TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

Số 570
Tháng 12 - 2024
ISSN: 2734-9284

VIỆN NGHIÊN CỨU SÁCH VÀ HỌC LIỆU GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 61 - XUẤT BẢN TỪ 1964 - DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT Biên tập: (024) 35121607; ĐT Phát hành: (024) 35142649;
ĐT-Fax Hành chính: (024) 35121606 - Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com - Website: viennghiencuusachgd.com



Nhà toán học người Anh **Augustus De Morgan** (1806 – 1871)

Được quét bằng CamScanner

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM TỔ CHỨC KỈ NIỆM NGÀY NHÀ GIÁO VIỆT NAM 20/11

Sáng 8/11/2024, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (NXBGDVN) tổ chức chương trình Kỉ niệm Ngày Nhà giáo Việt Nam 20/11 và Hội nghị tác giả sách giáo khoa. Đây là hoạt động ý nghĩa nhằm tri ân và vinh danh những nhà giáo dục có đóng góp lớn cho ngành Giáo dục Việt Nam.



NXBGDVN về cơ bản đã hoàn thành việc biên soạn hai bộ sách giáo khoa theo Chương trình Giáo dục phổ thông 2018

Chương trình là hoạt động thường niên để NXBGDVN gặp gỡ và tri ân các nhà giáo, tác giả biên soạn sách giáo khoa, hướng đến kỉ niệm Ngày Nhà giáo Việt Nam 20/11.

Phát biểu tại lễ kỉ niệm, ông Nguyễn Tiến Thanh - Chủ tịch Hội đồng thành viên, Tổng Giám đốc NXBGDVN bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến các tác giả, nhà khoa học và nhà giáo, những người đã cống hiến không ngừng để biên soạn các bộ sách giáo khoa chất lượng, đáp ứng nhu cầu giảng dạy cho hàng triệu học sinh.

Năm nay là cột mốc đặc biệt khi bộ sách giáo khoa mới theo Chương trình Giáo dục phổ thông 2018 được hoàn thiện. Đây cũng là lần đầu tiên sách giáo khoa được xã hội hóa rộng rãi, đòi hỏi sự tâm huyết và nỗ lực từ gần 1000 giáo sư, tiến sĩ, nhà khoa học và nhà giáo khắp cả nước. Với sự đồng lòng và tâm huyết, các nhóm tác giả đã vượt qua khó khăn để mang đến những bộ sách chất lượng, giúp học sinh tiếp cận tri thức một cách gần gũi và hiệu quả.

Với hơn 67 năm gắn bó cùng ngành giáo dục, NXBGDVN luôn giữ vững vai trò tiên phong trong lĩnh vực biên soạn và phát hành, cung cấp tới 75% sách giáo khoa toàn quốc. Tổng Giám đốc NXBGDVN Nguyễn Tiến Thanh cũng khẳng định, chặng đường phía trước còn nhiều thách thức nhưng với tinh thần đoàn kết và sáng tạo, NXBGDVN cam kết sẽ tiếp tục nỗ lực để mang đến cho học sinh, giáo viên những sản phẩm sách tốt nhất, góp phần xây dựng nền giáo dục hiện đại, tiên tiến.

Trình bày báo cáo tổng kết công tác biên soạn sách giáo khoa theo Chương trình Giáo dục phổ thông 2018, TS. Trần Quang Vinh - Phó Tổng biên tập NXBGDVN cho biết, quá trình thẩm định sách giáo khoa của NXBGDVN được thực hiện theo hệ thống quy trình và thủ tục chặt chẽ, đúng quy định của Hội đồng quốc gia thẩm định sách giáo khoa, được Bộ GD&ĐT phê duyệt. Mỗi bộ sách trải qua các bước thẩm định nghiêm ngặt, từ nghiên cứu, phản biện đến báo cáo giải trình, nhằm đảm bảo chất lượng và tính phù hợp của nội dung.

Ngoài việc chú trọng vào các bộ sách giáo khoa chính cho các cấp học, NXBGDVN còn mở rộng biên soạn các sách ngoại ngữ 1 ngoài tiếng Anh như: tiếng Hàn, tiếng Nhật, tiếng Trung, tiếng Pháp và tiếng Nga,... Tính đến nay, NXBGDVN đã hoàn thành biên soạn và phát hành 485 đầu sách giáo khoa từ lớp 1 đến lớp 12. TS. Trần Quang Vinh cho biết thêm, tất cả các sản phẩm sách giáo khoa đều được đăng kí bản quyền, tuân thủ nghiêm ngặt các quy định của Bộ GD&ĐT.

Bên cạnh công tác biên soạn, NXBGDVN cũng đã tổ chức chương trình tập huấn tại các tỉnh thành, nhằm hỗ trợ giáo viên nắm vững nội dung và phương pháp sử dụng sách giáo khoa mới. Các chương trình này giúp giáo viên cập nhật các phương pháp giảng dạy hiệu quả và sử dụng tài liệu giáo dục hiện đại trong quá trình giảng dạy. Trong thời gian tới, NXBGDVN sẽ tiếp tục hoàn thiện và mở rộng các chương trình biên soạn sách giáo khoa, nhằm đáp ứng kịp thời yêu cầu đổi mới giáo dục, đóng góp tích cực vào việc nâng cao chất lượng giáo dục nước nhà.

BAN TRUYỀN THÔNG

(Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam)

Được quét bằng CamScanner



KỸ THUẬT SỬ DỤNG ĐỒNG NHẤT HỆ SỐ TRONG GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

PHẠM VIỆT BẮC
(GV THPT Kỳ Anh, Hà Tĩnh)

Mở đầu. Trong đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán, cũng như các kì thi chọn học sinh giỏi toán lớp 9, lớp 10, các bài toán về hệ phương trình thường xuyên xuất hiện. Phương pháp cơ bản thường sử dụng để giải các hệ phương trình là sử dụng các phép biến đổi đại số, đặt ẩn phụ để đưa về các hệ phương trình cơ bản. Trong quá trình vận dụng các phương pháp trên nhận thấy thường bắt gặp một số khó khăn .

Xuất phát từ thực tiễn trên cũng như mong muốn hình thành cho các em học sinh thêm kĩ năng giải hệ phương trình nên chúng tôi xin giới thiệu với bạn đọc bài viết: "*Kĩ thuật sử dụng đồng nhất hệ số trong giải hệ phương trình*".

Để bắt đầu tìm hiểu kĩ thuật đồng nhất hệ số ta xem một thí dụ sau:

Thí dụ 1. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\sqrt{7x+y}+\sqrt{2x+y}=5\\ x-y+\sqrt{2x+y}=1\end{cases}.$$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}7x+y\ge 0\\ 2x+y\ge 0\end{cases}$.

Ta có: $x-y+\sqrt{2x+y}=1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+y}+\frac{3}{5}(7x+y)-\frac{8}{5}(2x+y)=1.$$

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{7x+y}\ge 0\\ b=\sqrt{2x+y}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=7x+y\\ b^2=2x+y\end{cases}$.

Hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases}a+b=5\\ b+\frac{3}{5}a^2-\frac{8}{5}b^2=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=5-b\\ b+\frac{3}{5}(5-b)^2-\frac{8}{5}b^2=1\end{cases}.$$

Suy ra: $\begin{cases}a=5-b\\ -b^2-5b^2+14=0\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=2\\ a=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7x+y=9\\ 2x+y=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$.

Nhận xét. Phải chăng việc biến đổi để giải được hệ phương trình đã cho là ngẫu nhiên do may mắn hay có một sự suy luận hợp lí nào đó giúp ta có lời giải như trên.

Ta đi phân tích nhận xét và các cơ sở để có định hướng lời giải.

Ta phân tích:

$$x-y=m(7x+y)+n(2x+y)$$
$$=(7m+2n)x+(m+n)y.$$

Suy ra: $\begin{cases}7m+2n=1\\ m+n=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\frac{3}{5}\\ n=-\frac{8}{5}\end{cases}$.

Từ đó ta có: $x-y+\sqrt{2x+y}=1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+y}+\frac{3}{5}(7x+y)-\frac{8}{5}(2x+y)=1.$$

Thí dụ 2. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\sqrt{5x+y}+\sqrt{2x+y}=3 \quad (1)\\ \sqrt{2x+y}+x-y=1 \quad (2)\end{cases}.$$

(Đề thi học sinh giỏi tỉnh Nghệ An, năm 2014).

Phân tích. Ở đây ta chỉ cần biểu thị $x-y$ theo $5x+y$ và $2x+y$. Giả sử:

Được quét bằng CamScanner

$$x-y=m(5x+y)+n(2x+y)$$
$$=(5m+2n)x+(m+n)y$$
$$\Rightarrow\begin{cases}5m+2n=1\\m+n=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=1\\n=-2\end{cases}.$$

Từ đó ta có lời giải.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}5x+y\ge 0\\2x+y\ge 0\end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases}\sqrt{5x+y}+\sqrt{2x+y}=3\\\sqrt{2x+y}+x-y=1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{5x+y}+\sqrt{2x+y}=3\\\sqrt{2x+y}+5x+y-2(2x+y)=1\end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{5x+y}\ge 0\\b=\sqrt{2x+y}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2+5x+y\\b^2=2x+y\end{cases}$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}a+b=3\\b+a^2-2b^2=1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=3-a\\a^2-11a+16=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{11-\sqrt{57}}{2}>0\\b=\dfrac{\sqrt{57}-5}{2}>0\end{cases}$$

(chú ý rằng với $a=\dfrac{11+\sqrt{57}}{2}$ thì

$b=3-a=3-\dfrac{11+\sqrt{57}}{2}=\dfrac{-5-\sqrt{57}}{2}<0$: loại).

Suy ra: $\begin{cases}\sqrt{5x+y}=\dfrac{11-\sqrt{57}}{2}\\\sqrt{2x+y}=\dfrac{41-5\sqrt{57}}{2}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5x+y=\dfrac{89-11\sqrt{57}}{2}\\2x+y=\dfrac{41-5\sqrt{57}}{2}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=8-\sqrt{57}\\y=\dfrac{9-\sqrt{57}}{2}\end{cases}$$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy hệ phương trình có nghiệm là:

$$(x;y)=\left(8-\sqrt{57};\frac{9-\sqrt{57}}{2}\right).$$

Bây giờ ta xét dạng hệ phương trình không chứa căn

Thí dụ 3. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}x^3+y^3=91 & (1)\\4x^2+3y^2=16x+9y & (2)\end{cases}.$$

Lời giải. Nhân hai vế của phương trình (2) với -3 rồi cộng vế theo vế với phương trình (1) ta có:

$$x^3+y^3-12x^2-9y^2=91-48x-27y$$
$$\Leftrightarrow(x-4)^3=(3-y)^3\Leftrightarrow x=7-y.$$

Như vậy ta có: $\begin{cases}x^3+y^3=91\\4x^2+3y^2=16x+9y\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+y^3=91\\x=7-y\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-7y+12=0\\x=7-y\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=4,x=3\\y=3,x=4\end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là:

$$\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases},\ \begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}.$$

Nhận xét. Khó có thể dùng phép thế hoặc đặt ẩn phụ để giải hệ phương trình trên nhưng ta thấy trong hệ phương trình trên các biến x, y trong từng phương trình đứng độc lập và bậc của x, y đều có bậc 3, từ đó ta nghĩ đến việc kết hợp hai phương trình để được phương trình dạng

$$(x+a)^3=(b-y)^3.$$

Nhân phương trình (2) với m rồi cộng vế theo vế với (1) ta có:

$$x^3+y^3-91+m\left(4x^2+3y^2-16x-9y\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x^3+4mx^2-16mx+y^3+3my^2-9my-91=0\ (3);$$

Được quét bằng CamScanner

$$(x+a)^3=(b-y)^3 \Leftrightarrow x^3+3ax^2+3a^2x+y^3 - 3by^2+3b^2y+a^3-b^3=0 \quad (4).$$

Đồng nhất các hệ số của phương trình (3) và (4) ta có: $\begin{cases} a^3-b^3=-91 \\ 3a=4m,\ -3b=3m \\ 3a^2=-16m,\ 3b^2=-9m \end{cases}$ (I)

Giải hệ (I) ta được: $a=-4,\ b=3,\ m=-3$.

Từ quá trình phân tích và tìm các hệ số a, b, c như trên ta có lời giải như đã trình bày.

Để có một cách nhìn rộng hơn về phương pháp hệ số bất định ta xét tiếp bài toán sau:

Thí dụ 4. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^4-y^4=240 & (1) \\ x^3-2y^3=3\left(x^2-4y^2\right)-4(x-8y) & (2) \end{cases}.$$

(Đề thi VMO năm 2010)

Phân tích. Tương tự như bài trên ta có ý tưởng kết hợp hai phương trình trên thành phương trình dạng $(x+a)^4=(y+b)^4$.

Nhân phương trình (2) với c rồi cộng theo vế với phương trình (1) ta có:

$$x^4-y^4-240+c\left[x^3-2y^3-3(x^2-4y^2)+4(x-8y)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x^4+cx^3-3cx^2+4xc=y^4+2cy^3-12cy^2+32cy+240 \quad (3).$$

Mặt khác: $(x+a)^4=(y+b)^4$

$$\Leftrightarrow x^4+4x^3a+6x^2a^2+4xa^3+a^4=y^4+4y^3b+6y^2b^2+4yb^3+b^4 \quad (4).$$

Đồng nhất theo vế hai phương trình (3) và (4) ta có: $\begin{cases} b^4-a^4=240 \\ 4a=c,\ 2a^2=-c,\ a^3=c \\ c=2b,\ -2c=b^2,\ 8c=b^3 \end{cases}$.

Suy ra: $c=-8, a=-2, b=-4$.

Lời giải. Nhân hai vế của phương trình (2) với -8 rồi cộng theo vế với (1) ta có:

$$(x-2)^4=(y-4)^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y-2 \\ x=6-y \end{array}\right.$$

Với $x=y-2$ thay vào (1) ta có:

$$8y^3-24y^2+32y+224=0$$

$$\Leftrightarrow (y+2)\left(8y^2-40y+112\right)=0$$

$$\Leftrightarrow y=-2 \Rightarrow x=-4.$$

Với $x=6-y$ thay vào (1) ta có:

$$y^3-9y^2+36y-44=0$$

$$\Leftrightarrow (y-2)\left(y^2-7y+22\right)=0$$

$$\Leftrightarrow y=2 \Rightarrow x=4.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}, \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$.

Bây giờ ta xét hệ phương trình chứa hạng tử có dạng x^my^n đều có thể giải bằng phương pháp trên không

Thí dụ 5. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^2+2xy+2y^2+3x=0 & (1) \\ xy+y^2+3y+1=0 & (2) \end{cases}.$$

Phân tích. Cả hai phương trình đều có bậc hai và phương trình (2) xuất hiện hạng tử chứa xy, nên sử dụng cách làm như thí dụ trên sẽ gặp khó khăn. Một cách giải thường dùng với loại này là đưa về dạng phương trình bậc hai của $(ax+by)$.

Nhân phương trình (1) với m, phương trình (2) với n rồi cộng theo vế hai phương trình ta có:

$$m\left(x^2+2xy+2y^2+3x\right)+n\left(xy+y^2+3y+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow mx^2+(2m+n)xy+(2m+n)y^2+3(mx+ny)+n=0.$$

Ta tìm các hệ số m, n, k sao cho

$$\Leftrightarrow mx^2+(2m+n)xy+(2m+n)y^2=k(mx+ny)^2 \quad (3).$$

Đồng nhất hệ số hai vế của phương trình (3) ta có:

$$\begin{cases} m=km^2 \\ 2m+n=kn^2 \\ 2m+n=2kmn \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=2m \\ km=1 \\ kn=2 \end{cases}.$$

Đến đây ta có thể chọn $m=1 \Rightarrow n=2$.

Hệ phương trình được giải như sau

Được quét bằng CamScanner

Lời giải. Ta có:

$$\begin{cases} x^2+2xy+2y^2+3x=0 \\ xy+y^2+3y+1=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2xy+2y^2+3x=0 \\ 2xy+2y^2+6y+2=0 \end{cases}.$$

Cộng theo vế của hai phương trình trên ta có:

$$x^2+4xy+4y^2+3x+6y+2=0$$
$$\Leftrightarrow (x+2y)^2+3(x+2y)+2=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x+2y=-1 \\ x+2y=-2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=-2y-1 \\ x=-2y-2 \end{bmatrix}.$$

Với $x=-2y-1$ ta có hệ: $\begin{cases} x=-2y-1 \\ xy+y^2+3y+1=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-1 \\ y^2-2y-1=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y=1+\sqrt{2}, x=-3-2\sqrt{2} \\ y=1-\sqrt{2}, x=-3+2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Với $x=-2y-2$, ta có hệ: $\begin{cases} x=-2y-2 \\ xy+y^2+3y+1=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-2 \\ y^2-y-1=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, x=-3-\sqrt{5} \\ y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, x=-3+\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm $(x;y)$ là: $(-3-2\sqrt{2};1+\sqrt{2}),(-3+2\sqrt{2};1-\sqrt{2})$,

$$\left(-3+\sqrt{5};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),\left(-3-\sqrt{5};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Thí dụ 6. *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases} x^4-4x^2+y^2-6y+9=0 \\ x^2y+x^2+2y-22=0 \end{cases} \text{(I)}.$$

Phân tích. Do bậc của x là bậc 4 để làm bài toán đơn giản hơn và thuận tiện cho quá trình tìm các hệ ta đặt $x^2=t\ (t\ge 0)$, hệ phương trình (I) trở thành:

$$\begin{cases} t^2-4t+y^2-6y+9=0 \\ ty+t+2y-22=0 \end{cases}.$$

Đến đây ta thấy hệ phương trình này tương tự như thí dụ 5.

