\geq 2$ thỏa mãn hệ thức trên.

10. (*Ireland 1999*) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho: $n=(\tau(n))^4$.

11. Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu $\bar{s}(n)$ là trung bình cộng của tất cả các ước nguyên dương của n (kể cả 1 và n). Chứng minh với mọi số nguyên dương n thì $\sqrt{n}\leq\bar{s}(n)\leq\frac{n+1}{2}$.

12. Với mỗi số nguyên dương k, kí hiệu $S(k)$ là tổng các chữ số của k. Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$ sao cho với mọi số nguyên $n\geq 2023$ thì $P(n)\geq 0$ và $S(P(n))=P(S(n))$.

13. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại số nguyên dương m thỏa mãn

$$m+2S(m)=n,$$

trong đó $S(m)$ là tổng các chữ số của m.

****

PROBLEMS . . .

(*Tiếp theo trang 20*)

Problem T9/582. Given the expression $Q=\frac{36a}{b+c}+\frac{7b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ where a, b, c are real numbers satisfying the conditions $a+b>0$, $b+c>0$, $c+a>0$. Find the value of a when P reaches its minimum value and $a+b+c=1$.

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/582. Given a sequence of polynomials $(P_n(x))_{n=0}^{+\infty}$ satisfying

$P_0(x)=0$, $P_1(x)=x+2$ and

$P_n(x)=2P_{n-1}(x)(P_{n-1}(x)+1)(2P_{n-2}(x)+1)+P_{n-2}(x)$, $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

Prove that for any positive integers k, m, *if* $k|m$ then $P_k(x)|P_m(x)$.

Problem T11/582. Find all strictly increasing functions $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ that satisfy:

$$nf(f(n))=(f(n))^2, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Problem T12/582. Given a scalene triangle ABC inscribed in the circle (O) and circumscribed the circle (I). The lines AI, BI, CI intersect (O) at D, E, F respectively. Denote by D', E', F' the reflection points of D, E, F respectively in BC, CA, AB.

a) Prove that triangles ABC and $D'E'F'$ have the same center of the Euler circles.

b) Suppose that the lines ID', IE', IF' intersect BC, CA, AB at X, Y, Z respectively. Prove that X, Y, Z lie on the same line which is perpendicular to the Euler line of the triangle $D'E'F'$.

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hanoi*)



HỆ THỐNG CHỈNH ÂM: CƠ SỞ TOÁN HỌC CỦA CÁC NỐT NHẠC

NGUYỄN NGỌC KHANG
(12 Toán 1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bà Rịa - Vũng Tàu)

Âm nhạc chưa bao giờ là điều xa lạ đối với con người chúng ta. Từ những giai điệu nguyên thủy của tiếng trống và tiếng sáo đá thời xa xưa cho đến những bản giao hưởng phức tạp hay những bản nhạc quen thuộc, bắt tai ngày nay, âm nhạc luôn hiện hữu như một phần không thể thiếu trong đời sống tinh thần của con người. Chúng ta có thể dễ dàng cảm nhận và phân biệt các nốt nhạc chỉ bằng thính giác, nhưng đã bao giờ bạn tự hỏi: Làm sao để biết chắc khi nào một nốt nhạc được coi là đúng cao độ? Liệu điều đó chỉ đơn thuần dựa trên cảm nhận của con người? Trong bài viết này, chúng ta sẽ cùng khám phá cơ sở vật lý và toán học đằng sau những nốt nhạc quen thuộc và tìm hiểu về hệ thống chỉnh âm Pythagoras – hệ thống chỉnh âm sớm nhất được ghi nhận trong lịch sử loài người, đặt nền móng cho sự phát triển của âm nhạc phương Tây sau này.

1. Những khái niệm quan trọng của hệ thống chỉnh âm

1.1. Dao động, Chu kỳ và Tần số

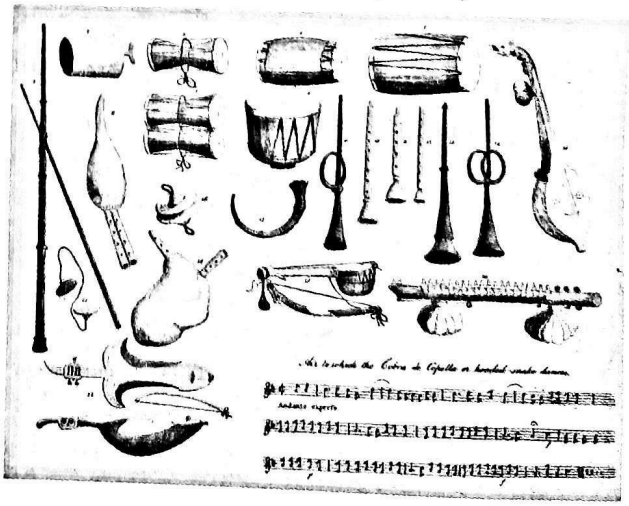
Hầu hết các nốt nhạc được tạo ra bởi một hệ dao động điều hòa hình sin. Chu kỳ của dao động là khoảng thời gian cần thiết để hoàn thành một dao động, và tần số là số lần dao động lặp lại trong một giây. Tần số của dao động là đại lượng quyết định cao độ của nốt nhạc.

1.2. Âm cơ bản, Cao độ, Họa âm và Dãy họa âm

Một âm thanh được tạo ra bởi duy nhất một sóng sin được gọi là âm thuần. Hầu hết các dao động tuần hoàn tạo ra các âm thanh trong tự nhiên đều là tập hợp các âm thuần phát ra cùng lúc. Âm thuần nổi bật nhất được gọi là âm cơ bản, đóng vai trò xác định tần số cơ bản hay cao độ của âm thanh. Những âm còn lại được gọi là họa âm và có tần số liên quan đến tần số cơ bản theo các bội số nguyên.

Một dãy họa âm chứa tất cả các âm thuần có tần số là bội số nguyên của tần số của âm cơ bản. Ví dụ, một tần số cơ bản F có các họa âm với tần số 2F, 3F, 4F, 5F, 6F, ... Âm cơ bản F cũng được gọi là họa âm bậc nhất, 2F là họa âm bậc hai, và cứ tiếp tục như vậy. Cách gọi này cho phép xem xét các đặc điểm của dãy họa âm mà không cần tách biệt âm cơ bản. Một cách gọi khác của các họa âm khác âm cơ bản là âm bồi hoặc sóng thành phần bậc cao. Ví dụ: âm bồi thứ nhất là họa âm bậc hai, âm bồi thứ hai là họa âm bậc ba, và âm bồi thứ n là hoạ âm bậc $n + 1$.

Thông thường, cường độ của các họa âm giảm dần theo thứ tự họa âm. Cường độ tương đối của các họa âm quyết định âm sắc của âm thanh. Nói một cách dễ hiểu hơn, nó là lí do vì sao các nhạc cụ chơi cùng một nốt nhưng lại tạo ra những âm thanh có màu sắc khác nhau (hình 1) .



Hình 1: Các loại nhạc cụ [4]

1.3. Tần số và quãng nhạc

Nếu hai cặp nốt có tỷ lệ tần số của nốt trong cặp giống nhau, cao độ của chúng sẽ được cảm nhận là cách nhau cùng một khoảng bất kể chúng xuất hiện ở đâu trong phổ âm thanh. Điều này xảy ra vì bộ não con người cảm nhận khoảng cách giữa các cao độ theo hàm logarit (giống như hầu hết các giác quan khác), do đó, một tỷ lệ tần số được cảm nhận như một khoảng cách cố định trên thang cao độ. Do đó, tỷ lệ giữa tần số của một nốt so với tần số của nốt khác là cơ sở vật lý của một quãng nhạc trong âm nhạc.