Bằng cách làm tương tự như trên ta có cách giải vắn tắt như sau:

HDG. Ta có: $\begin{cases} t^2-4t+y^2-6y+9=0 \\ ty+t+2y-22=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2-4t+y^2-6y+9=0 \quad (1) \\ 2ty+2t+4y-44=0 \quad (2) \end{cases}.$$

Cộng theo vế của (1) và (2) ta có:

$$t^2+2ty+y^2-2(t+y)-35=0$$
$$\Leftrightarrow (t+y)^2-2(t+y)-35=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t+y=-5 \\ t+y=7 \end{bmatrix}.$$

Kết hợp với phương trình (1) hoặc (2) ta có nghiệm của hệ (II) là:

$$\begin{cases} t=4 \\ y=3 \end{cases}; \begin{cases} t=2 \\ y=5 \end{cases}.$$

Suy ra nghiệm $(x;y)$ của hệ phương trình trên là:

$$(2;3),(-2;3),\left(-\sqrt{2};5\right),\left(\sqrt{2};5\right).$$

Để kết thúc bài viết, mời bạn đọc luyện tập thêm một số bài tập tương tự.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Giải các hệ phương trình sau

1. $\begin{cases} x^2+2xy+2y^2+3x=0 \\ xy+y^2+3y+1=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x^2+4xy+2y^2+3x+3y-2=0 \\ x^2+y^2+4xy+2y=0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y^2=(4x+4)(4-x) \\ y^2-5x^2-4xy+16x-8y+16=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^4-y^4=1215 \\ 2x^3-4y^3=9(x^2-4y^2)-18(x-8y) \end{cases}$

5. $\begin{cases} \sqrt{4x+y}+\sqrt{2x+y}=2 \\ \sqrt{2x+y}+x+y=1 \end{cases}$

(Đề thi học sinh giỏi tỉnh Nam Định năm 2012).

Được quét bằng CamScanner

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT CHUYÊN BẮC NINH
NĂM HỌC 2024 - 2025

Câu 1. 1) *Tính giá trị của biểu thức*

$$\sqrt{15x^2-2\sqrt{15}x+30}$$

khi $x=\sqrt{15}$.

2) *Cho hai đường thẳng* $d: y=2x-1$ *và* $d': y=x+m$ (m *là tham số*) *cắt nhau tại điểm* A. *Tìm* m *để đoạn thẳng* OA *có độ dài bằng* 1 (O *là gốc toạ độ*).

Lời giải. 2) $m\in\left\{-1;-\dfrac{1}{5}\right\}$.

Câu 2. 1) *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}x^3+xy^2-10y=0\\ x^2+6y^2=10\end{cases}.$$

2) *Giải phương trình*

$$\sqrt{5x^2+4x}-\sqrt{x^2-3x-18}=5\sqrt{x}.$$

Lời giải. 1) $\begin{cases}x^3+xy^2-10y=0\\ x^2+6y^2=10\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+xy^2-\left(x^2+6y^2\right)y=0\\ x^2+6y^2=10\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2y)\left(x^2+xy+3y^2\right)=0\\ x^2+6y^2=10\end{cases}.$$

Từ đó tìm được 2 nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)\in\{(2;1);(-2;-1)\}$.

2) $\sqrt{5x^2+4x}=\sqrt{x^2-3x-18}+5\sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-9x+9-5\sqrt{x(x^2-3x-18)}=0\\ x\ge 6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2(x^2-6x)+3(x+3)-5\sqrt{(x^2-6x)(x+3)}=0\\ x\ge 6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\left(\dfrac{x^2-6x}{x+3}\right)-5\sqrt{\left(\dfrac{x^2-6x}{x+3}\right)}+3=0\\ x\ge 6\end{cases}.$$

Từ đó tìm được 2 nghiệm của phương trình là

$$x=\frac{7+\sqrt{61}}{2}\text{ và }x=9.$$

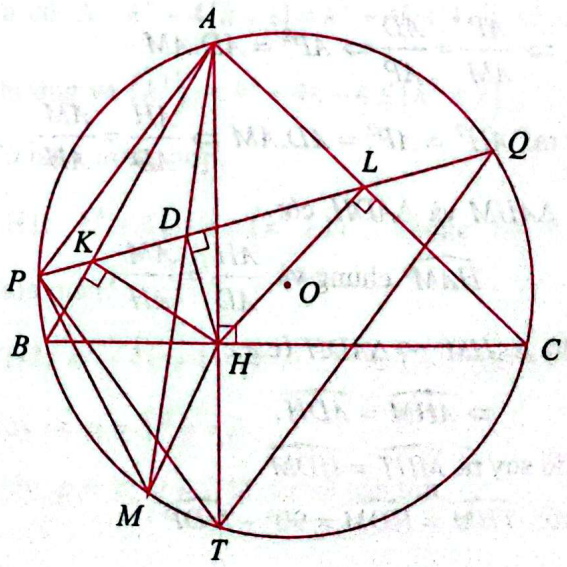
Câu 3. 1) *Cho tam giác* ABC *nhọn không cân, nội tiếp đường tròn* (O), *đường cao* AH ($H\in BC$). *Gọi* K, L *lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ* H *đến* AB *và* AC. *Đường thẳng* KL *cắt đường tròn* (O) *tại hai điểm* P, Q (P *nằm trên cung nhỏ* AB).

a) *Chứng minh* $\overset{\frown}{AKL}=\overset{\frown}{ACB}$ *và* $AP=AQ$.

b) *Đường thẳng* AH *cắt đường tròn* (O) *tại điểm* T ($T\neq A$). *Gọi* D *là chân đường vuông góc kẻ từ* H *đến* KL. *Đường thẳng* AD *cắt đường tròn* (O) *tại* M ($M\neq A$). *Chứng minh* $\widehat{HMT}=90^\circ$.

2) *Cho đoạn thẳng* BC *cố định và một điểm* A *thay đổi sao cho tam giác* ABC *vuông tại* A. *Hai đường phân giác trong của tam giác* ABC *là* BD *và* CE *cắt nhau tại điểm* O. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $\dfrac{BD^2}{BO^2}+\dfrac{CE^2}{CO^2}$.

Lời giải. 1)



Được quét bằng CamScanner

a) • Vì tam giác AHB vuông tại H và có đường cao là HK, nên $AH^2 = AK.AB$ (1) (hệ thức trong tam giác vuông). Tương tự ta có $AH^2 = AL.AC$ (2). Từ (1) và (2) ta được $AK.AB = AL.AC \Rightarrow \dfrac{AK}{AC} = \dfrac{AL}{AB}$ (3).

Xét hai tam giác AKL và ACB có $\widehat{KAL}$ chung và thỏa mãn (3), suy ra:

$$\Delta AKL \backsim \Delta ACB \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{AKL} = \widehat{ACB}.$$

• Từ $\widehat{ACB} = \widehat{AKL} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AQ} + \text{sđ}\overset{\frown}{PB}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AP} + \text{sđ}\overset{\frown}{PB}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AQ} + \text{sđ}\overset{\frown}{PB}\right)$$

$\Rightarrow A$ là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{PQ}$.

Vậy $AP = AQ$.

b) Xét tam giác APK và tam giác ABP có $\widehat{PAB}$ chung và $\widehat{APK} = \widehat{ABP}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau), suy ra:

$$\Delta APK \backsim \Delta ABP \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{AK}{AP}$$

$$\Rightarrow AP^2 = AK.AB \text{ (4)}.$$

Từ (1) và (4) suy ra $AP = AH$.

Xét hai tam giác APD và AMP có:

$\widehat{PAM}$ chung,

$$\widehat{APD} = \widehat{APQ} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AQ} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AP} = \widehat{AMP},$$

do đó $\Delta APD \backsim \Delta AMP$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AP}{AM} = \frac{AD}{AP} \Rightarrow AP^2 = AD.AM.$$

Suy ra: $AH^2 = AP^2 = AD.AM \Rightarrow \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AM}{AH}$.

Xét ΔAHM và ΔADH có:

$\widehat{HAM}$ chung và $\dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AM}{AH}$,

do đó $\Delta AHM \backsim \Delta ADH$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{ADH}.$$

Từ đó suy ra $\widehat{MHT} = \widehat{HDM}$.

Ta có: $\widehat{THM} = \widehat{HDM} = 90° - \widehat{MDP}$

$$= 90° - \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{PM} + \text{sđ}\overset{\frown}{AQ}\right)$$

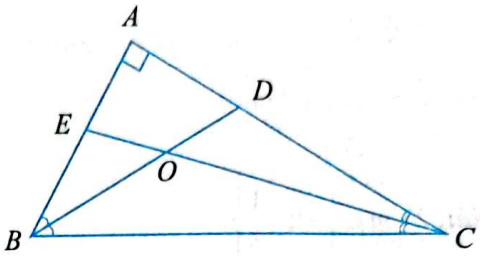
$$= 90° - \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{PM} + \text{sđ}\overset{\frown}{AP}\right)$$

$$= 90° - \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AM}$$

$$= 90° - \widehat{ATM} = 90° - \widehat{HTM}$$

$\Rightarrow \widehat{THM} + \widehat{HTM} = 90° \Rightarrow \widehat{HMT} = 90°$.

2)



Xét ΔABC có BD là đường phân giác trong nên theo tính chất đường phân giác trong:

$$\frac{CD}{AD} = \frac{BC}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{AD + CD} = \frac{BC}{AB + BC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{BC}{AB + BC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{CD}{BC} = \frac{AC}{AB + BC}.$$

Xét ΔBCD có CO là đường phân giác trong nên nên theo tính chất đường phân giác trong:

$$\frac{OD}{OB} = \frac{CD}{BC} = \frac{AC}{AB + BC}$$

$$\Rightarrow \frac{OD + OB}{OB} = \frac{AC + AB + BC}{AB + BC}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{BD}{BO} = \frac{AC + AB + BC}{AB + BC}.$$

Tương tự ta có:

$$\frac{CE}{CO} = \frac{AC + AB + BC}{AC + BC}.$$

Suy ra:

$$\frac{BD}{BO}.\frac{CE}{CO} = \frac{AC + AB + BC}{AB + BC}.\frac{AC + AB + BC}{AC + BC}$$

$$= \frac{(AC + AB + BC)^2}{(AB + BC)(AC + BC)}.$$

Được quét bằng CamScanner

Đặt $BC=a;\ AC=b;\ AB=c.$

Tam giác ABC vuông tại A nên

$$BC^2=AB^2+AC^2$$
$$\Rightarrow a^2=b^2+c^2.$$

Như vậy:

$$\frac{BD}{BO}.\frac{CE}{CO}=\frac{(AC+AB+BC)^2}{(AB+BC)(AC+BC)}$$
$$=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b)(a+c)}$$
$$=\frac{2(a^2+ab+bc+ca)}{a^2+ac+ab+bc}=2.$$

Ta có: $\frac{BD^2}{BO^2}+\frac{CE^2}{CO^2}\geq 2.\frac{BD}{BO}.\frac{CE}{CO}=4$.

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{BD}{BO}=\frac{CE}{CO}\Rightarrow AB=AC.$

Vậy $\min\left(\frac{BD^2}{BO^2}+\frac{CE^2}{CO^2}\right)=4$, đạt được khi ΔABC vuông cân tại A.

Câu 4. 1) *Bạn An tham gia phiên chợ hè trong đó có sử dụng hai loại thẻ: loại thẻ giá 3000 đồng và loại thẻ giá 2000 đồng. Bạn An muốn dùng hết số tiền tiết kiệm của mình để mua x thẻ loại giá 3000 đồng và y thẻ loại giá 2000 đồng. Tìm số cách mua có đủ cả hai loại thẻ nếu tiền tiết kiệm của bạn An là 2024000 đồng.*

2) *Tìm tất cả các số nguyên tố p, q thỏa mãn* $p(p-1)=q(q^2-1).$

Lời giải. 1) Theo đầu bài ta có phương trình:

$$3000x+2000y=2024000$$
$$\Leftrightarrow 3x+2y=2024 \text{ với } x,y\in\mathbb{N}^*.$$

Suy ra: $y=\frac{2024-3x}{2}\geq 1$

$$\Rightarrow 1\leq x\leq\frac{2022}{3}=674.$$

Mặt khác ta có:

$$y=\frac{2024-3x}{2}=\frac{2024-2x-x}{2}$$
$$=1012-x-\frac{x}{2}.$$

Với cả x và y đều là số nguyên dương thì từ đẳng thức trên suy ra x chia hết cho 2, hay $x=2k, k\in\mathbb{N}^*$. Dẫn tới $y=1012-3k$.

Do đó: $1\leq 2k\leq 674\Leftrightarrow 0<k\leq 337.$

Vậy có 337 cặp $(x;y)$ hay có 337 cách mua thẻ thoả mãn điều kiện đầu bài.

2) Nếu $p=q$ thì $p=q=0$ hoặc $p=q=1$, trường hợp này không thoả mãn bài toán.

Do vậy p khác q. Vì p, q là các số nguyên tố nên $p-1\vdots q$, $q^2-1\vdots p$.

Do đó tồn tại các số nguyên dương m, n sao cho $p-1=mq;\ q^2-1=np$.

Thay vào đẳng thức đã cho ta được $m=n$. Do đó tồn tại số nguyên dương k để $\begin{cases}p-1=kq\\q^2-1=kp\end{cases}$.

Thế $p=kq+1$ vào hệ thức $q^2-1=kp$ ta được:

$$q^2-1=k(kq+1)$$
$$\Leftrightarrow q^2-k^2q-k-1=0.$$

Xét phương trình này là phương trình bậc hai ẩn q với k là tham số.

Ta có $\Delta=k^4+4(k+1)=k^4+4k+4$ là số chính phương và $(k^2)^2<k^4+4k+4\leq(k^2+2)^2$.

Có hai trường hợp:

TH1: $k^4+4k+4=(k^2+1)^2$, không có $k\in\mathbb{N}^*$ thoả mãn.

TH2: $k^4+4k+4=(k^2+2)^2\Rightarrow k=1$ (do $k\in\mathbb{N}^*$).

Suy ra $p=3;\ q=2$.

Vậy $p=3;\ q=2$ là các số cần tìm.

Được quét bằng CamScanner

Câu 5. 1) *Cho a, b, c là các số thực không âm và thoả mãn $a^2+b^2+c^2=8$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{2a+c}{1+bc}+\frac{2b+c}{1+ca}.$$

2) *Cho một mảnh giấy hình vuông. Mảnh giấy này được chia thành hai mảnh giấy bằng một đường cắt thẳng. Lấy một trong hai mảnh có được, ta lại làm như trên nhiều lần. Hỏi số lần cắt ít nhất phải là bao nhiêu để có thể nhận được 100 đa giác 20 cạnh.*

Lời giải. 1) Ta có:

$$8+2bc=a^2+b^2+c^2+2bc$$
$$=a^2+(b+c)^2\geq 2a(b+c) \quad (1).$$

Ta sẽ chứng minh $a+b+c\leq 4(1+bc)$ (2).

Thật vậy:

$$(a+b+c)^2\leq 16(1+bc)^2$$
$$\Leftrightarrow 8+2a(b+c)+2bc\leq 16+32bc+16b^2c^2$$
$$\Leftrightarrow 16b^2c^2+30bc+8\geq 2a(b+c).$$

Ta lại có:

$$16b^2c^2+30bc+8-(8+2bc)=16b^2c^2+28bc\geq 0$$

do $b,c\geq 0$ theo giả thiết.

Từ đây và (1) dẫn tới:

$$16b^2c^2+30bc+8\geq 8+2bc\geq 2a(b+c).$$

Vậy BĐT (2) đúng.

Từ (2) suy ra:

$$\frac{2a+c}{1+bc}\leq 4.\frac{2a+c}{a+b+c} \quad (3).$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{2b+c}{1+ca}\leq 4.\frac{2b+c}{a+b+c} \quad (4).$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$P=\frac{2a+c}{1+bc}+\frac{2b+c}{1+ca}\leq 8.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=2$, $c=0$.

Vậy $\max P=8$, đạt được khi $a=b=2$, $c=0$.

2) Giả sử sau n lần cắt ta nhận được 100 đa giác 20 cạnh. Ta thấy sau mỗi lần cắt tổng số đỉnh tăng thêm nhiều nhất là 4. Vậy sau n lần cắt tổng số đỉnh sẽ không quá $4n+4$ đỉnh.

Sau mỗi lần cắt tổng số mảnh giấy sẽ tăng thêm là 1, suy ra sau n lần cắt số mảnh giấy có được là $n+1$ mảnh.

Số mảnh giấy không phải là đa giác 20 cạnh sau n lần cắt là $n+1-100=n-99$.

Tổng số đỉnh trong các mảnh này ít nhất là $3(n-99)$ đỉnh.

Ta có $4n+4\geq 100.20+3(n-99)\Leftrightarrow n\geq 1699$. Do đó số lần cắt không thể ít hơn 1699.

Ta chỉ ra được một cách cắt để thực hiện 1699 lần sẽ tạo được 100 đa giác 20 cạnh thoả mãn bài toán.

Trước hết ta cứ cắt đôi mỗi mảnh giấy thành hai hình chữ nhật khi đó sau 99 lần cắt ta nhận được 100 hình chữ nhật.

Với mỗi hình chữ nhật ta thực hiện tiếp 16 lần cắt liên tiếp để được một đa giác 20 cạnh. Suy ra số cách cắt để được 100 hình đa giác 20 cạnh theo cách này là $99+100.16=1699$. Vậy cần ít nhất 1699 lần cắt để tạo được 100 đa giác 20 cạnh thoả mãn bài toán.

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Giới thiệu

Được quét bằng CamScanner

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TP. QUẢNG NGÃI
NĂM HỌC 2023 - 2024

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Bài 1. *(4,0 điểm)*

1) Tìm tất cả các số có hai chữ số $\overline{ab}$ sao cho $\dfrac{ab}{|a-b|}$ là số nguyên tố.