1.4. Lớp cao độ và quãng tám

Nếu hai nốt được phát cùng nhau, trong đó một nốt có tần số gấp đôi nốt còn lại, chúng sẽ tạo ra âm thanh tương đồng đến mức được cảm nhận là "cùng một nốt nhưng khác cao độ". Khoảng cách giữa chúng được gọi là một quãng tám, với tỷ lệ đặc trưng là 2:1.

Từ đó ta có thể suy ra tất cả các nốt có tần số bằng luỹ thừa của 2 nhân với tần số của cùng một âm gốc thì được gọi là thuộc cùng một lớp cao độ và cách nhau bởi một hoặc nhiều quãng tám.

Xét nốt nhạc thứ nhất có tần số cơ bản là F, thì các họa âm của nó sẽ có tần số lần lượt là 2F, 3F, 4F, 5F, 6F, ... Xét một nốt khác có tần số cơ bản cao hơn một quãng tám, tức là 2F, thì các họa âm của nó sẽ có tần số là 4F, 6F, 8F, 10F, 12F, ...

Những tần số này trùng khớp với các họa âm chẵn của dãy họa âm của nốt thứ nhất, do đó tạo ra sự tương đồng trong cảm nhận giữa các nốt thuộc cùng một lớp cao độ (pitch class) và cũng là cơ sở vật lý của quãng tám.

1.5. Họa âm bậc ba và quãng năm

Mối quan hệ giữa một tần số F và tần số gấp đôi nó 2F là quãng tám, 4F lại là một quãng tám tiếp theo. Nhưng còn tần số gấp ba lần tần số cơ bản, 3F, thì sao? Tần số này cao hơn tần số cơ bản khoảng một quãng tám rưỡi và được gọi là quãng mười hai, hay một quãng tám cộng với một quãng năm. Đây là quãng nhạc quan trọng thứ hai sau quãng tám.

Quãng mười hai được biểu diễn bằng tỷ lệ 3:1. Để có được quãng năm, chúng ta cần giảm quãng mười hai này xuống một quãng tám, tức là nhân với 1/2, do đó quãng năm được biểu diễn bằng tỷ lệ 3:2 – tức là ba lần tần số cơ bản nhưng giảm xuống một quãng tám.Từ tỉ lệ trên, ta có thể thấy quãng năm cũng chính là quãng nhạc giữa họa âm bậc hai và họa âm bậc ba trong một dãy họa âm.

1.6. Đảo ngược quãng nhạc và quãng tư

Đảo ngược quãng nhạc là quá trình "trừ" một quãng nhạc khỏi một quãng tám. Do thang cao độ có được tính theo hàm logarit, quá trình "trừ" này thực chất là chia tỷ lệ. Ví dụ: Để "trừ" quãng năm (3:2) khỏi một quãng tám (2:1), bạn chia 2/1 cho 3/2, kết quả là 4/3 – đây là quãng tư.

Trong âm nhạc, các quãng nhạc được đếm theo số bước trên thang âm, bao gồm cả điểm đầu và điểm cuối. Quãng tám được tính là 8 bước, quãng năm được tính là 5 bước. Để đảo ngược quãng năm ta "trừ" nó khỏi quãng tám, ta sẽ thu được quãng tư, tương ứng với 4 bước, vì trong tất cả các quãng, các điểm đầu và cuối đều được tính vào.

1.7. Hòa âm, Bất hòa âm và quãng hoạ âm

Như đã đề cập ở trên, hầu hết các âm thanh không phải là âm thuần mà có chứa nhiều họa âm. Tuy hòa hợp và bất hòa hợp là các khái niệm tương đối, phụ thuộc vào cảm nhận chủ quan của người nghe, các nghiên cứu đã chỉ ra những yếu tố được số đông công nhận có vai trò trong việc tạo nên sự hoà hợp và bất hoà hợp. Khi hai âm thanh được phát cùng nhau:

- Nếu các sóng thành phần bậc cao khớp với nhau, âm thanh sẽ nghe hòa hợp.
- Nếu các tần số không khớp, âm thanh sẽ nghe bất hòa hợp.

Các quãng hòa âm là những quãng giữa hoạ âm trong dãy họa âm. Ví dụ, trong dãy F, 2F, 3F, 4F, 5F, 6F, các quãng như 2:1 (quãng tám), 3:2 (quãng

năm), 4:3 (quãng tư) đều là quãng hòa âm. Do đối với hai nốt nhạc nốt nhạc cách nhau một quãng hòa âm, các họa âm của chúng sẽ trùng khớp với nhau trong cùng một dãy họa âm thứ ba, hai nốt nhạc ấy sẽ ở mức độ nào đó nghe hòa hợp.

Vì cường độ tương đối của các họa âm thường giảm dần khi bậc của chúng tăng lên, nên các họa âm bậc thấp đóng vai trò quan trọng nhất trong việc tạo cảm giác hòa âm dễ chịu (consonance). Quãng nhạc dễ chịu nhất là quãng đồng âm (1:1). Tiếp theo là quãng tám (2:1), rồi đến quãng năm đúng (3:2) và quãng bốn đúng (4:3). Những quãng này được gọi là hòa âm hoàn hảo (perfect consonances) và chúng tạo thành nền tảng cơ bản cho hệ thống lên dây Pythagoras.

2. Hệ thống chỉnh âm Pythagoras

Theo dân gian, Pythagoras xứ Samos – nhà triết học và toán học Hy Lạp cổ đại sống vào thế kỷ thứ 6 trước Công nguyên – đã tìm kiếm một công cụ để đo lường cảm nhận âm thanh, tương tự như cách người ta dùng com-pa để đo hình học hay cái cân để đo khối lượng. Một ngày nọ, khi đi ngang qua xưởng rèn, nơi có bốn (theo một số phiên bản là năm) thợ rèn đang đập kim loại, ông nhận thấy mỗi cú đập phát ra một âm thanh có cao độ khác nhau. Khi nghe cùng nhau, một số âm tạo thành những quãng hòa âm dễ chịu. Ông đã có thể nhận ra được các quãng: quãng tám, quãng năm và quãng bốn. Chỉ có một cặp búa tạo ra quãng nằm giữa quãng bốn và quãng năm (tức quãng hai trưởng) mà ông cảm nhận là chói tai (nghịch tai).

Vô cùng phấn khích, ông chạy vào xưởng rèn để tiến hành các thí nghiệm. Ở đó, ông phát hiện rằng sự khác biệt về cao độ không phụ thuộc vào hình dạng của búa, vị trí của miếng sắt được đập, hay lực tác động của cú đập. Thay vào đó, ông nhận thấy rằng các cao độ này liên quan đến trọng lượng của các chiếc búa, và ông đã đo lường chúng một cách chính xác. Sau đó, ông trở về nhà để tiếp tục các thí nghiệm (hình 2).



Hình 2: Thí nghiệm của Pythagoras trên các nhạc cụ khác nhau [5].

Pythagoras treo bốn sợi dây có độ dài, độ căng và độ xoắn bằng nhau liên tiếp trên một cái chốt được gắn chéo vào góc tường. Ông gắn các vật nặng khác nhau vào đáy của các sợi dây để tạo ra các trọng lượng khác nhau. Sau đó, ông gảy các cặp dây, và nhận thấy những hòa âm giống hệt như trong xưởng rèn.

- Sợi dây chịu tải nặng nhất (12 đơn vị), khi được gảy cùng với sợi dây nhẹ nhất (6 đơn vị), tạo ra một quãng tám. Như vậy, rõ ràng quãng tám dựa trên tỷ lệ 12:6, hay 2:1.
- Sợi dây căng nhất (12 đơn vị) tạo thành quãng năm với sợi dây có tải nhẹ thứ hai (8 đơn vị) và quãng tư với sợi dây căng thứ hai (9 đơn vị). Từ đó, suy ra rằng:
  - Quãng năm dựa trên tỷ lệ 12:8, hay 3:2.
  - Quãng tư dựa trên tỷ lệ 12:9, hay 4:3.

Tiếp tục, ông nhận thấy:

- Tỷ lệ giữa sợi dây căng thứ hai (9 đơn vị) và sợi dây nhẹ nhất (6 đơn vị) là 9:6, hay 3:2, cũng tạo ra một quãng năm.
- Tỷ lệ giữa sợi dây có tải nhẹ thứ hai (8 đơn vị) và sợi dây nhẹ nhất (6 đơn vị) là 8:6, hay 4:3, tạo ra một quãng tư.

Đối với quãng bất hòa giữa quãng năm và quãng tư, Pythagoras phát hiện rằng nó dựa trên tỷ lệ 9:8, trùng khớp với các phép đo trọng lượng mà ông đã thực hiện trong xưởng rèn.

Ông cũng chứng minh rằng quãng tám là kết quả của việc kết hợp quãng năm và quãng tư:

$$3/2 \times 4/3 = 2 \text{ (là một quãng tám).}$$

Pythagoras sau đó mở rộng thí nghiệm của mình với nhiều loại nhạc cụ khác nhau, thử nghiệm với bình chứa, sáo, hình tam giác, đàn Monochord, ... Dù sử dụng công cụ nào, ông luôn tìm thấy các tỷ lệ số học giống nhau.

Với những phát hiện về mối liên hệ giữa tỉ lệ và các nốt nhạc, Pythagoras đã đưa ra cách xây dựng hệ thống chỉnh âm dựa hoàn toàn vào tỉ lệ 2:1 (quãng năm) và tỉ lệ 3:2 (quãng tám), sau này được biết đến rộng rãi với cái tên Hệ thống chỉnh âm Pythagoras.

Hệ thống chỉnh âm Pythagoras dựa trên chuỗi quãng năm đúng (perfect fifths), mỗi quãng năm được điều chỉnh theo tỷ lệ 3:2, tỷ lệ hài hòa nhất chỉ sau 2:1 (quãng tám).

Ví dụ, nếu bắt đầu từ D (Rê) (lên dây dựa trên nốt D), sáu nốt khác được tạo ra bằng cách lặp lại sáu lần tỷ lệ 3:2 đi lên, và năm nốt còn lại được tạo ra bằng cách lặp lại tỷ lệ 3:2 đi xuống:

$$E\flat \to B\flat \to F \to C \to G \to D \to A \to E$$
$$\to B \to F\sharp \to C\sharp \to G\sharp$$

Chuỗi mười một quãng năm đúng này mở rộng qua một phạm vi tần số rất lớn (trên bàn phím piano, nó bao phủ 77 phím). Vì các nốt có tần số chênh lệch theo bội số của 2 cách nhau một hoặc nhiều quãng tám nên là cùng một loại nốt, Pythagoras chia hoặc nhân tần số của một số nốt với một lũy thừa của 2. Mục đích của việc này là đưa 12 nốt vào trong một phạm vi nhỏ hơn, cụ thể là trong khoảng giữa nốt D (Rê) gốc và nốt D (Rê) cao hơn nó một quãng tám (có tần số gấp đôi D gốc).

Cơ sở cho việc chỉ lấy 12 nốt trong một quãng tám là do từ một nốt gốc, sau khi lặp lại 11 lần tỷ lệ 3:2 đi lên thì các nốt thu được đều có thể được phân biệt khá rõ ràng, nhưng khi lặp lại một lần nữa ta được nốt có tỉ lệ $(3/2)^{12}$ so với nốt gốc. Tỉ số này rất gần với 2^7.

Trên thực tế, dù có lặp lại quãng năm bao nhiêu lần đi chăng nữa, cũng không thể nào quay trở lại nốt gốc được, bởi vì phương trình sau không có nghiệm nguyên dương: $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2^y$

Sai số nhỏ xuất hiện khi ta xếp chồng 12 quãng năm đúng (3:2) và so sánh kết quả với 7 quãng tám (2:1) được gọi là Pythagorean Comma.

Điều này dẫn đến hệ quả là không thể có tất cả quãng năm và quãng tám hoàn hảo cùng lúc. Do đó để giữ quãng tám chuẩn, Pythagoras phải hy sinh một quãng năm. Quãng năm bị lệch này được gọi là "Quãng năm Sói" (tên tiếng anh là "Wolf Fifth") và thường bị tránh sử dụng do âm thanh bất hòa hợp mà nó tạo ra.

Ví dụ, đối với cách lên dây dựa trên nốt D (Rê), "Quãng năm Sói" là quãng năm giữa G♯ (Son thăng) và E♭ (Mi giáng), có tỉ lệ 40:27, lệch đi ít nhiều so với tỉ lệ 3:2. Hệ quả của việc này là sự hạn chế trong lựa chọn hợp âm, nốt nhạc, và sự giới hạn trong việc chuyển giọng của những tác phẩm âm nhạc đương thời. Quan trọng hơn, sự xuất hiện của "Quãng năm Sói" khiến cho việc hoà âm trong các tác phẩm âm nhạc cực kì hạn chế. Cũng chính vì vậy mà âm nhạc phương Tây cho đến tận thời Trung cổ - Đầu Phục Hưng vẫn chủ yếu chỉ có một dòng giai điệu duy nhất, không có hợp âm hoặc các bè độc lập khác.

3. Hệ thống chỉnh âm ngày nay

Ngày nay, hệ thống lên dây phổ biến nhất trong âm nhạc là hệ thống chia đều quãng tám thành 12 cung, tên gốc là *12-tone equal temperament* (12-TET). Hệ thống 12-TET chia một quãng tám thành 12 nốt sao cho tỷ lệ tần số giữa hai nốt liền kề luôn giống nhau. Hệ thống này tạo ra các bước cao độ đều nhau bằng cách thay đổi tần số theo hàm logarit, giúp cho các nhạc cụ có thể chơi ở mọi giọng (key) mà không bị sai lệch về cao độ như các hệ thống lên dây trước đó (hình 3).