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$y^2+2xy-5x-6=0.$$

3) Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn

$$a+b=c^3-2024c.$$

Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 6.

Bài 2. *(4,0 điểm)*

1) Cho biểu thức:

$$P=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}-1}+\frac{2}{1-4x}\right).\frac{6\sqrt{x}-9x-1}{1-3\sqrt{x}}$$

với $x\geq 0; x\neq\frac{1}{4}; x\neq\frac{1}{9}$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

2) Cho biết $a=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{16a^8-51a}>\pi \ (\pi \text{ là số pi}).$$

Bài 3. *(4,0 điểm)*

1) Giải phương trình

$$x^2+2022x-2021=2\sqrt{2024x-2023}.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2+y^2+2y=4\\2x+y+xy=4\end{cases}.$$

Bài 4. *(7,0 điểm)*

1) Cho tam giác ABC nhọn có ba đường cao AA', BB', CC'. Trên BB' lấy M, trên CC' lấy N sao cho góc $\widehat{AMC}$ và góc $\widehat{ANB}$ là góc vuông. Chứng minh tam giác $AB'B$ đồng dạng với tam giác $AC'C$ và $AM=AN$.

2) Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính $BC=2R$ và điểm A di động trên đường tròn đó (với A khác B và A khác C). Kẻ đường cao $AH=h$ của ΔABC và bán kính OK vuông góc với BC (K khác phía đối với A, có bờ là BC).

a) Tìm độ dài h để diện tích của ΔAHK đạt giá trị lớn nhất.

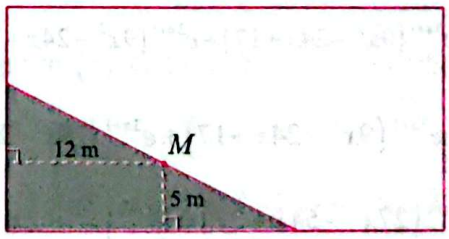
b) Chứng minh rằng khi A di chuyển trên đường tròn $(O; R)$ thì tổng AH^2+HK^2 luôn không đổi.

c) Tính số đo góc $\widehat{ABC}$ của ΔABC khi

$$5AH^2=3HK^2.$$

Bài 5. *(1,0 điểm)*

Tại một góc khu vườn hình chữ nhật, có một cây ăn trái ở vị trí M, khoảng cách từ cây đến hai cạnh lần lượt là 5 mét và 12 mét. Người ta làm hàng rào ngăn cách để làm khu chăn nuôi (phần tô đậm), hàng rào là đoạn thẳng đi qua cây ăn trái và hai đầu đoạn thẳng ở hai cạnh của khu vườn. Hỏi diện tích nhỏ nhất có thể làm khu chăn nuôi là bao nhiêu?



TRƯƠNG QUANG AN

(Xã Nghĩa Thắng, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Giới thiệu

Được quét bằng CamScanner

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 1
THỬ SỨC TRƯỚC KỲ THI THPT QUỐC GIA NĂM 2025

PHẦN I. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

1. B	2. D	3. C	4. D	5. A	6. A
7. C	8. C	9. C	10. D	11. B	12.A

Câu 1. Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 2a$. Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $A(2;-2)$ nên ta có:

$$y'(2) = 0 \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Do đồ thị qua $A(2;-2) \Rightarrow -2 = 8 - 12 + b \Leftrightarrow b = 2$

Vậy $a + b = 2$. Chọn **B.**

Câu 2.

3,5	2
4,5	7
5,5	21
6,5	26
7,5	29
8.5	12
9,5	3

Số trung bình của mẫu số liệu:

$$\frac{3,5\times 2 + 4,5\times 7 + 5,5\times 21 + 6,5\times 26}{100} + \frac{7,5\times 29 + 8,5\times 12 + 9,5\times 3}{100} = 6,71.$$

Chọn **D.**

Câu 3. $F'(x) = \left(\frac{1}{27}e^{3x+1}\left(9x^2 - 24x + 17\right)\right)'$

$$= \frac{1}{27}\left[3.e^{3x+1}\left(9x^2 - 24x + 17\right) + e^{3x+1}\left(9x^2 - 24x + 17\right)'\right]$$

$$= \frac{1}{27}\left[3.e^{3x+1}\left(9x^2 - 24x + 17\right) + e^{3x+1}\left(18x - 24\right)\right]$$

$$= \frac{1}{27}e^{3x+1}\left(27x^2 - 54x + 27\right) = e^{3x+1}\left(x^2 - 2x + 1\right).$$

Chọn **C.**

Câu 4. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2;-3;4)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng (d). Loại đáp án **A, B.**

Thế tọa độ điểm A vào phương trình đường thẳng

$$(d): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 - 3t \\ z = -7 + 4t \end{cases} \text{ ta có: } \begin{cases} 1 = -1 + 2t \\ 2 = 5 - 3t \\ -3 = -7 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

$\Rightarrow A \in (d)$. Chọn **D.**

Câu 5. $P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5.$

Chọn **A.**

Câu 6. Ta có: $f'(t) = 12t^2 - 2t^3$

$\Rightarrow f''(t) = 24t - 6t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ (do $t > 0$)

$\Rightarrow$ hàm số $f'(t)$ đạt cực đại cũng là GTLN tại $t = 4$. Chọn **A.**

Câu 7.

- Tại thời điểm $t = 6$ vật đang chuyển động với vận tốc v_0 nên có:

$$v(6) = v_0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}.6 + a = v_0 \Leftrightarrow a = v_0 + 15$$

suy ra $v(t) = -\frac{5}{2}t + v_0 + 15.$

- Gọi k là thời điểm vật dừng hẳn, vậy ta có:

$$v(k) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{5}.(v_0 + 15)$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{2v_0}{5} + 6.$$

- Tổng quãng đường vật đi được là:

$$80 = 6.v_0 + \int_6^k \left(-\frac{5}{2}t + v_0 + 15\right)dt$$

$$\Leftrightarrow 80 = 6.v_0 + \left(-\frac{5}{4}t^2 + v_0.t + 15t\right)\Big|_6^k$$

$$\Leftrightarrow 80 = 6.v_0 - \frac{5}{4}(k^2 - 6^2) + v_0.(k - 6) + 15(k - 6)$$

$$\Leftrightarrow 80 = 6.v_0 - \frac{5}{4}\left(\frac{4(v_0)^2}{25} + \frac{24v_0}{5}\right) + v_0.\frac{2v_0}{5} + 15.\frac{2v_0}{5}$$

$$\Leftrightarrow (v_0)^2 + 36.v_0 - 400 = 0 \Leftrightarrow v_0 = 10.$$ Chọn **C.**

Được quét bằng CamScanner

Câu 8. Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Đạo hàm:

$$y'=\frac{-x^2+4x+2m+1}{(2-x)^2}=\frac{g(x)}{(2-x)^2}.$$

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó khi $y'\le 0,\forall x\in D$

$$\Leftrightarrow g(x)=-x^2+4x+2m+1\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Delta'\le 0\Leftrightarrow 4-(-1).(2m+1)\le 0$$

$$\Leftrightarrow 2m+5\le 0\Leftrightarrow m\le -\frac{5}{2}.$$

Chọn **C.**

Câu 9. Đường thẳng d đi qua A nên $d(B;d)\le BA$, do đó khoảng cách từ B đến d lớn nhất khi $AB\perp d\Rightarrow \vec{u}\perp\overrightarrow{AB}$, với $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của d.

Lại có d song song với (P) nên $\vec{u}\perp\overrightarrow{n_{(P)}}$.

$\overrightarrow{AB}=(4;-1;2)$, $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;-2;2)$,

chọn $\vec{u}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_{(P)}}\right]=(2;-6;-7)$. Do đó phương trình đường thẳng d là $\frac{x+3}{2}=\frac{y}{-6}=\frac{z-1}{-7}$.

Chọn **C.**

Câu 10. Ta có:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2+(2x+\cos x)\cos x+1-\sin x}{x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(x+\cos x)^2+1-\sin x}{x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x+\cos x+\frac{1-\sin x}{x+\cos x}\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+\sin x+\ln|x+\cos x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi^2}{8}+1+\ln\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{8}+1-\ln\frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{8},b=1,c=2\Rightarrow P=ac^3+b=\frac{1}{8}.8+1=2.$$

Chọn **D.**

Câu 11. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3+3x^2-1=k(x+2)+3$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^2+x-2)=k(x+2)$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-2\\x^2+x-2-k=0\quad(2)\end{bmatrix}.$$

Đường thẳng $y=k(x+2)+3$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-1$ tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow(2)$ có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=1+4(2+k)>0\\(-2)^2-2-2-k\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k>-\frac{9}{4}\\k\ne 0\end{cases}\quad(*).$$

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của (2), theo hệ thức Viète thì $\begin{cases}x_1+x_2=-1\\x_1x_2=-k-2\end{cases}$.

Ta có: $y'=3x^2+6x\Rightarrow\begin{cases}y'(-2)=0\\y'(x_1)=3x_1^2+6x_1\\y'(x_2)=3x_2^2+6x_2\end{cases}$.

Theo bài ra ta có:

$$\begin{bmatrix}y'(-2).y'(x_1)=-1\\y'(-2).y'(x_2)=-1\\y'(x_1).y'(x_2)=-1\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow(3x_1^2+6x_1)(3x_2^2+6x_2)=-1$$

$$\Leftrightarrow 9(x_1x_2)^2+18x_1x_2(x_1+x_2)+36x_1x_2=-1$$

$$\Leftrightarrow 9(k+2)^2+18(k+2)-36(k+2)=-1$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{-3\pm 2\sqrt{2}}{3}.$$

Kết hợp với $(*)$ ta được $k=\frac{-3\pm 2\sqrt{2}}{3}$ thỏa mãn.

Chọn **B.**

Câu 12. Ta có: $x^2-xy+y^2=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1+xy$

$$\Leftrightarrow x^4+y^4+2x^2y^2=x^2y^2+2xy+1$$

$$\Leftrightarrow x^4+y^4=-x^2y^2+2xy+1.$$

Do đó $P=\frac{-x^2y^2+2xy+1}{xy+2}$.

Được quét bằng CamScanner

Lại có: $x^2+y^2=1+xy\ge 2xy\Rightarrow xy\le 1$;

$$x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy=1$$

$$\Rightarrow (x+y)^2=1+3xy\ge 0\Leftrightarrow xy\le -\frac{1}{3}.$$

Đặt $xy=t\Rightarrow P=\dfrac{-t^2+2t+2}{2+t}$, với $t\in\left[-\dfrac{1}{3};1\right]$.

Ta có:

$$P'=\frac{(-2t+2)(2+t)-(-t^2+2t+2)}{(2+t)^2}=\frac{-t^2-4t+2}{(2+t)^2}$$

$$P'=0\Leftrightarrow -t^2-4t+2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2+\sqrt{6}\ \text{(thỏa mãn)} \\ t=-2-\sqrt{6}\ \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Ta có: $P\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{11}{15}$; $P(1)=1$;

$$P(-2+\sqrt{6})=6-2\sqrt{6}.$$

Do đó: $m=\min P=\dfrac{11}{15}$; $M=\max P=6-2\sqrt{6}$.

Vậy $A=6-2\sqrt{6}+11=17-2\sqrt{6}$. Chọn **A.**

PHẦN II. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1. a) Đúng; b) Đúng; c) Sai; d) Đúng.

ĐK: $x^2-5x+7>0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ (*).

Khi đó: $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+7)\ge 0$

$$\Leftrightarrow x^2-5x+7\le\left(\frac{1}{3}\right)^0$$

$$\Leftrightarrow x^2-5x+6\le 0\Leftrightarrow 2\le x\le 3.$$

Kết hợp với điều kiện (*), ta được nghiệm của bất phương trình là $2\le x\le 3$.

Câu 2. a) Sai; b) Sai ; c) Sai; d) Đúng.

a) Hàm số có tập xác định là $[0;32]$.

b) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{32-x}}$.

c) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{32-x}}=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{32-x}=\sqrt{x}\Leftrightarrow x=16.$$

d) Hàm số đồng biến trên $(0;16)$ và nghịch biến trên $(16;32)$ và có:

$$f(16)=8;\ f(0)=f(32)=4\sqrt{2}.$$

Do đó: $\max f(x)=f(16)=8$;

$$\min f(x)=f(0)=4\sqrt{2}.$$

Vậy $\dfrac{m}{M}=\dfrac{4\sqrt{2}}{8}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 3. a) Đúng; b) Sai ; c) Sai; d) Đúng.

a) Diện tích đáy nhỏ là 16 dm^2.

b) Diện tích của đáy lớn là 36 dm^2.

c) Chiều cao của khối bê tông là 4 dm hay 40 cm.

d) Thể tích của khối bê tông (làm tròn đến hàng đơn vị của dm^3) là 101 dm^3.

$$V=\frac{1}{3}.4.(36+\sqrt{36.16}+16)=\frac{304}{3}\approx 101\ (dm^3).$$

Câu 4. a) Đúng; b) Đúng; c) Sai; d) Sai.

a) $\forall x\ne -1: f'(x)=\dfrac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$

b) Hàm số có cực đại tại $x=2$; có cực tiểu tại $x=0$. Đồ thị hàm số có điểm cực đại $A(-2;m-8)$; điểm cực tiểu $A(0;m)$.

c) Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị $y=4x+m$.

d) Đường thẳng (d) qua $A(0;1)$ với hệ số góc k có phương trình $y=kx+1$.

(d) không tiếp xúc với đồ thị hàm số đã cho khi

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2+mx+m}{x+1}=kx+1 & (1) \\ \dfrac{2x^2+4x}{(x+1)^2}=k & (2) \end{cases}$$ vô nghiệm.

Thay (2) vào (1) ta có:

$$(m-3)x^2+2(m-1)x+m-1=0\quad (3).$$

Dễ thấy $m=3$ phương trình (3) có nghiệm

$$x=\frac{-1}{2}\Rightarrow m=3\ (\text{loại})$$

Được quét bằng CamScanner

Xét $m \neq 3$, (d) không tiếp xúc với đồ thị hàm số đã cho khi và chỉ khi phương trình (3) vô nghiệm hoặc (3) có nghiệm kép $x=-1$

hay $\left[\begin{array}{l}\Delta'=(m-1)^2-(m-1)(m-3)<0 \\ \begin{cases}\Delta'=0 \\ m-3-2(m-1)+m+1=0\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m-1<0 \\ \begin{cases}\Delta'=2(m-1)=0 \\ 0=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m-1<0 \\ m=1\end{array}\right. \Leftrightarrow m \leq 1.$

PHẦN III. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

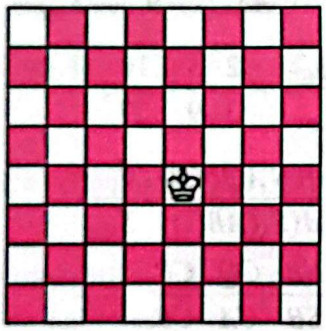
Câu 1. *Đáp số*: 45.

Gọi O là hình chiếu của S trên mặt phẳng $ABCD$, O là tâm hình vuông $ABCD$. Tam giác SAC cân tại S. Ta có: $SA^2+SC^2=AB^2+BC^2=AC^2$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại S.

Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\widehat{SAO}=\widehat{SAC}=45^0$. Vậy $n=45^0$.

Câu 2. *Đáp số*: 0,05.



Tại mọi ô đang đứng, quân vua có 8 khả năng lựa chọn để bước sang ô bên cạnh.

Do đó không gian mẫu $n(\Omega)=8^3$.

Gọi A là biến cố "Sau 3 bước quân vua trở về ô xuất phát". Sau ba bước quân vua muốn quay lại ô ban đầu khi quân vua đi theo đường khép kín tam giác. Có hai trường hợp:

+ Từ ô ban đầu đi đến ô đen, đến đây có 4 cách để đi bước hai rồi về lại vị trí ban đầu.

+ Từ ô ban đầu đi đến ô trắng, đến đây có 2 cách để đi bước hai rồi về lại vị trí ban đầu.

Do số phần tử của biến cố A là:

$n(A)=4.4+2.4=24$. Vậy xác suất $P(A)=\dfrac{24}{8^3}=\dfrac{3}{64}$.

Câu 3. *Đáp số*: 7,5.

Giả sử hình hộp chữ nhật có chiều rộng là x, chiều dài là $3x$, chiều cao là y (đơn vị mét, x, y dương).

Ta có: $3x.x+2.x.y+2.3x.y=20$

$$\Leftrightarrow 3x^2+8xy=20 \Leftrightarrow y=\frac{20-3x^2}{8x}.$$

Thể tích của bể cá là:

$$V=3x.x.y=3x^2.\frac{20-3x^2}{8x}$$

$$=\frac{3}{8}(-3x^2+20x)=f(x) \text{ với } 0<x<\sqrt{\frac{20}{3}};$$

$$f'(x)=\frac{3}{8}(-9x^2+20)=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

Lập bảng biến thên của hàm số trên $\left(0;\sqrt{\dfrac{20}{3}}\right)$, khi đó thể tích có giá trị lớn nhất là:

$$f\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)=\frac{10\sqrt{5}}{3}\approx 7,5 \text{ (m}^3\text{)}.$$

Câu 4. *Đáp số*: 9.

Gọi m là số lượng lá bèo được thả vào ao lúc đầu ($m>0$, m nguyên). Sau 1 giờ thì ao có $3.m$ lá bèo; Sau 2 giờ thì ao có $3^2.m$ lá bèo; Sau k giờ thì ao có $3^k.m$ lá bèo; Sau 10 giờ ao sẽ có $3^{10}.m$ lá bèo và mặt ao đươc bèo phủ kín.