Note/Interval		Just Intervals	CENTS	"Pythagorean" (True Intervals)	CENTS	Equal Temperament	CENTS
Tonic	C	1	0.00	1	0.00	1	0.00
Minor 2nd	c#	16/15	111.73	256/243	90.22	$2^{1/12}$	100.00
Major 2nd	D	10/9	182.40	9/8	203.91	$2^{1/6}$	200.00
Minor 3rd	e#	6/5	315.64	32/27	294.13	$2^{1/4}$	300.00
Major 3rd	E	5/4	386.31	81/64	407.82	$2^{1/3}$	400.00
Perfect 4th	F	4/3	498.04	4/3	498.04	$2^{5/12}$	500.00
Augmented 4th	f#	45/32	590.22	729/512	611.73	√2	600.00
Diminished 5th	Gb	64/45	609.78	1024/729	588.27		
Perfect 5th	G	3/2	701.96	3/2	701.96	$2^{7/12}$	700.00
Minor 6th	g#	8/5	813.69	128/81	792.18	$2^{2/3}$	800.00
Major 6th	A	5/3	884.36	27/16	905.87	$2^{3/4}$	900.00
Minor 7th	a#	9/5	1017.60	16/9	996.09	$2^{5/6}$	1000.00
Major 7th	B	15/8	1088.27	243/128	1109.78	$2^{11/12}$	1100.00
Octave	C'	2	1200.00	2	1200.00	2	1200.00

Hình 3: Bảng so sánh các hệ thống lên chỉnh âm: just intonation, hệ thống chỉnh âm Pythagoras và equal temperament.[0]

Hệ thống 12-TET giải quyết được các hạn chế của hệ thống chỉnh âm Pythagoras, nhưng đổi lại, tất cả các quãng (trừ quãng tám) đều bị điều chỉnh nhẹ và không hoàn toàn trùng với các tỷ lệ tần số tự nhiên. Tuy nhiên, sự điều chỉnh này không làm biến dạng quá nhiều cao độ của các nốt.

Nhờ vào tính linh hoạt, dễ sử dụng, và phù hợp với nhiều thể loại nhạc, 12-TET đã trở thành tiêu chuẩn toàn cầu trong âm nhạc hiện đại.

4. Lời kết

Từng là tiêu chuẩn trong nhạc phương Tây thời Trung Cổ và Phục Hưng, hệ thống chỉnh âm Pythagoras dần được thay thế bởi các hệ thống được cải tiến hơn, và mới nhất là 12-Tone Equal Temperament (12-TET), hệ thống phổ biến nhất hiện nay. Tuy không còn phù hợp cho âm nhạc hiện đại, hệ thống chỉnh âm Pythagoras vẫn là một phát minh quan trọng trong lịch sử âm nhạc, là hệ thống tiên phong đặt nền móng cho sự nghiên cứu, phát triển và hoàn thiện các Tuning systems sau này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Frazer, Peter A. *The Development of Musical Tuning Systems.* April 2001. https://web.archive.Org/web/20060506221411/http://www.midicode.com/tunings/Tuning10102004.pdf (accessed June 8, 2025).

[2]. Rubinstein, Michael. *Why 12 notes to the Octave?* 2000. https://www.math.uwaterloo.ca/~mrubinst/tuning/12.html#:~:text=The%20Greeks%20realized%20that%20sounds,of%20lengths%20of%20vibrating%20strings (accessed June 6, 2025)

[3]. Schulter, Margo. *Pythagorean Tuning and Medieval Polyphony.* 10 June 1998. https://www.medieval.org/emfaq/harmony/pyth.html (accessed June 8, 2025).

[4]. Wikimedia Commons contributors, "File:A variety of musical instruments; percussion, string and win Wellcome V0040434.jpg," *Wikimedia Commons,* https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:A_variety_of_musical_instruments;_percussion,_string_and_win_Wellcome_V0040434.jpg&oldid=779050168 (accessed June 8, 2025).

[5]. Wikimedia Commons contributors, "File:Gaffurio Pythagoras.png," *Wikimedia Commons,* https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Gaffurio_Pythagoras.png&oldid=972422254 (accessed June 8, 2025).

[6]. Jordi Solà-Soler, "M_Just_Equal_Aristoxenus_Table", Sacred Geometry, http://www.sacred-geometry.es/?q=en/content/proportion-musical-scales.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 123

PROBLEM. *Find the number of natural solutions of the equation* $x+y+z=12$ *with* $x\leq 5$.

Solution. The number of natural solutions, without any restriction, of the equation $x+y+z=12$ is C_{14}^2. This is in fact the Euler candy distribution problem which was mentioned in a previous issue (Can you explain why numbers 14 and 2 appear?).

We are now interested in the solutions with $x\geq 6$. We can take 6 out of 12 and assign it to x. By this way, the problem is reduced to the problem of counting the number of natural solutions of the equation $x+y+z=6$, which is again the Euler candy distribution problem. This number is C_8^2. Then the number of natural solutions of the equation $x+y+z=12$ with $x\leq 5$ is equal to $C_{14}^2-C_8^2$.

***Remark*:** This problem is proposed by teacher Nghiêm Xuân Lực, Thang Long High School, 44 Ta Quang Buu, Bach Mai, Hanoi.

TỪ VỰNG/KÍ HIỆU

natural solution : *nghiệm tự nhiên*

Euler candy distribution problem : *bài toán chia kẹo Euler*

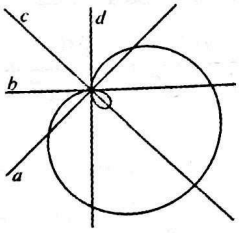
NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 121

BÀI TOÁN. *Đường cong trong hình vẽ được xác định bởi phương trình:*

$$(x^2+y^2-2x)^2=2(x^2+y^2).$$

Hỏi đường thẳng nào trong các đường thẳng a, b, c, d là trục Oy?



Lời giải. Tất cả các số mũ của biến y trong phương trình là chẵn. Vì vậy nếu điểm $(x; y)$ nằm trên đường cong thì điểm $(x; -y)$ cũng nằm trên đường cong. Vì vậy đường cong sẽ đối xứng qua trục Ox. Vì vậy trục Oy sẽ là đường thẳng a.

Chú thích. Bài toán này được đề xuất dựa vào một bài toán trong cuộc thi toán Kangaroo.

Nhận xét. Hoan nghênh các bạn: *Bùi Tùng Lâm*, 11 Toán 1, THPT chuyên **Hà Tĩnh**, *Nguyễn Hùng Cường*, phường An Nhơn, **Gia Lai** đã có bài dịch tốt.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

****

THÔNG BÁO

Bạn đọc có thể đặt mua các ấn phẩm của Tạp chí Toán học và Văn học trong nhà trường tại các bưu cục của VNPT trên cả nước với mã đặt như sau: *Toán học và Tuổi trẻ* (C168); *Toán Tuổi thơ 1* (C169); *Toán Tuổi thơ 2* (C169.1); *Văn học và Tuổi trẻ* (C668); *Văn Tuổi thơ* (C668.1).

****



BÀI TOÁN 102. *Cho ba số thực dương a, b, c và $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha,\beta\geq 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^\alpha}{b^\beta+c^\beta}+\frac{b^\alpha}{c^\beta+a^\beta}+\frac{c^\alpha}{a^\beta+b^\beta}\geq\frac{3\left(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha\right)}{2\left(a^\beta+b^\beta+c^\beta\right)}.$$

Lời giải. Đặt $T=\dfrac{a^\alpha}{b^\beta+c^\beta}+\dfrac{b^\alpha}{c^\beta+a^\beta}+\dfrac{c^\alpha}{a^\beta+b^\beta}$.

Cách 1. Dễ thấy

$$T=\frac{a^{2\alpha}}{a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta}+\frac{b^{2\alpha}}{b^\alpha c^\beta+b^\alpha a^\beta}+\frac{c^{2\alpha}}{c^\alpha a^\beta+c^\alpha b^\beta}.$$

Theo BĐT Schwarz ta có:

$$T\geq\frac{\left(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha\right)^2}{a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta+b^\alpha c^\beta+b^\alpha a^\beta+c^\alpha a^\beta+c^\alpha b^\beta}.$$

Với $a,b,c>0;\alpha,\beta\geq 0$ thì $\left(a^\alpha-b^\alpha\right),\left(a^\beta-b^\beta\right)$ không thể trái dấu nên: $\left(a^\alpha-b^\alpha\right)\left(a^\beta-b^\beta\right)\geq 0$

hay $a^{\alpha+\beta}+b^{\alpha+\beta}\geq a^\alpha b^\beta+a^\beta b^\alpha$.

Tương tự : $b^{\alpha+\beta}+c^{\alpha+\beta}\geq b^\alpha c^\beta+b^\beta c^\alpha$;

$c^{\alpha+\beta}+a^{\alpha+\beta}\geq c^\alpha a^\beta+c^\beta a^\alpha$.

Vậy: $2\left(a^{\alpha+\beta}+b^{\alpha+\beta}+c^{\alpha+\beta}\right)$

$\geq a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta+b^\alpha c^\beta+b^\alpha a^\beta+c^\alpha a^\beta+c^\alpha b^\beta$

$\Leftrightarrow 2\left(a^{\alpha+\beta}+b^{\alpha+\beta}+c^{\alpha+\beta}\right)$

$+2(a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta+b^\alpha c^\beta+b^\alpha a^\beta+c^\alpha a^\beta+c^\alpha b^\beta)$

$\geq 3(a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta+b^\alpha c^\beta+b^\alpha a^\beta+c^\alpha a^\beta+c^\alpha b^\beta)$

$\Leftrightarrow\dfrac{2}{3}\left(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha\right)\left(a^\beta+b^\beta+c^\beta\right)$

$\geq a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta+b^\alpha c^\beta+b^\alpha a^\beta+c^\alpha a^\beta+c^\alpha b^\beta$.

Do đó: $T\geq\dfrac{\left(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha\right)^2}{\frac{2}{3}\left(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha\right)\left(a^\beta+b^\beta+c^\beta\right)}$

hay $T\geq\dfrac{3\left(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha\right)}{2\left(a^\beta+b^\beta+c^\beta\right)}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hoặc $a=b=c$, hoặc $\beta=0$. Bài toán được chứng minh.

Cách 2. Dễ thấy

$$T=\frac{a^{2\alpha}}{a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta}+\frac{b^{2\alpha}}{b^\alpha c^\beta+b^\alpha a^\beta}+\frac{c^{2\alpha}}{c^\alpha a^\beta+c^\alpha b^\beta}.$$

Theo BĐT Schwarz ta có:

$$T\geq\frac{\left(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha\right)^2}{a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta+b^\alpha c^\beta+b^\alpha a^\beta+c^\alpha a^\beta+c^\alpha b^\beta}.$$

Không mất tính tổng quát giả sử: $a\geq b\geq c>0$

$\Rightarrow a^\alpha\geq b^\alpha\geq c^\alpha>0;a^\beta\geq b^\beta\geq c^\beta>0.$

Theo bất đẳng thức Chebyshev thì:

$3\left(a^{\alpha+\beta}+b^{\alpha+\beta}+c^{\alpha+\beta}\right)\geq\left(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha\right)\left(a^\beta+b^\beta+c^\beta\right)$

$\Leftrightarrow 2\left(a^{\alpha+\beta}+b^{\alpha+\beta}+c^{\alpha+\beta}\right)$

$\geq a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta+b^\alpha c^\beta+b^\alpha a^\beta+c^\alpha a^\beta+c^\alpha b^\beta$

$\Leftrightarrow 2\left(a^{\alpha+\beta}+b^{\alpha+\beta}+c^{\alpha+\beta}\right)$

$+2(a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta+b^\alpha c^\beta+b^\alpha a^\beta+c^\alpha a^\beta+c^\alpha b^\beta)$

$\geq 3(a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta+b^\alpha c^\beta+b^\alpha a^\beta+c^\alpha a^\beta+c^\alpha b^\beta)$

$\Leftrightarrow\dfrac{2}{3}\left(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha\right)\left(a^\beta+b^\beta+c^\beta\right)$

$\geq a^\alpha b^\beta+a^\alpha c^\beta+b^\alpha c^\beta+b^\alpha a^\beta+c^\alpha a^\beta+c^\alpha b^\beta$.

Vậy

$$T\geq\frac{\left(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha\right)^2}{\frac{2}{3}\left(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha\right)\left(a^\beta+b^\beta+c^\beta\right)}=\frac{3\left(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha\right)}{2\left(a^\beta+b^\beta+c^\beta\right)}.$$

Cách 3. Để chứng bài toán đề ra ta chứng minh bài toán tương đương sau:

$$\left(a^\beta+b^\beta+c^\beta\right)\left(\frac{a^\alpha}{b^\beta+c^\beta}+\frac{b^\alpha}{c^\beta+a^\beta}+\frac{c^\alpha}{a^\beta+b^\beta}\right)\geq\frac{3\left(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha\right)}{2}$$

hay $\left(\dfrac{a^{\alpha+\beta}}{b^\beta+c^\beta}+\dfrac{b^{\alpha+\beta}}{c^\beta+a^\beta}+\dfrac{c^{\alpha+\beta}}{a^\beta+b^\beta}\right)\geq\dfrac{\left(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha\right)}{2}$.

Không mất tính tổng quát giả sử: $a\geq b\geq c>0$

$\Rightarrow a^\alpha\geq b^\alpha\geq c^\alpha;\dfrac{a^\beta}{b^\beta+c^\beta}\geq\dfrac{b^\beta}{c^\beta+a^\beta}\geq\dfrac{c^\beta}{a^\beta+b^\beta}.$

Theo bất đẳng thức Chebyshev thì:

$$\left(\frac{a^{\alpha+\beta}}{b^\beta+c^\beta}+\frac{b^{\alpha+\beta}}{c^\beta+a^\beta}+\frac{c^{\alpha+\beta}}{a^\beta+b^\beta}\right)\geq\frac{1}{3}\left(\frac{a^\beta}{b^\beta+c^\beta}+\frac{b^\beta}{c^\beta+a^\beta}+\frac{c^\beta}{a^\beta+b^\beta}\right)\left(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha\right).$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Nesbitt ta được:

$$\left(\frac{a^\beta}{b^\beta+c^\beta}+\frac{b^\beta}{c^\beta+a^\beta}+\frac{c^\beta}{a^\beta+b^\beta}\right)\ge\frac{3}{2}.$$

Suy ra: $\left(\frac{a^{\alpha+\beta}}{b^\beta+c^\beta}+\frac{b^{\alpha+\beta}}{c^\beta+a^\beta}+\frac{c^{\alpha+\beta}}{a^\beta+b^\beta}\right)\ge\frac{\left(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha\right)}{2}$.

Cách 4. Đặt $S=a^\beta+b^\beta+c^\beta$.