Lượng bèo phủ kín $\dfrac{1}{3}$ mặt ao là: $\dfrac{3^{10}.m}{3}$.

Ta có: $\dfrac{3^{10}.m}{3}=3^k.m \Leftrightarrow 3^9.m=3^k.m \Leftrightarrow k=9.$

Câu 5. *Đáp số*: 2,83.

Gọi $C(2+2t;4-t;2-t)$, suy ra tọa độ trung điểm M của AC là $M\left(2+t;\dfrac{7-t}{2};\dfrac{5-t}{2}\right)$. Vì $M \in BM$ nên:

$$\frac{2+t-3}{-1}=\frac{\frac{7-t}{2}-3}{2}=\frac{\frac{5-t}{2}-2}{-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t-1}{-1}=\frac{1-t}{4}=\frac{1-t}{-2} \Rightarrow t=1.$$

Được quét bằng CamScanner

Do đó $C(4;3;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc CD là:

$$2.(x-2)-1.(y-3)-1.(z-3)=0$$
$$\Leftrightarrow 2x-y-z+2=0.$$

Tọa độ giao điểm H của (P) và CD là nghiệm $(x;y;z)$ của hệ $\begin{cases}x=2+2t\\y=4-t\\z=2-t\\2x-y-z+2=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+2t\\y=4-t\\z=2-t\\2(2+2t)-(4-t)-(2-t)+2=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=2, y=4, z=2, t=0\Rightarrow H(2;4;2).$$

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua đường phân giác CD, suy ra H là trung điểm AA', bởi vậy:

$$\begin{cases}x_{A'}=2x_H-x_A=2.2-2=2\\y_{A'}=2y_H-y_A=2.4-3=5\\z_{A'}=2z_H-z_A=2.2-3=1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow A'(2;5;1).$$

Do $A'\in BC$ nên đường thẳng BC có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{CA'}=(-2;2;0)=2(-1;1;0)$, nên phương trình đường thẳng BC là $\begin{cases}x=4-t\\y=3+t\\z=1\end{cases}$.

Vì $B=BM\cap BC$ nên tọa độ của B là nghiệm $(x;y;z)$ của hệ:

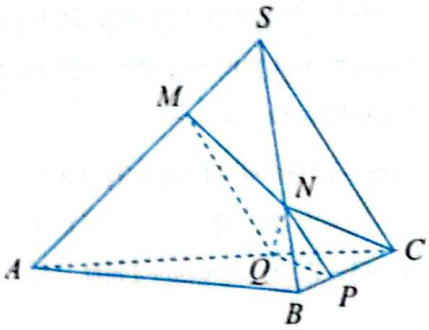
$$\begin{cases}x=4-t\\y=3+t\\z=1\\\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=5\\z=1\\t=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow B(2;5;1)\equiv A'\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(0;2;-2).$$

Đoạn thẳng AB có độ dài là:

$$AB=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}\approx 2,83.$$

Câu 6. Đáp số: 0,8.



Kí hiệu V là thể tích khối tứ diện $SABC$. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với các đường thẳng BC, AC. Ta có $NP//MQ//SC$. Khi chia khối (H_1) bởi mặt phẳng (QNC), ta được hai khối chóp $N.SMQC$ và $N.QPC$.

Ta có: $\dfrac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}}=\dfrac{d(N,(SAC))}{d(B,(SAC))}\cdot\dfrac{S_{SMQC}}{S_{SAC}}$;

$$\frac{d(N,(SAC))}{d(B,(SAC))}=\frac{NS}{BS}=\frac{2}{3};$$

$$\frac{S_{AMQ}}{S_{ASC}}=\left(\frac{AM}{AS}\right)^2=\frac{4}{9}\Rightarrow\frac{S_{SMQC}}{S_{ASC}}=\frac{5}{9}.$$

Suy ra: $\dfrac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{5}{9}=\dfrac{10}{27}$;

$$\frac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}}=\frac{d(N,(QPC))}{d(S,(ABC))}\cdot\frac{S_{QPC}}{S_{ABC}}$$
$$=\frac{NB}{SB}\cdot\frac{CQ}{CA}\cdot\frac{CP}{CB}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{27};$$

$$\frac{V_1}{V}=\frac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}}+\frac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}}$$
$$=\frac{10}{27}+\frac{2}{27}=\frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow\frac{V_1}{V_1+V_2}=\frac{4}{9}\Rightarrow 5V_1=4V_2$$

$$\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{4}{5}=0,8.$$

NGUYỄN THANH GIANG

(Trường THPT chuyên Hưng Yên)

Được quét bằng CamScanner

BÀI TOÁN VỀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

LÊ TÀI THẮNG
(GV THPT Yên Phong 1, Bắc Ninh)

(Kỳ 2)

Câu 5. *Cho hàm số* $f(x)=\left|x^4-4x^3+4x^2+a\right|$. *Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn* $[0;2]$. *Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn* $[-3;3]$ *sao cho* $M\le 2m$?

A. 3 **B.** 7

C. 6 **D.** 5.

Lời giải. Xét hàm số $g(x)=x^4-4x^3+4x^2+a$ trên đoạn $[0;2]$. Ta có:

$$g'(x)=4x^3-12x^2+8x;$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-12x^2+8x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$$

$\Rightarrow g(x)\in[a;a+1]$. Do $M\le 2m$ nên $m>0$.

Suy ra: $M=\max\{|a|;|a+1|\}=\dfrac{|2a+1|+1}{2}$;

$$m=\min\{|a|;|a+1|\}=\frac{\big||2a+1|-1\big|}{2}.$$

Theo giả thiết ta có:

$$M\le 2m\Leftrightarrow\frac{|2a+1|+1}{2}\le 2.\frac{\big||2a+1|-1\big|}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3|2a+1|^2-10|2a+1|+3\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|2a+1|\ge 3\\|2a+1|\le\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a\ge 1\\a\le -2\\-\dfrac{2}{3}\le a\le -\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

Do a nguyên nên có 5 giá trị của a thuộc đoạn $[-3;3]$. Chọn **D**.

Câu 6. *Để giá trị lớn nhất của hàm số* $y=f(x)=\left|x^3-3x+2m-1\right|$ *trên đoạn* $[0;2]$ *là nhỏ nhất thì giá trị của m thuộc*

A. $(0;1)$ **B.** $[-1;0]$

C. $(1;2)$ **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải. Xét hàm số $y=g(x)=x^3-3x+2m-1$ trên đoạn $[0;2]$. Ta có:

$$g'(x)=3x^2-3=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\ \text{(loại)}\\x=1\end{array}\right.$$

Ta có: $g(0)=2m-1;g(1)=2m-3;g(2)=2m+1$.

Suy ra: $F=\max\limits_{[0;2]}f(x)=\max\{|2m-3|,|2m+1|\}$.

Cách 1. So sánh hai giá trị $|2m-3|$ và $|2m+1|$.

- Nếu $|2m-3|\le|2m+1|\Leftrightarrow(2m-3)^2\le(2m+1)^2$

$\Leftrightarrow 8\le 16m\Leftrightarrow m\ge\dfrac{1}{2}$ thì

$$F=|2m+1|\ge\left|2.\frac{1}{2}+1\right|=2.$$

Suy ra: $F_{\min}=2\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

- Nếu $|2m-3|>|2m+1|\Leftrightarrow(2m-3)^2>(2m+1)^2$

$\Leftrightarrow 8>16m\Leftrightarrow m<\dfrac{1}{2}$ thì

$$F=|2m-3|=3-2m>3-2.\frac{1}{2}=2.$$

Được quét bằng CamScanner

Suy ra: $F_{\min}=2\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.

Vậy $m\in(0;1)$. Chọn A.

Cách 2. Áp dụng công thức

$$F=\max\left\{|2m-3|,|2m+1|\right\}=\frac{|4m-2|+4}{2}\geq 2$$

suy ra: $F_{\min}=2\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.

Cách 3. Áp dụng BĐT chứa dấu gia trị tuyệt đối.

Ta có:

$$\begin{cases}F\geq|2m-3|\\F\geq|2m+1|\end{cases}\Rightarrow F\geq\frac{|2m+1|+|2m-3|}{2}$$

$$=\frac{|2m+1|+|3-2m|}{2}\geq\frac{|2m+1+3-2m|}{2}=2$$

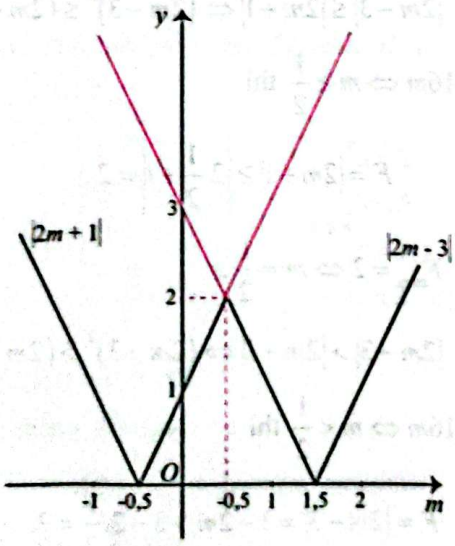
Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}|2m-3|=|2m+1|=2\\(2m+1)(3-2m)\geq 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}.$$

Cách 4. Vẽ đồ thị hàm số

$$y=\max\left\{|2m-3|,|2m+1|\right\}.$$

Trên hình vẽ đồ thị là phần mầu hồng. Dễ dàng suy ra: $F_{\min}=2\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.



Câu 7. *Cho hàm số* $f(x)=\frac{x-m^2+m}{x+1}$ *với* m *là tham số thực. Biết rằng có hai giá trị khác nhau của* m *là* m_1 *và* m_2 *để giá trị lớn nhất của hàm số* $g(x)=|f(x)|$ *với* $x\in[1;2]$ *đạt giá trị nhỏ nhất. Tích* $T=m_1m_2$ *là*

A. 1 *B.* $-\frac{6}{5}$

C. $-\frac{8}{5}$ *D.* $-\frac{7}{5}$.

Lời giải. Ta có: $f'(x)=\frac{m^2-m+1}{(x+1)^2}>0,\forall x\in[1;2]$

$$\Rightarrow\max_{x\in[1,2]}g(x)=\max\left\{|f(1)|;|f(2)|\right\}$$

$$=\max\left\{\frac{|1-m^2+m|}{2};\frac{|2-m^2+m|}{3}\right\}$$

$$\geq\frac{|1-m^2+m|+|2-m^2+m|}{5}$$

$$\geq\frac{|2-m^2+m-1+m^2-m|}{5}=\frac{1}{5}.$$

Suy ra: $\max_{x\in[1,2]}g(x)=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\begin{cases}|f(1)|=|f(2)|=\frac{1}{5}\\(2-m^2+m)(m^2-m-1)\geq 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\frac{m^2-m-1}{2}=\frac{2-m^2+m}{3}$$

$\Leftrightarrow 5m^2-5m-7=0\Rightarrow$ Chọn D.

Nhận xét. Ta có:

$$f(1)=\frac{|1-m^2+m|}{2};\ f(2)=\frac{|2-m^2+m|}{3}$$

Ở đây ta đã khéo sử dụng:

$$\max_{x\in[1,2]}g(x)=\max\left\{|f(1)|;|f(2)|\right\}\geq\frac{2|f(1)|+3|f(2)|}{5}$$

để làm mất mẫu số của các phân số $|f(1)|,|f(2)|$ và sử dụng bất đẳng thức về trị tuyệt đối để tìm giá trị nhỏ nhất. Còn nếu sử dụng tính chất:

Được quét bằng CamScanner

$$\max\{|f(1)|;|f(2)|\}=\frac{|f(1)+f(2)|+|f(1)-f(2)|}{2}$$

thì bài toán sẽ phức tạp hơn rất nhiều.

Dạng 2: Bài toán liên quan GTLN-GTNN của hàm số $y=|f(x)|+mx$

Câu 8. *Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)=|2x^3-15x+m-5|+9x$ trên $[0;3]$ bằng 60. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số thực m.*

A. 48 **B.** 5

C. 6 **D.** 62.

Lời giải. Ta có:

$$\max_{[0;3]} f(x)=60 \Leftrightarrow f(x)\le 60, \forall x\in[0;3]$$

và $\exists x_0\in[0;3]$ sao cho $f(x_0)=60$.

Ta có: $f(x)\le 60 \Leftrightarrow |2x^3-15x+m-5|+9x\le 60$

$\Leftrightarrow |2x^3-15x+m-5|\le 60-9x$

$\Leftrightarrow 9x-60\le 2x^3-15x+m-5\le 60-9x$

$\Leftrightarrow -2x^3+24x-55\le m\le -2x^3+6x+65, \forall x\in[0;3]$.

Vì $-2x^3+6x+65\ge 29, \forall x\in[0;3]$ nên

$$m\le -2x^3+6x+65, \forall x\in[0;3] \Leftrightarrow m\le 29.$$

Tương tự: $-2x^3+24x-55\le -23, \forall x\in[0;3]$ nên

$$-2x^3+24x-55\le m, \forall x\in[0;3] \Leftrightarrow m\ge -23.$$

Vậy $-23\le m\le 29$ thì $f(x)\le 60, \forall x\in[0;3]$.

Để $\exists x_0\in[0;3]$ sao cho $f(x_0)=60$ thì

$$\begin{bmatrix} -2x^3+24x-55=m \\ -2x^3+6x+65=m \end{bmatrix} \text{ có nghiệm trên } [0;3]$$

hay $\begin{bmatrix} m\ge 29 \\ m\le -23 \end{bmatrix}$. Kết hợp với $-23\le m\le 29$ ta có:

$$\begin{bmatrix} m=29 \\ m=-23 \end{bmatrix} \text{ thì } \max_{[0;3]} f(x)=60.$$

Khi đó tổng các giá trị của m là $29-23=6$.

Chọn C.

Câu 9. *Biết tập hợp S chứa tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|x^2-4|-mx$ bằng -1. Tổng bình phương các phần tử thuộc tập S bằng*

A. $\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{1}{2}$

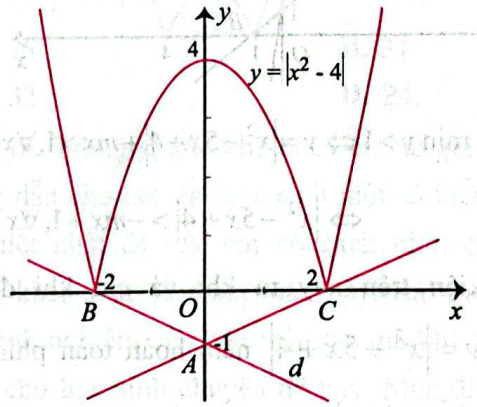
C. $\frac{1}{16}$ **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có được:

$$|x^2-4|-mx\ge -1, \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow |x^2-4|\ge mx-1, \forall x\in\mathbb{R}..$$

Nhận thấy đường thẳng $d: y=mx-1$ luôn đi qua điểm $A(0;-1)$ khi m thay đổi. Yêu cầu của bài toán tương đương với việc tìm m để đường thẳng $d: y=mx-1$ luôn nằm phía dưới đồ thị của hàm số $y=|x^2-4|$ và chúng phải có điểm chung.



Từ đồ thị của hàm số $y=|x^2-4|$ chúng ta có thể thấy rằng yêu cầu bài toán được thực hiện bởi các trường hợp sau:

TH1: $d: y=mx-1$ đi qua $B(-2;0) \Rightarrow m=\frac{-1}{2}$.

TH2: $d: y=mx-1$ đi qua $C(2;0) \Rightarrow m=\frac{1}{2}$.

Vậy $S=\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$.

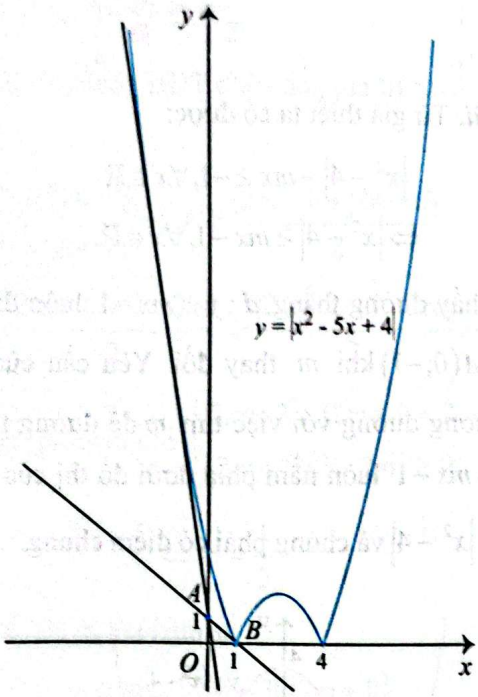
Được quét bằng CamScanner

Câu 10. *Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\left|x^2-5x+4\right|+mx$ có giá trị nhỏ nhất lớn hơn 1?*

A. 2 **B.** 7

C. 8 **D.** *Vô số.*

Lời giải.



Ta có: $\min y>1\Leftrightarrow y=\left|x^2-5x+4\right|+mx>1,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \left|x^2-5x+4\right|>-mx+1,\forall x\in\mathbb{R}.$

Điều kiện trên xảy ra khi và chỉ khi đồ thị $(C):y=\left|x^2-5x+4\right|$ nằm hoàn toàn phía trên đường thẳng $(\Delta_m):y=-mx+1$.

Đồ thị (C) như hình vẽ, khi m thay đổi thì đường thẳng (Δ_m) quay quanh điểm $A(0;1)$.

+ Đường thẳng (Δ_m) đi qua điểm $B(1;0)\Rightarrow 0=-m.1+1\Leftrightarrow m=1$.