Để chứng minh đề ra ta chứng minh bài toán tương đương:

$$\frac{2a^{\alpha+\beta}-a^\alpha b^\beta-a^\alpha c^\beta}{2(b^\beta+c^\beta)S}+\frac{2b^{\alpha+\beta}-b^\alpha c^\beta-b^\alpha a^\beta}{2(c^\beta+a^\beta)S}+\frac{2c^{\alpha+\beta}-c^\alpha a^\beta-c^\alpha b^\beta}{2(a^\beta+b^\beta)S}\ge0$$

hay $$\frac{2a^{\alpha+\beta}-a^\alpha b^\beta-a^\alpha c^\beta}{(b^\beta+c^\beta)}+\frac{2b^{\alpha+\beta}-b^\alpha c^\beta-b^\alpha a^\beta}{(c^\beta+a^\beta)}+\frac{2c^{\alpha+\beta}-c^\alpha a^\beta-c^\alpha b^\beta}{(a^\beta+b^\beta)}\ge0\ (1).$$

Bài toán đề ra và (1) đều là bất đẳng thức đối xứng. Không mất tính tổng quát giả sử: $a\ge b\ge c>0$. Khi đó:

$$\begin{cases}2a^{\alpha+\beta}-a^\alpha b^\beta-a^\alpha c^\beta\ge0\ge2c^{\alpha+\beta}-c^\alpha a^\beta-c^\alpha b^\beta\\ 0<\left(b^\beta+c^\beta\right)\le\left(c^\beta+a^\beta\right)\le\left(a^\beta+b^\beta\right)\end{cases}.$$

Suy ra:

$$\frac{2a^{\alpha+\beta}-a^\alpha b^\beta-a^\alpha c^\beta}{(b^\beta+c^\beta)}\ge\frac{2a^{\alpha+\beta}-a^\alpha b^\beta-a^\alpha c^\beta}{(c^\beta+a^\beta)};$$

$$\frac{2b^{\alpha+\beta}-b^\alpha c^\beta-b^\alpha a^\beta}{(c^\beta+a^\beta)}=\frac{2b^{\alpha+\beta}-b^\alpha c^\beta-b^\alpha a^\beta}{(c^\beta+a^\beta)};$$

$$\frac{2c^{\alpha+\beta}-c^\alpha a^\beta-c^\alpha b^\beta}{(a^\beta+b^\beta)}\ge\frac{2c^{\alpha+\beta}-c^\alpha a^\beta-c^\alpha b^\beta}{(c^\beta+a^\beta)}.$$

Cộng theo vế ba BĐT trên sẽ được:

$$\text{VT}(1)\ge\frac{(2a^{\alpha+\beta}-a^\alpha b^\beta-a^\alpha c^\beta)}{(c^\beta+a^\beta)}+\frac{(2b^{\alpha+\beta}-b^\alpha c^\beta-b^\alpha a^\beta)+(2c^{\alpha+\beta}-c^\alpha a^\beta-c^\alpha b^\beta)}{(c^\beta+a^\beta)}.$$

Bất đẳng thức (1) sẽ được chứng minh, nếu chứng minh được:

$$\left(2a^{\alpha+\beta}-a^\alpha b^\beta-a^\alpha c^\beta\right)+\left(2b^{\alpha+\beta}-b^\alpha c^\beta-b^\alpha a^\beta\right)+\left(2c^{\alpha+\beta}-c^\alpha a^\beta-c^\alpha b^\beta\right)\ge0\ (2)$$

hay $$\left(a^{\alpha+\beta}+b^{\alpha+\beta}-a^\alpha b^\beta-a^\beta b^\alpha\right)+\left(b^{\alpha+\beta}+c^{\alpha+\beta}-b^\alpha c^\beta-b^\beta c^\alpha\right)+\left(c^{\alpha+\beta}+a^{\alpha+\beta}-c^\alpha a^\beta-c^\beta a^\alpha\right)\ge0.$$

Nhận thấy: $\left(a^{\alpha+\beta}+b^{\alpha+\beta}-a^\alpha b^\beta-a^\beta b^\alpha\right)$

$$=a^\alpha\left(a^\beta-b^\beta\right)-b^\alpha\left(a^\beta-b^\beta\right)$$

$$=\left(a^\beta-b^\beta\right)\left(a^\alpha-b^\alpha\right)\ge0.$$

Chứng minh tương tự với hai biểu thức còn lại sẽ được (2) đúng. Vậy (1) được chứng minh do đó bài toán đề ra cũng được chứng minh.

Tóm lại: Với ba số thực dương a, b, c và $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha,\beta\ge0$ thì

$$\frac{a^\alpha}{b^\beta+c^\beta}+\frac{b^\alpha}{c^\beta+a^\beta}+\frac{c^\alpha}{a^\beta+b^\beta}\ge\frac{3\left(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha\right)}{2\left(a^\beta+b^\beta+c^\beta\right)}.$$

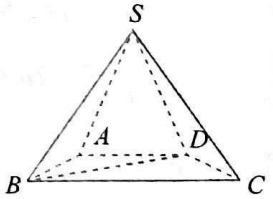
NGÔ VĂN THÁI
(*Hưng Yên*)

Nhận xét. Hoan nghênh bạn *Nguyễn Hùng Cường*, phường An Nhơn, **Gia Lai** đóng góp 4 cách giải, tương tự như những cách giải trên của bạn *Ngô Văn Thái*, người giới thiệu bài toán.

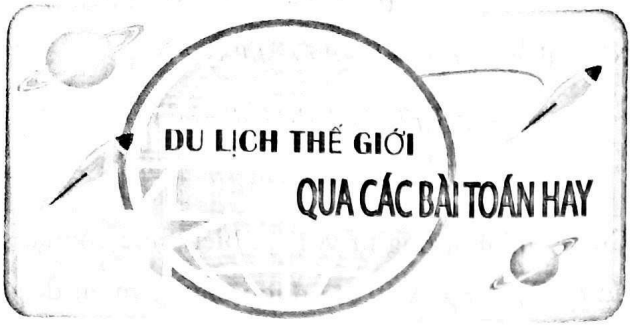
NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 102 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30/11/2025.

BÀI TOÁN 104. *Trong lễ kỷ niệm 60 năm thành lập trường THPT Đô Lương 2, nhà trường tổ chức cho các khối lớp cắm trại. Các trại có dạng hình chóp $S.ABCD$ trong đó đáy $ABCD$ là hình thang cân, đường chéo $BD=8$ m, $BC=2AD$, ΔSBC cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, cạnh SB tạo với mặt đáy góc 45^0. Tính độ dài cạnh đáy AD để phần không gian bên trong trại lớn nhất, lúc đó tính thể tích phần không gian trong trại (tham khảo hình vẽ).*



NGUYỄN ĐÔN
(*GV THPT Đô Lương 2, Nghệ An*)



BÀI TOÁN 110 (Belarus 1999). *Xác định các số có ba chữ số, chia hết cho 11, sao cho thương số trong phép chia số đó cho 11 bằng tổng các bình phương các chữ số của số ấy.*

Lời giải. Gọi số phải tìm là $\overline{abc}$ thì ta có:

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = 11(a^2 + b^2 + c^2) \quad (1)$$

trong đó a, b, c là các số nguyên có giá trị là một trong các số 0, 1, 2, …, 8, 9, ngoài ra $a \neq 0$.

Để ý rằng:

$$100a + 10b + c = 99a + 11b + a - b + c \quad (2).$$

Nên từ (1) và (2) suy ra:

$a - b + c \vdots 11$ hay $a - b + c = 11k, k \in \mathbb{Z}$ (3).

Vì $1 \le a \le 9, 0 \le b, c \le 9$ nên $-8 \le a - b + c \le 18$.

Kết hợp với (3) suy ra $k = 0$ hoặc $k = 1$.

• TH1: $k = 0$. Từ (1) và (2) ta có:

$$99a + 11b = 11(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow 9a + b = a^2 + b^2 + c^2 \quad (4).$$

Do $k = 0 \Leftrightarrow a - b + c = 0 \Leftrightarrow b = a + c$, nên thay vào (4) ta có: $10a + c = 2(a^2 + ac + c^2)$ (5).

Từ (5) suy ra c là số chẵn. Giả sử $c = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, thay vào (5) ta có:

$$a^2 - (5 - 2n)a + 4n^2 - n = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{5 - 2n \pm \sqrt{-12n^2 - 16n + 25}}{2}.$$

Xét tam thức bậc hai: $-12n^2 - 16n + 25$ có các nghiệm là $\frac{4 \pm \sqrt{91}}{6}$, do đó:

$$\frac{-4 - \sqrt{91}}{6} \le n \le \frac{-4 + \sqrt{91}}{6} < 1.$$

Vì n là số nguyên không âm nên $n = 0$.

Suy ra $a = b = 5$. Như vậy ở trường hợp này ta được số 550.

• TH2: $k = 1$. Từ (1) và (2) ta có:

$$99a + 11b + 11 = 11(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow 9a + b + 1 = a^2 + b^2 + c^2 \quad (6).$$

Do $k = 1 \Leftrightarrow a - b + c = 11 \Leftrightarrow b = a + c - 11$, nên thay vào (6) ta có:

$$10a + c - 10 = a^2 + c^2 + (a + c - 11)^2$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2c^2 + 2ac - 32a - 23c + 131 = 0 \quad (7).$$

Từ (7) suy ra c là số lẻ. Giả sử $c = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, thay vào (7) ta được:

$$a^2 - (15 - 2n)a + 4n^2 - 19n + 55 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{15 - 2n \pm \sqrt{-12n^2 + 16n + 5}}{2}.$$

Xét tam thức bậc hai: $-12n^2 + 16n + 5$ có các nghiệm là $\frac{4 \pm \sqrt{31}}{6}$, do đó:

$$\frac{4 - \sqrt{31}}{6} \le n \le \frac{4 + \sqrt{31}}{6} < 2.$$

Vì n là số nguyên không âm nên $n = 0$ hoặc $n = 1$.

Nếu $n = 0$ thì $a = \frac{15 \pm \sqrt{5}}{2}$ là số vô tỷ, trái với điều kiện a là số nguyên.

Nếu $n = 1$ thì $a = \frac{15 - 2 \pm 3}{2} \Rightarrow a = 5$ hoặc $a = 8$.

+ Với $a = 5$ thì $c = 3$ và $b = -3$ (loại).

+ Với $a = 8$ thì $c = 3$, $b = 0$, ta được số 803.

Kết luận: Có hai số cần tìm là: 550 và 803.

Nhận xét. Một số bạn có hướng giải đúng nhưng tính toán nhầm nên chỉ tìm được một số là 550. Hoan nghênh các bạn: *Hồ Đại Việt*, 9A10, THCS Quang Trung, **Lâm Đồng**; *Nguyễn Quốc Bình*, 11A1, TH, THCS&THPT Lê Thánh Tông, **TP. Hồ Chí Minh**; *Nguyễn Hùng Cường*, phường An Nhơn, **Gia Lai** đã có lời giải đúng cho bài toán này.

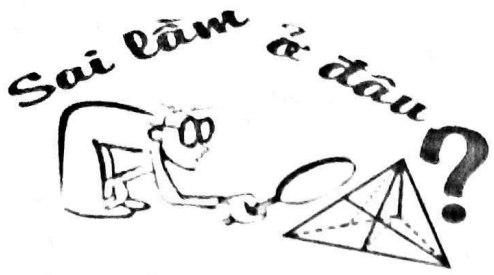
NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30/1/2026.

BÀI TOÁN 112. *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a + c}{b + c} + \frac{b + a}{c + a} + \frac{c + b}{a + b} \le \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

NGÔ VĂN THÁI (*Hưng Yên*)



GIẢI ĐÁP: KẾT QUẢ ĐÃ ĐÚNG CHƯA?

(Đề đăng trên TH&TT số 578, tháng 8 năm 2025)

Phân tích. Ta thấy rằng, đẳng thức

$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{21}{2}=-\frac{21}{2}$ xảy ra khi

$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2=0$ và $\left(y-\frac{9}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{7}{2}, y=\frac{9}{2}$.

Tuy nhiên, $P=-\frac{21}{2}$ xảy ra khi $\left(x+\frac{7}{2}\right)^2=0$,

$\left(y-\frac{9}{2}\right)^2=0$ và $x^2+y^2+4x-8y+13=0$ (*).

Vì $x=-\frac{7}{2}, y=\frac{9}{2}$ không thỏa mãn (*) nên đẳng thức $P=-\frac{21}{2}$ không xảy ra.

Tương tự, $P=\frac{17}{2}$ xảy ra khi $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0$,

$\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=0$ và $x^2+y^2+4x-8y+13=0$. Nhưng hệ này vô nghiệm. Chứng tỏ $P=\frac{17}{2}$ không xảy ra.

Kết luận về giá trị nhỏ nhất, giá trị nhỏ nhất của bạn Hữu Thắng đều không đúng.

Lời giải đúng. Từ $P=3x-y+9$ ta có $y=3x-P+9$ và thế vào đẳng thức $x^2+y^2+4x-8y+13=0$, thu được: $x^2+(3x-P+9)^2+4x-8(3x-P+9)+13=0$

$\Leftrightarrow x^2+9x^2+P^2+81-6Px+54x-18P+4x$
$-24x+8P-72+13=0$

$\Leftrightarrow 10x^2+2(17-3P)x+P^2-10P+22=0$ (*).

Coi (*) là PT bậc hai ẩn x. PT này có nghiệm khi và chỉ khi $(17-3P)^2-10(P^2-10P+22)\geq 0$

$\Leftrightarrow 289-102P+9P^2-10P^2+100P-220\geq 0$

$\Leftrightarrow P^2+2P-69\leq 0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{10}\leq P\leq -1+\sqrt{10}$.

Nếu $P=-1+\sqrt{10}$ thì

$$x=\frac{3P-17}{10}=\frac{3\left(-1+\sqrt{10}\right)-17}{10}=\frac{3\sqrt{10}-20}{10}$$

$$\Rightarrow y=3\frac{3\sqrt{10}-20}{10}-\left(-1+\sqrt{10}\right)+9=4-\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Nếu $P=-1-\sqrt{10}$ thì

$$x=\frac{3P-17}{10}=\frac{3\left(-1-\sqrt{10}\right)-17}{10}=\frac{-3\sqrt{10}-20}{10}$$

$$\Rightarrow y=3\frac{-3\sqrt{10}-20}{10}-\left(-1-\sqrt{10}\right)+9=4+\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Vậy $\min P=-1-\sqrt{10}$, đạt được khi

$$x=\frac{-3\sqrt{10}-20}{10}, y=4+\frac{\sqrt{10}}{10};$$

$\max P=-1+\sqrt{10}$, đạt được khi

$$x=\frac{3\sqrt{10}-20}{10}, y=4-\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Nhận xét. Có một số bạn phát hiện được sai lầm nhưng tính toán bị nhầm nên kết quả tìm ra chưa đúng.