+ Đường thẳng (Δ_m) tiếp xúc đồ thị (C) tại điểm có hoành độ âm $\Leftrightarrow x^2-5x+4=-mx+1$ hay $x^2-(5-m)x+3=0$ có nghiệm kép âm

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=(5-m)^2-12=0\\ x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{5-m}{2}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=5\pm2\sqrt{3}\\ m>5\end{cases}$$

$\Leftrightarrow m=5+2\sqrt{3}$.

Từ hình vẽ ta thấy đồ thị (C) nằm hoàn toàn phía trên đường thẳng $(\Delta_m)\Leftrightarrow 1<m<5+2\sqrt{3}$.

Vậy có giá trị nguyên của m là $m\in\{2;3;...;8\}$ thỏa yêu cầu bài toán.

III. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Câu 1. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}\right|$ trên $[1;2]$ bằng 2. Số phần tử của S là.

A. 3 **B.** 1

C. 4 **D.** 2.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)=\left|x^4-2x^2+a\right|$ (a là tham số thực). Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$. Tổng các giá trị của tham số thực a để $2M+3m=23$ là

A. $-\dfrac{7}{2}$ **B.** -7

C. -14 **D.** $-\dfrac{35}{2}$.

Câu 3. Cho Cho hàm số $y=\left|x^4-2x^3+x^2+a\right|$. Có bao nhiêu số nguyên a sao cho $\max\limits_{[-1;2]}y\le 2020$

A. 4037 **B.** 4036

C. 4038 **D.** 2021.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-m^2+m}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[1;2]}\left|f(x)\right|=2\min\limits_{[1;2]}\left|f(x)\right|$. Tích tất cả các phần tử của S là

Được quét bằng CamScanner

A. -5 B. $\frac{5}{2}$

C. 1 D. 2.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+1$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)+m\right|$ có giá trị nhỏ nhất không vượt quá 5?

A. 30 B. 32

C. 31 D. 29.

Câu 6. Cho hàm số

$f(x)=\left|4x-x^2-2\sqrt{(x+1)(5-x)}+m\right|$

với là tham số. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đạt giá trị nhỏ nhất?

A. 1 B. 2

C. 3 D. 4.

Câu 7. Cho x,y là các số thực thỏa mãn $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị tham số thực m để giá trị nhỏ nhất của $P=\left|(x+y)(2xy-2)+m\right|$ bằng $\frac{1}{2}$. Số phần tử của S là

A. 1 B. 2

C. 0 D. 4.

Câu 8. Cho hàm số $y=\left|2x-x^2-\sqrt{(x+1)(3-x)}+m\right|$ với m là tham số thực. Khi giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất thì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m\in(0;1)$ B. $m\in(1;2)$

C. $m\in(2;3)$ D. $m\in(3;4)$.

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để GTNN của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|+4x$ bằng -1?

A. 0 B. 1

C. 2 D. 3.

Câu 10. Xét hàm số $f(x)=\left|\frac{mx-2\sqrt{x+4}}{2x+4}\right|$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn điều kiện $0<\min\limits_{[-1;1]}f(x)<1$?

A. 4 B. 8

C. 2 D. 1.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)=\left|x^2+ax+b\right|$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1;3]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $a+2b$ bằng

A. 3 B. 4

C. -4 D. 2.

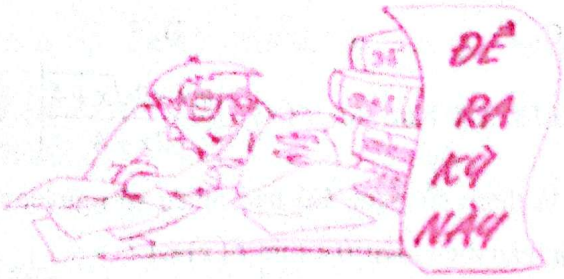
Câu 12. Cho $f(x)=ax^2+bx+c$ thỏa mãn $\left|f(x)\right|\le 1$ khi $|x|\le 1$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ khi $|x|\le 4$ là

A. 16 B. 31

C. 32 D. 24.

Kết luận. Trong khuôn khổ bài viết, tác giả muốn hướng dẫn cho các em học sinh một số kiến thức cần thiết nhất để các em có cách nhìn cơ bản nhưng khái quát về dạng toán này. Bài viết dựa trên kinh nghiệm của bản thân tác giả khi dạy ôn luyện cho học sinh chuyên đề này. Mục đích bài viết là đưa ra một hệ thống những bài tập giúp học sinh hiểu rõ bản chất của phương pháp giải một số bài toán GTLN, GTNN của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối có tham số. Từ đó, học sinh có thể giải các bài toán tương tự, hoặc tìm ra cách giải cho các bài toán mới. Điều này sẽ kích thích sự say mê, tìm tòi khám phá, nâng cao năng lực tự học ở mỗi học sinh. Bài viết có lẽ còn những thiếu sót, rất mong được quý thầy cô và bạn đọc đóng góp ý kiến để những bài viết sau được tốt hơn.

Được quét bằng CamScanner



CÁC LỚP THCS

Bài T1/570 (Lớp 6). Hãy tìm những năm của thế kỷ 21 mà có thể biểu diễn được dưới dạng $2^a-3.2^b$ trong đó a, b là các số tự nhiên (chẳng hạn $2024=2^{11}-3.2^3$).

NGUYỄN KIM SƠ

(Trung tâm BD&PT tài năng Toán học Nam Sáng)

Bài T2/570 (Lớp 7). Tìm hai số hữu tỷ dương x, y thỏa mãn đẳng thức:

$$(x+1)^2+(y+1)^2=2025+2(x+y).$$

HUỲNH THANH TÂM

(CB Bưu điện thị xã An Nhơn, Bình Định)

Bài T3/570. Chứng minh rằng:

$$1.2^{3^4}+2.3^{4^5}+3.4^{5^6}+4.5^{6^7}$$

chia hết cho 11.

PHAN ĐẠI PHÁP

(GV Câu lạc bộ Mathfun, Hà Nội)

Bài T4/570. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD và CE của tam giác cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC. Tia MH cắt đường tròn (O) ở I. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BME cắt AM ở N. Chứng minh $\frac{AI}{MI}.\frac{AD}{MD}=\frac{AN}{MN}$.

ĐOÀN CÁT NHƠN

(GV THCS P. Bình Định, TX. An Nhơn, Bình Định)

Bài T5/570. Giải phương trình

$$x+y+x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

NGUYỄN DUY THÁI

(GV THCS Nam Hồng, TX. Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/570. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình

$$x^3+x=y^3+y+xy+2005.$$

HÀN NGỌC ĐỨC

(SV K47A2 Toán Tin, ĐH KHTN Hà Nội)

Bài T7/570. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}6x^2y+2y^3+35=0\\5x^2+5y^2+2xy+5x+13y=0\end{cases}.$$

KIỀU ĐÌNH MINH

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T8/570. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn có bán kính bằng 1 và có trọng tâm G. Chứng minh

$$\frac{AB}{GC}+\frac{BC}{GA}+\frac{CA}{GB}\ge AB+BC+CA.$$

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Bài T9/570. Cho ba số a,b,c lớn hơn $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^2+a-1}+\frac{1}{b^2+b-1}+\frac{1}{c^2+c-1}\ge 3.$$

NGÔ VĂN THÁI

(Thái Bình)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/570. Chứng minh rằng phương trình $x^3+x+a^2=y^2$ có ít nhất một cặp nghiệm nguyên dương $(x;y)$ với mỗi giá trị nguyên của a.

TRƯƠNG BẢO NAM

(namtb49@gmail.com)

Bài T11/570. Xét 2022 số thực tùy ý $a_0,a_1,a_2,...,a_{2021}$ với $a_1=a_{2020}=0$, các số còn lại khác 0. Chứng minh rằng với mọi số thực k thì:

$$|a_0|-|a_{2021}|\le\sum_{i=0}^{2019}|a_i-ka_{i+1}-a_{i+2}|.$$

ĐỖ LÊ HẢI THỤY

(GV THPT chuyên Bảo Lộc, Lâm Đồng)

Được quét bằng CamScanner

Bài T12/570. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn có (O). Gọi I là điểm bất kỳ trong mặt phẳng chứa tam giác. Tiếp tuyến tại B của (O) cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABI tại điểm D; tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác AIC tại điểm E. Gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DIE. Chứng minh rằng điểm P nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BC.

NGUYỄN HUY HOÀNG
(SV lớp sư phạm Toán K45, ĐH Quy Nhơn, Bình Định)

Bài L1/570. Một pít-tông cách nhiệt đặt nằm ngang, pít-tông ở vị trí chia xi lanh thành hai phần bằng nhau, chiều dài của mỗi phần là 30 cm. Mỗi phần chứa một lượng khí như nhau ở nhiệt độ 17°C và áp suất 2 atm. Muốn pít-tông dịch chuyển 2 cm thì phải đung nóng khí ở một phần lên thêm bao nhiêu độ? Áp suất của khí khi pít-tông đã dịch chuyển là bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/570. Một trạm phát điện, có hiệu điện thế 0,5 kV truyền đi một công suất 50 kW trên một đường dây có điện trở tổng cộng 4 Ω tới tải tiêu thụ. Nếu trước khi đưa lên đường dây tải điện, người ta nối hai cực của máy phát điện với một máy biến thế lí tưởng có ti số các vòng dây của cuộn sơ cấp trên cuộn thứ cấp là 0,1 để tăng áp. Hãy tính Hiệu suất truyền tải và hiệu điện thế tại nơi tiêu thụ. Coi hệ số công suất của hệ thông là $k = 1$ và không thay đổi ($\mathcal{P} = kUI$).

THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/570 (Grade 6). Find the years of the 21st century that can be represented in the form $2^a - 3.2^b$ where a and b are natural numbers, e.g. $2024 = 2^{11} - 3.2^3$.

Problem T2/570 (Grade 7). Find two positive rational numbers x, y that satisfy the equality

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2025 + 2(x+y).$$

Problem T3/570. Prove that

$$1.2^{3^4} + 2.3^{4^5} + 3.4^{5^6} + 4.5^{6^7}$$

is divisible by 11.

Problem T4/570. Given an acute triangle ABC inscribed in a circle (O). The altitudes AD and CE of the triangle intersect at H. Let M be the midpoint of BC. The ray MH intersects the circle (O) at I. The circumcircle of the triangle BME intersects AM at N. Prove that

$$\frac{AI}{MI}.\frac{AD}{MD} = \frac{AN}{MN}.$$

Problem T5/570. Solve the equation

$$x + y + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

FOR HIGH SCHOOL

Problem T6/570. Find all positive integers x, y that satisfy the equation

$$x^3 + x = y^3 + y + xy + 2005.$$

Problem T7/570. Solve the system of equations

$$\begin{cases} 6x^2y + 2y^3 + 35 = 0 \\ 5x^2 + 5y^2 + 2xy + 5x + 13y = 0 \end{cases}.$$

(Xem tiếp trang 31)

Được quét bằng CamScanner



Bài T1/566. *Cho tổng $S = 3a^2 + 3a - 2027$, trong đó a là số nguyên. Tìm a để S là lập phương của một số nguyên.*

Lời giải. Giả sử

$$S = 3a^2 + 3a - 2027 = 3(a^2 + a - 676) + 1 = b^3 \ (1)$$

với b là số nguyên. Từ đó số nguyên b không chia hết cho 3 và b^3 chia cho 3 dư 1.

• Nếu $b = 3n + 2$ với n là số nguyên thì

$$b^3 = (3n + 2)^3 = 27n^3 + 54n^2 + 36n + 8$$
$$= 3(9n^3 + 18n^2 + 12n + 2) + 2,$$

không thỏa mãn b^3 chia cho 3 dư 1 (loại).

• Nếu $b = 3n + 1$ với n là số nguyên thì

$$b^3 = (3n + 1)^3 = 27n^3 + 27n^2 + 9n + 1.$$

Thay vào (1) và giản ước được:

$$a^2 + a - 676 = 9n^3 + 9n^2 + 3n$$

hay là $a(a + 1) = 3(3n^3 + 3n^2 + n + 225) + 1$, suy ra $a(a + 1)$ chia cho 3 dư 1 (2).

Nếu $a = 3m$ thì $a(a + 1)$ chia hết cho 3, không thỏa mãn (2).

Nếu $a = 3m + 2$ thì $a + 1 = 3(m + 1)$ nên $a(a + 1)$ chia hết cho 3, không thỏa mãn (2).

Nếu $a = 3m + 1$ thì

$$a(a + 1) = (3m + 1)(3m + 2) = 3(3m^2 + 3m) + 2$$

nên $a(a + 1)$ chia cho 3 dư 2, không thỏa mãn (2).

Vậy không tồn tại số nguyên a nào để S là lập phương của một số nguyên.

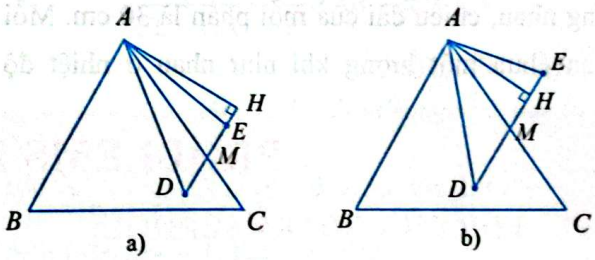
Nhận xét. 1) Cách giải khác. Nếu $b = 3n + 1$ thì $b^3 = (3n + 1)^3 = 9(3n^3 + 3n^2 + n) + 1$ chia cho 9 dư 1, trong khi với $a = 3m$ hoặc $a = 3m + 1$ thì S chia cho 9 dư 7, với $a = 3m + 1$ thì S chia cho 9 dư 4.

2) Các bạn sau có lời giải đúng. **Nghệ An**: *Nguyễn Thái Dũng, Phạm Nguyễn Nguyệt Linh, Nguyễn Thị Kim Ngân, Nguyễn Đắc Sang, Nguyễn Sỹ Bảo Long, Nguyễn Thị Trà Giang, Nguyễn Đình Gia Hưng*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **TP. Hồ Chí Minh**: *Lê Minh Khoa*, 6/7, THCS Tân Xuân, Hóc Môn; **Cộng hòa Áo**: *Lê Bạch Hải Đăng*, 2B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T2/566. *Cho tam giác nhọn ABC. D là điểm nằm trong tam giác ABC. Đường thẳng qua D song song với AB cắt cạnh AC ở M. Trên tia đối của tia MD lấy điểm E sao cho $ME = MD$. Chứng minh rằng $AE < AD$.*

Lời giải.



Từ giả thiết $AB // DM$ suy ra $\widehat{BAC} + \widehat{AMD} = 180^0$ (hai góc trong cùng phía). Lại vì $\widehat{BAC}$ là góc nhọn nên $\widehat{AMD}$ là góc tù. Từ đó tìm được điểm H trên tia ME sao cho $\widehat{AHM} = 90^0$. Có hai trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1: Điểm E nằm giữa M và H (hình a). Khi đó rõ ràng là $HE < HD$. Suy ra $AE < AD$.

Trường hợp 2: Điểm H nằm giữa M và E (hình b). Vì $HE < ME$, mà $ME = MD$ và $MD < HD$ nên $HE < HD$. Dẫn tới $AE < AD$.

Tóm lại trong cả hai trường hợp ta đều có $AE < AD$.

Nhận xét. Đây là một bài toán yêu cầu so sánh độ dài hai đoạn thẳng có chung một đầu mút. Với dạng toán này, chúng ta thường so sánh độ dài các hình chiếu vuông góc của chúng trên một đường thẳng nào đó (*sử dụng mối quan hệ giữa độ dài đường xiên và độ dài hình chiếu*). Các bạn học sinh sau có lời giải tốt:

Được quét bằng CamScanner

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Bảo Châu*, 7A6, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Nghệ An:** *Hoàng Văn Duy*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Phạm Minh Thuý*, 6B, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành.

HỒ HẢI

Bài T3/566. *Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ sao cho*

$$(|x-y|+|x+y|)^5 = x^5 + |y|^5 + 30 \ (1).$$

Lời giải.

Nếu $x = 0$ thì từ (1) suy ra $31|y|^5 = 30$, do đó y không là số nguyên.

Nếu $y = 0$ thì từ (1) ta cũng suy ra x không là số nguyên.

Vậy cặp số nguyên (x, y) thoả mãn (1) thì cần có điều kiện $x \neq 0, y \neq 0$.

Áp dụng công thức $|a|+|b| \geq |a+b|$ và $|a| = |-a|$, ta có:

$$(|x-y|+|x+y|)^5 \geq |x-y+x+y|^5 = 32|x|^5;$$

$$(|x-y|+|x+y|)^5 \geq |y-x+x+y|^5 = 32|y|^5.$$

Từ đó suy ra: $2(|x-y|+|x+y|)^5 \geq 32|x|^5 + 32|y|^5$

nên $(|x-y|+|x+y|)^5 \geq 16|x|^5 + 16|y|^5$ (2).

Do $|x|^5 \geq x^5$, kết hợp với (1) và (2), ta có:

$$|x|^5 + |y|^5 + 30 \geq x^5 + |y|^5 + 30 \geq 16|x|^5 + 16|y|^5.$$

Suy ra $|x|^5 + |y|^5 \leq 2$ (3).

Do x, y là các số nguyên khác 0 nên $|x| \geq 1; |y| \geq 1$ suy ra $|x|^5 + |y|^5 \geq 2$ (4).

Từ (3) và (4) dẫn đến $|x|^5 + |y|^5 = 2$.

Từ đó $|x| = 1; |y| = 1$. Xảy ra các khả năng sau:

$$(x; y) \in \{(1; -1); (1; 1); (-1; 1); (-1; -1)\}.$$

Thử vào (1) chỉ có hai cặp số nguyên $(x; y)$ là $(1; 1)$ và $(1; -1)$ thoả mãn.

Nhận xét. Bài toán này có nhiều bạn tham gia gửi bài và đều có lời giải tương tự như trên. Tuyên dương các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn, rõ ràng và chính xác:

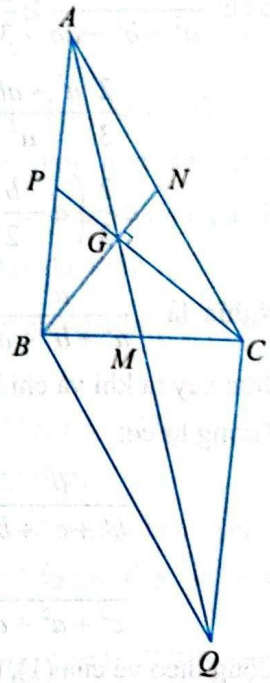
Vĩnh Phúc: *Trương Khánh Chi*, 7A8, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên; **Nghệ An:** *Nguyễn Quỳnh Anh*, 7D, THCS Lý Nhật Quang; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Tấn Phát*, 9/11, THCS Lý Thường Kiệt.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/566. *Cho tam giác ABC có các trung tuyến BN và CP vuông góc với nhau. Chứng minh*

$$3BC < AB + AC \leq \sqrt{10}BC.$$

Lời giải. Gọi M là trung điểm BC, G là trọng tâm tam giác ABC.



Theo giả thiết, $BN \perp CP$ nên $2GM = BC$.

Lấy điểm Q sao cho M là trung điểm AQ. Khi đó, $ABQC$ là hình bình hành.

Ta có: $AB + AC = AB + BQ$

$> AQ = 6GM = 3BC$ (1).

Lại có, tam giác BGC vuông tại G, áp dụng định lí Pythagoras ta có:

$$BC^2 = GB^2 + GC^2$$

$$= 4GP^2 + 4GN^2.$$

Suy ra: $5BC^2 = 4(GB^2 + GP^2) + 4(GC^2 + GN^2)$

$$= 4BP^2 + 4CN^2 = AB^2 + AC^2.$$

Lại có $(AB - AC)^2 \geq 0$ nên

$$AB^2 + AC^2 \geq 2AB.AC.$$

Từ đó suy ra:

$$(AB + AC)^2 \leq 2(AB^2 + AC^2) = 10BC^2.$$

Do đó $AB + AC \leq \sqrt{10}BC$ (2).

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Dưới đây là danh sách các bạn THCS có lời giải tốt: **Nghệ An:** *Hoàng Văn Nhân*, 8C, *Nguyễn Tất Han*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **CH Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 1B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thanh Mai*, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Hải Phòng:** *Đặng Đình Minh Trí*, 9D2, THCS Lạc Viên, Ngô Quyền.

NGUYỄN THANH HỒNG

Được quét bằng CamScanner

Bài T5/566. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=2025$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{a^3}{a^2+b^2+ab}+\frac{b^3}{b^2+c^2+bc}+\frac{c^3}{c^2+a^2+ca}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc

$$\frac{a^2+b^2}{2}\ge ab \text{ hay } a^2+b^2+ab\le\frac{3}{2}\left(a^2+b^2\right)$$

ta có: $\dfrac{a^3}{a^2+b^2+ab}\ge\dfrac{2}{3}.\dfrac{a^3}{a^2+b^2}$

$$=\frac{2}{3}.\frac{a^3+ab^2-ab^2}{a^2+b^2}=\frac{2}{3}.\left(a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)$$

$$\ge\frac{2}{3}.\left(a-\frac{b}{2}\right)=\frac{2a-b}{3}.$$

Nghĩa là $\dfrac{a^3}{a^2+b^2+ab}\ge\dfrac{2a-b}{3}$ (1), dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Tương tự có:

$$\frac{b^3}{b^2+c^2+bc}\ge\frac{2b-c}{3} \quad (2);$$

$$\frac{c^3}{c^2+a^2+ca}\ge\frac{2c-a}{3} \quad (3).$$

Cộng theo vế của (1), (2), (3), ta được:

$$P=\frac{a^3}{a^2+b^2+ab}+\frac{b^3}{b^2+c^2+bc}+\frac{c^3}{c^2+a^2+ca}$$

$$\ge\frac{2a-b}{3}+\frac{2b-c}{3}+\frac{2c-a}{3}=\frac{a+b+c}{3}$$

$$=\frac{2025}{3}=675.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a=b=c=\frac{2025}{3}=675.$$

Vậy $\min P=675$, giá trị đó đạt được khi $a=b=c=675$.

Nhận xét. 1) Có thể chứng minh bất đẳng thức (1) như sau:

$$(1)\Leftrightarrow 3a^3\ge(2a-b)\left(a^2+b^2+ab\right)$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3-a^2b-ab^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)\ge 0$$

bất đẳng thức cuối đúng.

2) Có thể giải bài toán bằng cách khác: Ta có

$$a-b+b-c+c-a=0$$

$$\Rightarrow\frac{a^3-b^3}{a^2+b^2+ab}+\frac{b^3-c^3}{b^2+c^2+bc}+\frac{c^3-a^3}{c^2+a^2+ca}=0,$$

suy ra:

$$P=\frac{a^3}{a^2+b^2+ab}+\frac{b^3}{b^2+c^2+bc}+\frac{c^3}{c^2+a^2+ca}$$

$$=\frac{b^3}{a^2+b^2+ab}+\frac{c^3}{b^2+c^2+bc}+\frac{a^3}{c^2+a^2+ca}$$

$$\Rightarrow 2P=\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2+ab}+\frac{b^3+c^3}{b^2+c^2+bc}+\frac{c^3+a^3}{c^2+a^2+ca}$$

$$=(a+b)\frac{a^2+b^2-ab}{a^2+b^2+ab}+(b+c)\frac{b^2+c^2-bc}{b^2+c^2+bc}$$

$$+(c+a)\frac{c^2+a^2-ca}{c^2+a^2+ca};$$

dễ dàng chứng minh $\dfrac{a^2+b^2-ab}{a^2+b^2+ab}\ge\dfrac{1}{3}$, suy ra:

$$P\ge\frac{a+b+c}{3}=675.$$

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Kiên Giang: *Thái Đức Huy*, 10T2, *Cái Hoàng Quốc Khánh*, 10T1, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Rạch Giá; **Hà Tĩnh:** *Đặng Sỹ Phước Đức*, 9A1, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Lê Khắc Trí Nguyên*, 10E2, *Lương Xuân Thế*, 10A1, TH, THCS, THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú; **Nghệ An:** *Nguyễn Tất Han*, *Nguyễn Tất Hoàng Anh*, *Nguyễn Thị Băng Tâm*, 9C, *Hoàng Văn Nhân*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Lâm Đồng:** *Phạm Quang Minh*, 9A3, THCS Phan Chu Trinh, TP. Đà Lạt; **Vĩnh Phúc:** *Trương Khánh Chi*, 7A8, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên; **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; TP. Hưng Yên; **Sóc Trăng:** *Nguyễn Tấn Phát*, 9/11, THCS Lý Thường Kiệt; **CH Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, 1B, trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3 GIBS, TP. Graz.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/566. *Giải phương trình*

$$x\sqrt[3]{\frac{9(x^3+1)(2x^3+1)}{2}}=x^2+x\sqrt{x}+1.$$

Lời giải. ĐK: $x\ge 0$.

Được quét bằng CamScanner

Ta thấy $x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho. Ta sẽ chứng minh đó là nghiệm duy nhất. Thật vậy:

Nếu $0\le x<1$ thì $x^3\le x^2\le x\sqrt{x}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\text{VT}=3\sqrt[3]{x^3.\frac{x^3+1}{2}.\frac{2x^3+1}{3}}\le x^3+\frac{x^3+1}{2}+\frac{2x^3+1}{3}$$
$$=\frac{13x^3+5}{6}<\frac{6x^2+6x\sqrt{x}+6}{6}$$
$$=x^2+x\sqrt{x}+1.$$

Nếu $x>1$ thì $x^3>x^2>x\sqrt{x}$. Khi đó:

$$\text{VT}=\sqrt[3]{\frac{9x^3(x^3+1)}{2}.(2x^3+1)}$$
$$=\sqrt[3]{\left[(2x^3+1)^2+\frac{1}{2}(x^3-1)(x^3+2)\right].(2x^3+1)}$$
$$>2x^3+1>x^2+x\sqrt{x}+1.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Nhận xét. Có vài bạn giải bằng cách nhân liên hợp nhưng cho lời giải sai. Bài này cũng có thể giải bằng cách lũy thừa cả hai vế. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Thái Bình: *Phan Trung Hiếu*, 10A1 ,THPT Tây Tiền Hải; **TP. Hồ Chí Minh:** *Trần Nhất Nguyên*, 10E1, TH, THCS, THPT Lê Thánh Tông, *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

HOÀNG NGỌC MINH

Bài T7/566. *Chứng minh rằng đa thức*

$$x^{9999}+x^{8888}+x^{7777}+x^{6666}+x^{5555}$$

chia hết cho đa thức $x^4+x^3+x^2+x+1$.

Lời giải. Ta giải bài toán tổng quát:

Với mọi số tự nhiên a,b,c,d,e *thì đa thức* $P(x)=x^{5a+4}+x^{5b+3}+x^{5c+2}+x^{5d+1}+x^{5e}$ *chia hết cho đa thức* $Q(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$.

Thật vậy, ta có hằng đẳng thức sau:

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)\ (*).$$

Xét hiệu:

$$P(x)-Q(x)=\left(x^{5a+4}-x^4\right)+\left(x^{5b+3}-x^3\right)$$
$$+\left(x^{5c+2}-x^2\right)+\left(x^{5d+1}-x\right)+\left(x^{5e}-1\right)$$
$$=x^4\left(x^{5a}-1\right)+x^3\left(x^{5b}-1\right)+x^2\left(x^{5c}-1\right)$$
$$+x\left(x^{5d}-1\right)+\left(x^{5e}-1\right).$$

Theo hằng đẳng thức (*) thì với n là số nguyên dương bất kỳ thì

$$x^{5n}-1=\left(x^5\right)^n-1^n=\left(x^5-1\right)M$$

và $$x^5-1=(x-1)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right).$$

Suy ra $x^{5n}-1$ chia hết cho đa thức $Q(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ với mọi số nguyên dương n. Áp dụng điều này ta suy ra đa thức $P(x)-Q(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)$, kéo theo đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)$.

Từ đây, chọn

$a=1999, b=1777, c=1555, d=1333, e=1111$

ta thu được điều phải chứng minh.

Nhận xét. Đây là bài toán dễ, nhiều bạn tham gia giải và giải đều đúng. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

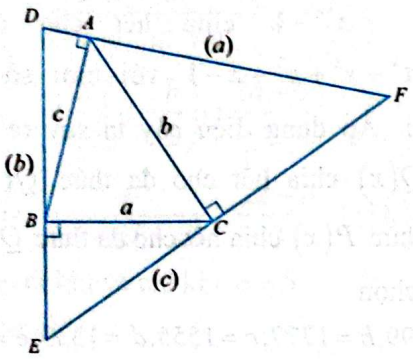
Nghệ An: *Phan Đại Hoàng*, 12A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, *Lê Thuỳ Trang*, 10E5, *Trần Nhất Nguyên*, *Trương Gia Đạt*, 10E1, *Lê Khắc Trí Nguyên*, 10E2, THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú; **Kiên Giang:** *Nguyễn Hoài Nhanh*, 10 Toán 2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Đồng Tháp:** *Huỳnh Phúc Vĩnh Nguyên*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Cao Lãnh; **Cộng hoà Áo:** *Lê Bạch Hải Đăng*, Lớp 1B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp 2, 3, TP. Graz; **Long An:** *Thái Nguyễn Thành Nhân*; 10 Toán 1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **Hải Phòng:** *Đặng Đình Minh Trí*, 9D2, THCS Lạc Viên, Q. Ngô Quyền; **Hà Tĩnh:** *Trần Nguyễn Khải Hưng*, 11A1, THPT Nguyễn Thị Minh Khai, Đức Thọ; **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên.

NGUYỄN TIẾN LÂM

Được quét bằng CamScanner

Bài T8/566. *Cho tam giác ABC nhọn. Qua các đỉnh A, B, C lần lượt kẻ các đường thẳng a, b, c sao cho (a) ⊥ AB, (b) ⊥ BC, (c) ⊥ CA. Biết rằng D = (a) ∩ (b), E = (b) ∩ (c), F = (c) ∩ (a). Chứng minh* $S_{DEF} \geq 3S_{ABC}$, *trong đó* S_{XYZ} *là kí hiệu diện tích tam giác XYZ.*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh).



Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có:

$$S_{DEF} = S_{ABC} + S_{ABD} + S_{BCE} + S_{ACF}$$

nên để chứng minh bất đẳng thức trên, ta cần chỉ ra: $S_{ABD} + S_{BCE} + S_{ACF} \geq 2S_{ABC} = \dfrac{abc}{2R}$

$$\Leftrightarrow 2(S_{ABD} + S_{BCE} + S_{ACF}) \geq \frac{abc}{R} \ (1).$$

Lại có:

$$2(S_{ABD} + S_{BCE} + S_{ACF}) = c.AD + a.BE + b.CF$$

và $AD = c\tan(90^0 - B) = c\cot B, BE = a\cot C,$

$CF = b\cot A \Rightarrow 2(S_{ABD} + S_{BCE} + S_{ACF})$

$$= a^2\cot C + b^2\cot A + c^2\cot B \ (2).$$

Từ (1) và (2), ta cần chứng minh

$$a^2\cot C + b^2\cot A + c^2\cot B \geq \frac{abc}{R} \ (3).$$

Từ định lý hàm số sin và côsin trong tam giác ABC ta thấy:

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{abc};$$

$$\cot B = \frac{R(c^2 + a^2 - b^2)}{abc};$$

$$\cot C = \frac{R(a^2 + b^2 - c^2)}{abc}.$$

Từ đó, để chứng minh (3), ta cần chỉ ra:

$$a^2(a^2 + b^2 - c^2) + b^2(b^2 + c^2 - a^2) + c^2(c^2 + a^2 - b^2) \geq \frac{a^2b^2c^2}{R^2}$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq \frac{a^2b^2c^2}{R^2}$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C \geq 4\sin^2 A \ .\sin^2 B.\sin^2 C \ (4)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C \geq 3(\sin A.\sin B.\sin C)^{\frac{4}{3}}$$

nên để chứng minh (4), ta cần chứng minh:

$$3(\sin A.\sin B.\sin C)^{\frac{4}{3}} \geq 4\sin^2 A.\sin^2 B.\sin^2 C$$

$$\Leftrightarrow (\sin A.\sin B.\sin C)^{\frac{2}{3}} \leq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin A.\sin B.\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} \ (5).$$

Ta lại có bất đẳng thức quen thuộc:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

nên theo bất đẳng thức Cauchy:

$$27\sin A.\sin B.\sin C \leq (\sin A + \sin B + \sin C)^3$$

$$\Rightarrow \sin A.\sin B.\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

(bất đẳng thức (5) được chứng minh).

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét. Số bài giải gửi về Toà soạn không nhiều. Ngoài bạn *Thiện* các bạn sau cũng có lời giải đúng: **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Đỗ Tiến Dũng*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Long An:** *Phạm Liên Hoàng Triều*, 11 Toán 1, THPT chuyên Trần Văn Giàu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Huỳnh Trịnh Vĩnh Phúc*, 11A1, TH, THCS & THPT Lê Thánh Tông, Quận Tân Phú.

HÒ QUANG VINH

Được quét bằng CamScanner

Bài T9/566. *Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $3(4x^2+8xy+3y^2-3x+3)$ (1) và $5(2x^2+4xy+7y^2-7x+7)$ (2) đều là các số chính phương.*

Lời giải. Cách 1. Trước hết ta chứng minh bổ đề:

Bổ đề. *Với a, b, k là các số nguyên dương. Nếu p là số nguyên tố có dạng $4k+3$ và $a^2+b^2 \vdots p$ thì*

$$a \vdots p \text{ và } b \vdots p.$$

Chứng minh. Vì $a^2+b^2 \vdots p$ nên không xảy ra trường hợp $a \vdots p$ và $b \nvdash p$ hoặc $a \nvdash p$ và $b \vdots p$.

Giả sử $a \nvdash p, b \nvdash p$. Theo định lý Fermat bé ta có:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p,\ b^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

$$\Rightarrow a^{p-1}+b^{p-1} \equiv 2 \pmod p \Rightarrow a^{4k+2}+b^{4k+2} \equiv 2 \pmod p.$$

Mà $a^{4k+2}+b^{4k+2}=\left(a^2\right)^{2k+1}+\left(b^2\right)^{2k+1} \vdots a^2+b^2$ và $a^2+b^2 \equiv 0 \pmod p$, do đó:

$$a^{4k+2}+b^{4k+2} \equiv 0 \pmod p.$$

Vậy $2 \equiv 0 \pmod p$, vô lý. Do đó $a \vdots p$ và $b \vdots p$.

Quay trở lại bài T9/566.

Do $3(4x^2+8xy+3y^2-3x+3)$ và $5(2x^2+4xy+7y^2-7x+7)$ là các số chính phương nên ta đặt: $3(4x^2+8xy+3y^2-3x+3)=a^2$,

$5(2x^2+4xy+7y^2-7x+7)=b^2$ với $a,b \in \mathbb{N}$.

Ta có: $a^2+b^2=22\left[(x+y-1)^2+(y+1)^2\right]$ (*).

Ta sẽ chứng minh: $a,b,x+y-1,y+1 \vdots 11^n$ (**), với $n \in \mathbb{N}$ bằng phương pháp quy nạp.

Với $n=0$ thì (**) hiển nhiên đúng.