KIHIVI

LỜI GIẢI CÓ ĐÚNG KHÔNG?



BÀI TOÁN. *Trong hệ tọa độ Oxy, cho bất phương trình $2x+y\geq 2$ có miền nghiệm (H). Dựng hình vuông $ABCO$ có cạnh a nằm trong góc phần tư thứ nhất $(x\geq 0, y\geq 0)$. Tìm a để diện tích phần chung giữa miền nghiệm (H) và miền hình vuông $ABCO$ bằng $\frac{1}{4}$.*

(Xem tiếp trang 18)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 582 (12.2025)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142649, 024.35682701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
NGUYỄN TIẾN THANH
Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam
PHẠM VĨNH THÁI
Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD
LÊ HỒNG SƠN

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

***Phụ trách Tạp chí*: TS. LÊ HỒNG MAI** ***Thư kí Tòa soạn*: CN. VÕ THỊ HỒNG THU**

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* TRẦN HỮU NAM, *TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School

Vũ Duy Đĩnh – Một số kỹ thuật sử dụng biệt thức Delta để giải phương trình vô tỷ và phương trình nghiệm nguyên.

8 Hướng dẫn giải đề thi vào lớp 10 THPT chuyên TP. Hà Nội (chuyên Tin), năm học 2025 – 2026.

11 Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên tỉnh Nghệ An, năm học 2025 – 2026.

12 **Diễn đàn dạy học toán**

Phạm Thị Nga – Xây dựng phương pháp giải bài toán đếm lớp 10 trung học phổ thông.

19 **Đề ra kỳ này** *Problems in This Issue*
T1/582, ..., T12/582, L1/582, L2/582.

21 **Giải bài kì trước**
Solutions to Previous Problems
T1/578, ..., T12/578, L1/578, L2/578

31 **Phương pháp giải toán**

Nguyễn Tuấn Ngọc – Một số đẳng thức và bất đẳng thức các hàm số học và ứng dụng.

38 **Toán học và đời sống**

Nguyễn Ngọc Khang – Hệ thống chỉnh âm: Cơ sở toán học của các nốt nhạc.

43 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 123 – Bài dịch số 121.

44 **Nhiều cách giải cho một bài toán** – Giải bài toán 102 – Đề bài toán 104.

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay** – Giải bài toán 110. Đề bài toán 112.

47 **Sai lầm ở đâu?**

***Biên tập*:** KIM THANH, NHƯ HOÀNG
***Trị sự, phát hành*:** TRẦN THỊ MINH HIỀN
***Mĩ thuật*:** QUỐC HIỆP, THANH LONG
***Thiết kế, chế bản*:** MINH HÒA

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM TRAO TẶNG SÁCH GIÁO KHOA CHO HỌC SINH VÙNG LŨ

Từ đầu năm đến nay, tổng kinh phí dành cho công tác xã hội, từ thiện của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) đạt khoảng 5 tỷ đồng, trong đó hơn 117.000 bản sách giáo khoa đã được trao tặng cho học sinh vùng lũ.

Theo báo cáo tổng hợp từ Bộ GD&ĐT và các địa phương, mưa lũ trong tháng 11 đã khiến hơn 1.900 trường và điểm trường phải tạm dừng hoạt động; nhiều nơi ngập sâu gây hư hỏng sách giáo khoa, vở viết và đồ dùng học tập. Một số tỉnh như Khánh Hòa, Đắk Lắk, Quảng Ngãi, Gia Lai và Lâm Đồng chịu thiệt hại đặc biệt lớn về trang thiết bị và cơ sở vật chất trường học.



Ông Nguyễn Mạnh Hùng - Thành viên HĐTV NXBGDVN (thứ hai từ phải qua trái) trao quà cho Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Thái Nguyên

Nhiều học sinh tại các vùng ngập lụt không còn sách vở để tiếp tục học khi trở lại trường. Trước thực tế đó, ngành giáo dục và NXBGDVN đã triển khai nhiều hoạt động hỗ trợ khẩn cấp.



NXBGDVN tặng sách giáo khoa cho các trường vùng bị lũ lụt tỉnh Điện Biên

Đến thời điểm hiện tại, 9 tỉnh đã tiếp nhận sách hỗ trợ gồm: Điện Biên, Nghệ An, Sơn La, Lai Châu, Tuyên Quang, Lạng Sơn, Thái Nguyên, Cao Bằng và Bắc N... Việc phân bổ sách được thực hiện trên cơ sở tổng ... đề xuất của các địa phương và rà soát nhu cầu th... của từng trường học chịu thiệt hại.

Cùng với đó, NXBGDVN đang chuẩn bị các lô ... tiếp theo cho các địa phương vừa chịu ảnh hưởng ... của đợt mưa lũ mới gồm: TP. Huế, Đà Nẵng, Quả... và Đắk Lắk. Trong ngày 25/11, NXBGDVN cũng ... động liên hệ với Khánh Hòa, Quảng Ngãi và Lâm Đồng để rà soát mức độ thiệt hại và tổ chức hỗ trợ kịp thời.

Ngoài sách giáo khoa, NXBGDVN đã dành 1 tỷ đồng tiền mặt để hỗ trợ công tác khắc phục hậu quả mưa lũ tại một số địa phương. Đây là khoản hỗ trợ nhằm giúp các trường sửa chữa cơ sở vật chất, mua sắm các đồ dùng học tập thiết yếu và hỗ trợ khẩn cấp cho học sinh có hoàn cảnh khó khăn.

Tính chung từ đầu năm đến thời điểm hiện tại, tổng kinh phí NXBGDVN dành cho các hoạt động xã hội, từ thiện đã đạt khoảng 5 tỷ đồng, thể hiện sự chủ động và trách nhiệm xã hội của đơn vị đối với cộng đồng.

NXBGDVN khẳng định sẽ tiếp tục phối hợp với ngành giáo dục và các địa phương để rà soát nhu cầu thực tế, bảo đảm việc cung ứng sách giáo khoa đến đúng nơi, đúng đối tượng. Việc hỗ trợ sẽ được triển khai liên tục khi có thông tin về mức độ thiệt hại mới từ các tỉnh, nhằm giúp học sinh vùng lũ sớm ổn định việc học.

"NXBGDVN cam kết dành tổng kinh phí đến 20 tỷ đồng cho chương trình *ủng hộ sách giáo khoa cho học sinh vùng bão lũ, vùng khó khăn* trong năm nay. Các cơ sở giáo dục gặp khó khăn về sách giáo khoa do mưa lũ xin vui lòng gửi công văn về NXBGDVN để chúng tôi tiếp nhận, xem xét và hỗ trợ nhanh nhất có thể" - đại diện NXBGDVN thông tin.

Cũng theo NXBGDVN, với tinh thần "chung tay vì học sinh thân yêu", NXBGDVN cam kết luôn đồng hành, sẻ chia và góp phần giúp học sinh ở mọi miền đất nước được tiếp cận tri thức, dù trong bất kì hoàn cảnh nào.

BAN TRUYỀN THÔNG
(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT12M25
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 12 năm 2025
Giá: 22.000 đồng
Hai mươi hai nghìn đồng