Giả sử (**) đúng với $n=k$, $k \in \mathbb{N}$, ta chứng minh (**) đúng với $n=k+1$. Thật vậy, đặt $a=11^k m, b=11^k n, x+y-1=11^k p, y+1=11^k q$ với $m,n,p,q \in \mathbb{N}^*$. Thay vào (*) ta thu được:

$$11^{2k}(m^2+n^2)=22.11^{2k}(p^2+q^2)$$

$$\Leftrightarrow m^2+n^2=22(p^2+q^2) \Rightarrow m^2+n^2 \vdots 11.$$

Theo bổ đề trên thì $m \vdots 11$, $n \vdots 11 \Rightarrow m^2 \vdots 11^2$, $n^2 \vdots 11^2$ $\Rightarrow 22(p^2+q^2) \vdots 11^2 \Rightarrow p^2+q^2 \vdots 11$. Cũng theo bổ đề trên suy ra: $p \vdots 11$, $q \vdots 11$. Do đó:

$$a,b,x+y-1,y+1 \vdots 11^{k+1}.$$

Vậy $a,b,x+y-1,y+1 \vdots 11^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Điều này chỉ xảy ra khi

$$a=b=x+y-1=y+1=0 \Leftrightarrow x=2, y=-1, a=b=0.$$

Vậy cặp số nguyên (x, y) cần tìm là $(2, -1)$.

Cách 2 (Theo bạn *Phan Trung Hiếu*, 10A1, THPT Tây Tiền Hải, **Thái Bình**). Ta có:

$$(2)=10x^2+20xy+35y^2-35x+35$$
$$=10x^2+5x(4y-7)+35y^2+35 \ (3).$$

Xét tam thức (3) ẩn x, tham số y có:

$$\Delta_x=[5(4y-7)]^2-4.10.(35y^2+35)$$
$$=-1000y^2-1400y-175$$
$$=-25(40y^2+56y+7).$$

Tam thức (3) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta_x=-25(40y^2+56y+7) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-14-3\sqrt{14}}{20} \approx -1,26 \le y \le \frac{-14+3\sqrt{14}}{20} \approx -0,14.$$

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y=-1$.

Mặt khác: $(2)=35y^2+20xy+10x^2-35x+35$ (4).

Xét tam thức (4) ẩn y, tham số x có:

$$\Delta'_y=(10x)^2-35.(10x^2-35x+35)$$
$$=-250x^2+1225x-1225$$
$$=-25(10x^2-49x+49).$$

Tam thức (4) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta'_y=-25(10x^2-49x+49) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{5}=1,4 \le x \le \frac{7}{2}=3,5.$$

Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{2;3\}$.

- Với $x=2$, kết hợp với $y=-1$, thay vào (1) và (2) ta được: $3(4x^2+8xy+3y^2-3x+3)$

$$=3.(4.2^2-8.2+3.1-3.2+3)=0$$

là số chính phương;

$$5(2x^2+4xy+7y^2-7x+7)$$
$$=5.(2.2^2-4.2+7.1-7.2+7)=0$$

Được quét bằng CamScanner

là số chính phương.

- Với $x = 3$, kết hợp với $y = -1$, thay vào (2) ta được: $5(2x^2+4xy+7y^2-7x+7)$

$=5.(2.3^2-4.3+7.1-7.3+7)=-5$

không là số chính phương.

Vậy cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn bài toán là $(2, -1)$.

Nhận xét. Đây là bài toán số học hay. Mấu chốt trong cách giải 1 là phát hiện được tổng của hai số cần chứng minh là số chính phương chia hết cho số nguyên tố 11 (là số nguyên tố có dạng $4k + 3$), sau đó sử dụng bổ đề để đánh giá, từ đó tìm được x, y. Lời giải của bạn *Hiếu* ở cách 2 khá thú vị vì chỉ dùng điều kiện có nghiệm của tam thức bậc hai (trong đại số) để giải bài toán số học. Tuyên dương các bạn sau có lời giải đúng:

Hải Phòng: *Đặng Đình Minh Trí*, 9D2, THCS Lạc Viên, Q. Ngô Quyền; **Thái Bình:** *Phan Trung Hiếu*, 10A1, THPT Tây Tiền Hải; **Bình Định:** *Trần Ngọc Tuyên*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Kiên Giang:** *Thái Đức Huy*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hưng Yên:** *Trần Gia Phú*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên.

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/566. *Cho (a_n) là dãy số xác định bởi* $a_1 = 1$ *và* $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{n^2+2n}a_n + n^3 + 1,\ n = 1,2,3,\ldots$

Tìm số hạng tổng quát a_n của dãy và tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{n^4}$.

Lời giải (Dựa trên lời giải của bạn *Nguyễn Minh Hiếu*, THPT Chi Lăng, Gia Lai)

Đặt $v_k = \dfrac{k+1}{k}a_k$. Khi đó

$$v_{k+1} = v_k + (k+2)(k^2-k+1)$$
$$\Rightarrow v_{k+1} - v_k = k^3 + k^2 - k + 2 \quad (1)$$

Lấy tổng với k chạy từ 1 tới $n-1$ ở (1) ta được:

$$v_n - v_1 = \sum_{k=1}^{n-1}k^3 + \sum_{k=1}^{n-1}k^2 - \sum_{k=1}^{n-1}k + \sum_{k=1}^{n-1}2 \quad (2).$$

Chú ý rằng

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^3 = \frac{(n-1)^2n^2}{4},\ \sum_{k=1}^{n-1}k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6};$$
$$\sum_{k=1}^{n-1}k = \frac{(n-1)n}{2};\ \sum_{k=1}^{n-1}2 = 2(n-1).$$

Thay vào (2) ta được:

$$v_n - v_1 = \frac{3n^4-2n^3-9n^2+32n-24}{12}$$
$$\Rightarrow v_n = 2 + \frac{3n^4-2n^3-9n^2+32n-24}{12}$$
$$= \frac{n(3n^3-2n^2-9n+32)}{12}$$
$$\Rightarrow a_n = \frac{n^2(3n^3-2n^2-9n+32)}{12(n+1)}.$$

Từ đó: $\lim\dfrac{a_n}{n^4} = \lim\dfrac{3n^3-2n^2-9n+32}{12n^3+12n^2}$

$$= \lim\frac{3-\frac{2}{n}-\frac{9}{n^2}+\frac{32}{n^3}}{12+\frac{12}{n}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Nhận xét. Ngoài bạn *Hiếu*, các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Yên: *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11T, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Long An:** *Trương Huỳnh Tấn Đạt*, 10T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/566. *Tìm hàm $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+yf(x))+f(xy) = f(x)+f(2022y) \quad (1)$$

với mọi số thực x, y.

Lời giải. (Theo đa số các bạn) Giả sử $f(x)$ thỏa mãn (1). Thay $y = 1$ vào (1) ta được:

$$f(x+f(x)) = f(2022), \forall x \in \mathbb{R} \quad (2).$$

Thay $x = 2022$ vào (1), ta được:

$$f(2022 + yf(2022)) = f(2022), \forall y \in \mathbb{R} \quad (3).$$

- Nếu $f(2022) \neq 0$ thì từ (3) suy ra:

$$f(x) \equiv C \in \mathbb{R}, C \neq 0 \text{ thỏa mãn.}$$

Mặt khác từ (1) ta thấy hàm số $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn nên mọi hàm hằng $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán.

Được quét bằng CamScanner

- Nếu $f(2022)=0$ và $f(x)\not\equiv 0$, ta xét tập hợp

$$S=\{a:\ f(a)=0\}.$$

Rõ ràng $S\neq\varnothing$.

Nếu $|S|>1$, lấy $a,b\in S$ tùy ý, thay $x=a$ vào (1) ta được:

$$f(ay)=f(2022y),\forall y\in\mathbb{R},a\in S \quad (4).$$

Thay $x=0$ vào (2) được $f(f(0))=f(2022)=0$ nên $f(0)\in S$. Theo (4) thì

$$f(f(0)y)=f(2022y) \quad (5).$$

Với mọi $s\in\mathbb{R}$ thì theo (4), ta có:

$$f(as)=f(bs)=f(2022s).$$

Từ đây, thay $x=as$ vào (1), ta thu được:

$$\begin{aligned}f(as+yf(2022s))&=f(as+yf(as))\\&=f(as)+f(2022y)-f(asy)\\&=f(2022s)+f(2022y)-f(2022sy).\end{aligned}$$

Tương tự:

$$f(bs+yf(2022s))=f(2022s)+f(2022y)-f(2022sy).$$

Vậy $f(as+yf(2022s))=f(bs+yf(2022s))$ nên

$$f(as+yf(2022s))=f(as+yf(2022s)+T) \quad (6)$$

với $T=(b-a)s$.

Thay $x=T$ vào (1), ta có:

$$f(T+yf(T))+f(Ty)=f(T)+f(2022y) \quad (7).$$

Do $f(T)=f(0)\in S$ nên $f(yf(T))=f(2022y)$ và do $f(T+y)=f(y)$ nên từ (7) suy ra:

$$f(Ty)=f(0),\ \text{tức}\ f(x)\equiv c.$$

Nếu xảy ra $f(s)=0$ với mọi $s\neq 0$ thì ta thu được $f(0)$ nhận giá trị tùy ý.

Kết luận: Bài toán có các nghiệm:

(i) $f(x)\equiv c$,

(ii) $f(x)=0$ khi $x\neq 0$ và $f(0)$ tùy ý.

(iii) $f(x)=2022-x$.

Nhận xét. Đây là dạng toán khó về phương trình hàm trong lớp hàm hợp và tuần hoàn. Đây là đề bài trong RMN Master 2019. Các bạn gửi lời giải thường không đưa được đầy đủ hệ nghiệm của bài toán.

Các bạn sau đây có lời giải đúng.

Bình Định: *Trần Ngọc Tuyên*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Chánh Thiện*, 10CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Phú Yên:** *Huỳnh Trần Gia Huy*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Long An:** *Huỳnh Trung Nghĩa*, 10T1, THPT chuyên Trần Văn Giàu.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/566. *Cho tam giác ABC, O, I theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. K, L theo thứ tự là giao điểm của IB, IC và AC, AB. X là giao điểm của đường thẳng qua K vuông góc với OB và đường thẳng qua L vuông góc với OC. Y, Z theo thứ tự là điểm đối xứng của X qua CL, BK. Chứng minh OI đi qua trực tâm của tam giác XYZ.*

Lời giải. Ta cần có hai bổ đề.

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC, O, I, H theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp và trực tâm tam giác ABC. Khi đó*

$$(AO,AI)\equiv-(AH,AI)(\mathrm{mod}\,\pi).$$

Bổ đề 2. *Cho tam giác ABC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp, (I) là đường tròn nội tiếp. D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) và BC, CA, AB. S là trực tâm của tam giác DEF. Khi đó S thuộc OI.*

Phép chứng minh các bổ đề trên rất đơn giản, không trình bày ở đây.

Trở lại giải bài toán trên.

Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC; D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) và BC, CA, AB; H, S, T theo thứ tự là trực tâm của các tam giác ABC, DEF, XYZ; P, Q theo thứ tự là giao điểm của XK, XL và BC.

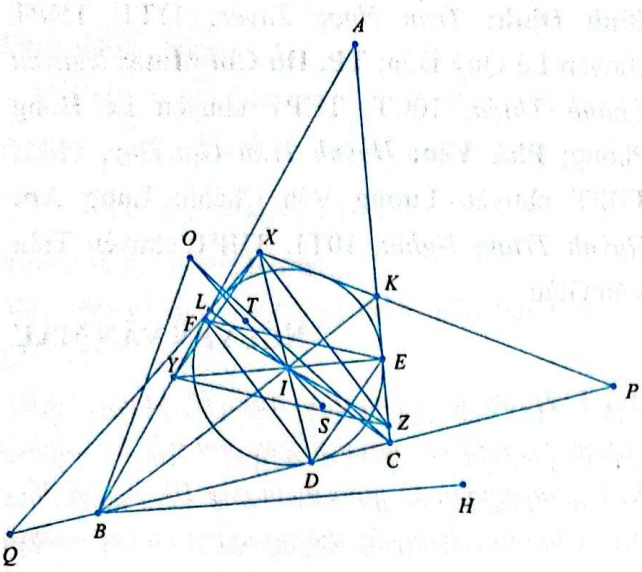
Vì X và Y đối xứng với nhau qua $CL\equiv CI\perp DE$, suy ra $IX=IY$ và $XY\parallel DE$ (1).

Tương tự $IX=IZ$ và $XZ\parallel DF$ (2).

Vì $KP\perp BO; KB\perp DF; BD=BF; BH\perp AC$ nên, theo bổ đề 1, ta có:

$$\begin{aligned}(KP,KB)&\equiv(BO,DF)\equiv(FD,BH)\\&\equiv(KB,AC)(\mathrm{mod}\,\pi).\end{aligned}$$

Được quét bằng CamScanner



Điều đó có nghĩa là các đường thẳng KP, KA đối xứng với nhau qua KB (3).

Từ (3), chú ý rằng KA tiếp xúc với (I), suy ra $XP \equiv KP$ tiếp xúc với (I).

Từ (3), chú ý rằng các đường thẳng BP, BA đối xứng với nhau qua KB, suy ra:

$$(PQ,PX) \equiv (PB,PK) \equiv -(AB,AK) \equiv -(AB,AC) (\text{mod}\, \pi).$$

Tương tự $XQ \equiv LQ$ tiếp xúc với (I) và

$$(QP,QX) \equiv -(AC,AB) (\text{mod}\, \pi).$$

Vậy XP, XQ cùng tiếp xúc với (I) và

$$(PQ,PX) \equiv -(QP,QX) (\text{mod}\, \pi).$$

Nói cách khác (I) là đường tròn nội tiếp tam giác XPQ và tam giác XPQ cân tại X.

Do đó X, I, D thẳng hàng.

Từ đó, chú ý rằng Y, E là ảnh của X, D qua phép đối xứng trục CL, suy ra Y, I, E thẳng hàng (4).

Tương tự Z, I, F thẳng hàng (5).

Từ (1), (2), (4) và (5) suy ra $\dfrac{\overline{IY}}{\overline{IE}} = \dfrac{\overline{IX}}{\overline{ID}} = \dfrac{\overline{IZ}}{\overline{IF}} = k$.

Từ (1), (2), (4) và (5), chú ý rằng I cùng là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác XYZ và DEF, suy ra tam giác DEF là ảnh của tam giác XYZ qua phép vị tự V_I^k.

Do đó I, T, S thẳng hàng. Vậy, theo bổ đề 2, ta có I, T, O thẳng hàng (đpcm).

Nhận xét. 1) Bài toán này không khó, chỉ có 5 bạn tham gia giải.

2) Kết quả cơ bản trong lời giải là các tam giác XYZ và DEF là ảnh của nhau qua phép vị tự tâm I. Tuy nhiên cả 5 bạn đều đi đến kết quả trên theo những cách khá phức tạp.

3) Y, Z theo thứ tự thuộc AB, AC.

4) Xin nêu tên cả 5 bạn: **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Duy Phúc*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Nam:** *Nguyễn Duy Phúc*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Đồng Nai:** *Lê Bảo Khánh*, 12T, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Nguyễn Ngọc Khang*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Long An:** *Kiều Gia Bảo*, THPT chuyên Trần Văn Giàu.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/566. *Một vệ tinh địa tĩnh ở độ cao 36600 km so với đài phát hình trên mặt đất nằm trên đường thẳng nối vệ tinh và tâm Trái Đất. Coi Trái Đất là một hình cầu có bán kính $R = 6400$ km. Vệ tinh nhận sóng truyền hình từ đài phát rồi phát lại tức thời tín hiệu đó về Trái Đất. Biết sóng mang hình có bước sóng không đổi khi lan truyền ở $\lambda = 0{,}5$ m ; tốc độ truyền sóng $c = 3.10^8$ m/s. Tính khoảng thời gian lớn nhất mà sóng truyền hình đi từ đài phát đến Trái Đất.*

Lời giải. Thời gian lớn nhất mà sóng truyền hình đi từ đài phát đến Trái Đất chính là thời gian sóng đi từ đài phát đến vệ tinh sau đó từ vệ tinh truyền về Trái Đất theo phương tiếp tuyến với Trái Đất (hình dưới).

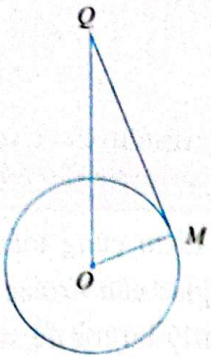
Khoảng cách lớn nhất đó là:

$$d = QM + 36\,600$$
$$= \sqrt{(36\,600 + 6\,400)^2 - 6\,400^2} + 36\,600$$
$$\approx 79121 \text{ km}.$$

Khoảng thời gian lớn nhất mà sóng truyền hình đi từ đài phát đến Trái Đất:

Được quét bằng CamScanner

$$t = \frac{d}{c} = \frac{79121000}{3.10^8} \approx 0{,}26\text{s}.$$



Nhận xét. Chúc mừng các bạn *Đặng Hoàng Lương*, 11A1, THPT Yên Thành 2, Nghệ An đã có lời giải đúng.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/566. *Hiệu suất truyền tải điện năng một công suất P từ máy phát điện đến nơi tiêu thụ là 35%. Dùng máy biến áp lí tưởng có tỉ số giữa cuộn thứ cấp và cuộn sơ cấp là* $\frac{N_2}{N_1} = 5$ *để tăng điện áp truyền tải. Hiệu suất truyền tải sau khi sử dụng máy biến áp là bao nhiêu?*

Lời giải. Theo đề bài: $\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = 5$

$$\begin{cases} h_1 = 1 - H_1 = \dfrac{\mathcal{P}R}{U_1^2 \cos^2\varphi} \\ h_2 = 1 - H_2 = \dfrac{\mathcal{P}R}{U_2^2 \cos^2\varphi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1-H_2}{1-H_1} = \left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1-H_2}{1-0{,}35} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow H_2 = 0{,}974 = 97{,}4\%.$$

Nhận xét. Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng cho đề ra kì này: *Lê Định Công*, 10 A1, *Huỳnh Trịnh Vĩnh Phúc*, 11A1, THPT Lê Thánh Tông, Q. Tân Phú, **TP. Hồ Chí Minh**; *Đặng Hoàng Lương*, 11A1, THPT Yên Thành 2, **Nghệ An**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

PROBLEMS ... (Tiếp theo trang 21)

Problem T8/570. Given triangle ABC inscribed in a circle with radius 1. Let G be the triangle's centroid. Prove that

$$\frac{AB}{GC} + \frac{BC}{GA} + \frac{CA}{GB} \geq AB + BC + CA.$$

Problem T9/570. Given three numbers a, b, c which are larger than $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ and satisfy $abc = 1$. Prove that

$$\frac{1}{a^2+a-1} + \frac{1}{b^2+b-1} + \frac{1}{c^2+c-1} \geq 3.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/570. Prove that, for each integer value of a, the equation $x^3 + x + a^2 = y^2$ has at least one solution $(x; y)$ consisting of two positive integers.

Problem T11/570. Consider 2022 arbitrary real numbers $a_0, a_1, a_2, ..., a_{2021}$ with $a_1 = a_{2020} = 0$, and the remaining numbers are different from 0. Prove that for any real number k

$$|a_0| - |a_{2021}| \leq \sum_{i=0}^{2019} |a_i - k a_{i+1} - a_{i+2}|.$$

Problem T12/570. Given a triangle ABC inscribed in a circle (O) and I is an arbitrary point. The tangent line at B of (O) intersects the circumcircle of the triangle ABI at D; the tangent line at C of (O) intersects the circle circumcircle to triangle AIC at point E. Let P be the circumcenter of the triangle DIE. Prove that P lies on the perpendicular bisector of line segment BC.

NGUYEN PHU HOANG LAN
(University of Education, VNU, Hanoi)

Được quét bằng CamScanner



TÔ MÀU ĐIỂM TRONG BÀI TOÁN TỔ HỢP

CAO NGUYÊN MINH HIỀN - CAO MINH QUANG
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh long)

Tô màu và phủ hình là một mảng quan trọng của toán tổ hợp. Ngoài những dạng toán phủ hình chúng ta còn gặp nhiều bài toán về tô màu một số số, một số điểm nào đó của tập hợp. Đa số các bài toán này không có cách giải tổng quát, nên học sinh rất khó khăn khi tiếp cận và trình bày lời giải. Trong bài viết này, chúng tôi tổng hợp, hệ thống, phân tích cách tiếp cận và khai thác giả thiết chuỗi bài toán có nội dung "*Tô màu điểm*" nhằm phục vụ cho công tác bồi dưỡng học sinh giỏi đạt hiệu quả cao nhất.

Việc giải quyết bài toán "*Tô màu điểm*" cần sử dụng một số phương pháp quen thuộc của toán hình học tổ hợp. Do đó, học sinh cần được chuẩn bị kiến thức và kỹ năng vận dụng một cách thành thạo một số nguyên lý và các phương pháp thường gặp như: nguyên lý quy nạp; nguyên lý Dirichlet, nguyên lý cực hạn, nguyên lý bất biến; phương pháp đếm bằng hai cách; phương pháp phản chứng, ...

Kỹ thuật tô màu điểm được sử dụng qua nhiều bài toán, chúng ta cùng xem xét một số mô hình cụ thể như sau:

Bài toán 1. *Cho 50 điểm trên mặt phẳng mà không có ba điểm nào thẳng hàng. Mỗi điểm trong số các điểm này được tô bởi một trong bốn màu: xanh, đỏ, tím, vàng. Chứng minh có một màu được tô cho cả ba đỉnh của ít nhất 130 tam giác không cân.*

Phân tích. Ở đây có 50 điểm được tô bởi 4 màu khác nhau, và yêu cầu cần đạt là xác định được số tam giác có ba đỉnh cùng màu. Qua phép chia này, giáo viên gợi ý cho học sinh hướng bài toán về theo nguyên lý Dirichlet một cách khá tự nhiên, nhằm cố định số điểm cùng màu, từ đó đếm số tam giác, số tam giác cân từ các điểm này. Cuối cùng dùng nguyên lý bù trừ để suy ra số các tam giác không cân.

Lời giải. Do $50 = 4.12 + 2$ nên theo nguyên lý Dirichlet thì có ít nhất 13 điểm được tô cùng một màu. Các điểm này tạo nên $C_{13}^2 = 78$ đoạn thẳng và $C_{13}^3 = 286$ tam giác. Rõ ràng với mỗi đoạn thẳng AB, ta sẽ có tối đa 2 tam giác cân có đáy là AB. Vì nếu không, chẳng hạn có ba tam giác ABC, ABD, ABE cân thì ba đỉnh C, D, E sẽ thẳng hàng, mâu thuẫn.

Do đó, có tối đa $78.2 = 156$ tam giác cân trong số các tam giác đã tạo thành từ hệ điểm đề cho và tương ứng sẽ có ít nhất $286 - 156 = 130$ tam giác không cân.

Bài toán 2. *Mỗi điểm trong số 2009 điểm cho trước trên mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu: xanh hoặc đỏ. Biết rằng mỗi đường tròn đơn vị có tâm màu xanh đi qua đúng hai điểm đỏ. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu điểm xanh?*

Phân tích. Bài toán này đòi hỏi học sinh làm rõ mối quan hệ giữa các đường tròn đơn vị có tâm xanh với các điểm màu đỏ được chứa trong nó. Dùng quy tắc nhân có thể đếm được số cặp điểm màu đỏ và tương ứng với số đường tròn tâm xanh. Từ đó đánh giá được tổng số điểm xanh đỏ trên mặt phẳng. Điểm sáng trong bài toán này là chỉ ra một cách tô màu thỏa đề bài, chính là mô hình mà 45 điểm đỏ được xếp trên một đoạn thẳng có độ dài bằng 1.

Lời giải. Rõ ràng mỗi cặp điểm đỏ thuộc tối đa hai đường tròn có tâm màu xanh. Gọi n là số

Được quét bằng CamScanner

điểm đỏ thì số cặp tương ứng là $\frac{n(n-1)}{2}$ và sẽ không có quá $n(n-1)$ đường tròn có tâm xanh. Suy ra tổng số điểm không vượt quá $n(n-1)+n=n^2$ điểm. Do đó, $n^2 \geq 2009$ hay $n \geq 45$. Khi đó, số điểm xanh không vượt quá $2009-45=1964$ điểm.

Ta sẽ chỉ ra cách xây dựng mô hình thỏa mãn đề bài như sau: Xếp 45 điểm đỏ phân biệt lên một đoạn thẳng có độ dài bằng 1. Sau đó vẽ 45 đường tròn đơn vị có tâm đỏ. Rõ ràng chúng sẽ đôi một cắt nhau và các giao điểm đều phân biệt. Tổng số giao điểm là $2.C_{45}^2=1980$.

Ta sẽ tô màu xanh cho đúng 1964 giao điểm trong số đó thì rõ ràng mỗi đường tròn đơn vị tâm xanh sẽ đi qua đúng hai điểm đỏ. Mô hình này thỏa đề bài.

Vậy số điểm xanh lớn nhất là 1964.

Bài toán 3. *Mỗi số từ 1 đến 25 được tô xanh hoặc đỏ. Tìm các cách tô màu thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

i) *Số 5 tô màu đỏ.*

ii) *Nếu hai số x,y khác màu và $x+y \leq 25$ thì số $x+y$ được tô màu xanh.*

iii) *Nếu hai số x,y khác màu và $xy \leq 25$ thì số xy được tô màu đỏ.*

Phân tích. Cần tô màu 25 số thỏa mãn cả 3 yêu cầu đặt ra, do iii) nên ta xét bài toán ở hai trường hợp, số 1 màu đỏ và số 1 màu xanh. Bài toán này đòi hỏi tính toán chi tiết và suy luận lôgic.

Lời giải.

• TH1: Số 1 được tô màu đỏ.

Giả sử tồn tại $k \in \{2,3,4,...,25\}$ được tô màu xanh thì 1 và k khác màu và tích $1.k \leq 25$ nên k được tô màu đỏ, vô lý.

Vậy tất cả các số từ 1 đến 25 được tô màu đỏ.

• TH2: Số 1 được tô màu xanh.

Theo i) thì số 5 được tô màu đỏ và do $5=4+1$ nên số 4 xanh. Vì $5=2+3$ đỏ nên số 2 và số 3 được tô cùng màu. Nếu 2 và 3 cùng màu đỏ thì $3=2+1$ được tô xanh, vô lý. Vậy 2 và 3 đều được tô màu xanh.

Các số còn lại được tô như sau

6=5+1	Xanh	16=15+1	Xanh
7=5+2		17=15+2	
8=5+3		18=15+3	
9=5+4		19=15+4	
10 = 5.2	**Đỏ**	**20 = 2.10**	**Đỏ**
11=5+6	Xanh	21=20+1	Xanh
12=5+7		22=20+2	
13=5+8		23=20+3	
14=5+9		24=20+4	
15 = 5.3	**Đỏ**	25=1.25	Xanh
		25= 10+15	**Đỏ**

Tóm lại có 3 cách tô màu các số từ 1 đến 25 như sau

Cách 1: Tô tất cả 25 số này cùng là màu đỏ.

Cách2: Tô các số: $1,2,3,4,6,7,8,9,11,12,13,14,16,17,18,19,21,22,23,24,25$ màu xanh; các số $5,10,15,20$ màu đỏ.

Cách 3: Tô các số: $1,2,3,4,6,7,8,9,11,12,13,14,16,17,18,19,21,22,23,24$ màu xanh;

các số $5,10,15,20,25$ màu đỏ.

Xin giới thiệu bài toán 3.1 với mô hình 15 số nguyên dương đầu tiên để bạn đọc nghiên cứu.

Bài toán 3.1. *Mỗi số từ 1 đến 15 được tô xanh hoặc đỏ. Tìm các cách tô màu thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

i) *Số 15 tô màu đỏ.*

ii) *Nếu x,y khác màu và $x+y \leq 15$ thì số $x+y$ được tô màu xanh.*

iii) *Nếu x,y khác màu và $xy \leq 15$ thì số xy được tô màu đỏ.*

Được quét bằng CamScanner

Bài toán 4. *Cho n là một số nguyên dương chẵn, $n \geq 4$. Ta tô màu mỗi số trong các số nguyên dương từ 1 đến n sao cho $\frac{n}{2}$ số trong chúng được tô màu xanh và $\frac{n}{2}$ số còn lại được tô màu đỏ. Với mỗi cách tô như vậy, kí hiệu f_n là số các số nguyên dương bất kì mà nó có thể viết được dưới dạng tổng hai số khác màu.*

a) *Tìm tất cả các giá trị của f_4.*

b) *Khi $n \geq 8$, chứng minh rằng $f_n < 2n-3$. Hãy chỉ ra một cách tô màu thỏa mãn $f_n = 2n-5$.*

Phân tích. Với 4 số nguyên dương đầu tiên, thực hiện tô màu lần lượt các số, ta tính được $f_4 = 3$, $f_4 = 4$.

Với $n \geq 8$. Các số viết được thành tổng của hai số khác màu sẽ nhận giá trị từ số nhỏ nhất là $1+2=3$ đến số lớn nhất là $(n-1)+n=2n-1$. Do đó $f_n \leq 2n-3$.

Bước đánh giá này cơ bản nhưng rất quan trọng, chỉ cần xét trường hợp dấu "=" có xảy ra hay không, là ta có thể giải quyết được yêu cầu bài toán. Rõ ràng ở đây, dấu "=" không xảy ra (chứng minh bằng phản chứng). Vậy cần chỉ ra một cách tô màu thỏa mãn $f_n = 2n-5$.

Lời giải. a) Không mất tính tổng quát, ta giả sử số 1 được tô màu xanh. Ta có các trường hợp sau:

- 1X, 2X, suy ra 3Đ, 4Đ; các số viết được thành tổng hai số khác màu là 4, 5, 6; hay $f_4 = 3$.
- 1X, 2Đ, 3X, suy ra 4Đ; các số viết được thành tổng hai số khác màu là 3, 5, 7; hay $f_4 = 3$.
- 1X, 2Đ, 3Đ, suy ra 4X; các số viết được thành tổng hai số khác màu là 3, 4, 6, 7; hay $f_4 = 4$.

Vậy $f_4 \in \{3;4\}$.

b) • Với $n \geq 8$. Các số viết được thành tổng của hai số khác màu sẽ nhận giá trị từ số nhỏ nhất là $1+2=3$ đến số lớn nhất là $(n-1)+n=2n-1$, do đó $f_n \leq 2n-3$.

Nếu $f_n = 2n-3$ thì tất cả các số từ 3 đến $n-1$ đều được viết thành tổng của hai số khác màu. Ta có thể coi 1X, 2Đ. Vì các số 4 đến $n-1$ cũng được viết thành tổng của hai số khác màu cho nên 3Đ, 4Đ,..., $(n-2)$Đ.

Lúc này, có tất cả $n-3$ số được tô màu đỏ, nhưng $n-3-\frac{n}{2}=\frac{n}{2}-3>0$ với mỗi n chẵn, $n \geq 8$, hay nói cách khác, số số được tô màu Đ lớn hơn $\frac{n}{2}$. Điều này trái với giả thiết của bài toán. Do đó $f_n < 2n-3$.

• Ta chỉ ra cách để tô màu thỏa mãn $f_n = 2n-5$

Giả sử, $n=2k$ ta tô X tất cả k số $1,2,4,6,2k-2$ và tô Đ k số còn lại là $3,5,7,2k-1,2k$ thì tất cả các số được viết thành tổng của hai số khác màu là $4,5,6,7,...,4k-2$, có tất cả $(4k-2)-4+1=4k-5=2n-5$ số. Bài toán được thỏa mãn.

Bình luận. Có thể thay đổi cách đặt câu hỏi b, chẳng hạn như "*Tìm giá trị lớn nhất của f_n*". Cách hỏi này xem như rút câu dẫn, nâng mức độ của bài toán lên. Bản thân người viết cảm thấy cách hỏi này sẽ hay hơn. Tuy nhiên cách làm như vậy chỉ phù hợp với nhóm học sinh giỏi, đã làm thành thạo dạng cực trị tổ hợp. Còn nếu sử dụng để dạy nhóm học sinh mới làm quen với tổ hợp nói chung, thì nên dùng câu dẫn như cách hỏi của bài toán 4 nêu trên, sẽ giúp học sinh có định hướng và có hứng thú tìm lời giải.

Bài toán 5. *Cho đa giác đều (H) có 2017 đỉnh mà mỗi đỉnh được tô bởi một trong ba màu: xanh, đỏ, vàng với số lượng lần lượt là a,b,c sao cho các số a,b,c đều lẻ. Gọi x,y,z lần lượt là số tam giác cân có ba đỉnh thuộc (H) mà các đỉnh của*

Được quét bằng CamScanner

mỗi tam giác được tô bởi: một màu, hai màu, ba màu.

a) *Chứng minh rằng* $3x+y=3\left(C_a^2+C_b^2+C_c^2\right)$.

b) *Chứng minh rằng* $z>0$.

Phân tích. Bài toán được phát biểu khá phức tạp, tuy nhiên với nhận xét hai đỉnh bất kỳ thì có đúng 3 cách chọn một đỉnh thứ ba để được một tam giác cân, ta đếm các bộ (M,N,P) với đỉnh M,N không tính thứ tự, tô cùng màu và nằm trong tam giác cân tại P bằng hai cách: Đếm theo màu và đếm theo loại đỉnh.

Để chứng minh được z là số dương, ta dùng phương pháp phản chứng, tức là giả sử $z=0$. Khi đó chỉ có tam giác cân loại x hoặc loại y thỏa mãn đề bài. Do đó số tam giác cân loại x hoặc loại y là $x+y=C_{2017}^2$. Kết hợp với đánh giá ở câu a) để dẫn đến điều mâu thuẫn.

Lời giải. a) Nhận xét, với hai đỉnh tùy ý trong 2017 đỉnh của đa giác (H) thì có đúng 3 cách chọn một đỉnh thứ 3 để được một tam giác cân.

Thật vậy, giả sử có hai đỉnh A,B và cung nhỏ AB chứa trong đó k điểm. Trước hết, vì 2017 lẻ nên trên cung lớn hoặc trên cung nhỏ AB sẽ có đúng một điểm C cách đều A,B. Ngoài ra, đường tròn (A,AB) và (B,BA) cắt (H) tại các điểm D,E cũng thỏa mãn yêu cầu.

Chú ý rằng $(2017,3)=1$ nên không có tam giác đều nào trong các đỉnh của (H), suy ra các điểm D,E,F là duy nhất.

Từ đó, ta đếm các bộ (M,N,P) với đỉnh M,N không tính thứ tự, tô cùng màu và nằm trong tam giác cân tại P.

• Đếm theo màu:

Chọn hai đỉnh M,N cùng màu, có $C_a^2+C_b^2+C_c^2$ cách. Chọn tam giác P cân và chứa hai điểm đó, có thêm 3 cách; nên số bộ trên là $3\left(C_a^2+C_b^2+C_c^2\right)$.

• Đếm theo loại đỉnh:

Tam giác loại x,y,z cho tương ứng $3,1,0$ cặp đỉnh cùng màu, nên có $(3x+y)$ bộ.

So sánh kết quả ở hai cách đếm, ta được:

$$3x+y=3\left(C_a^2+C_b^2+C_c^2\right).$$

b) Giả sử $z=0$. Ta thấy mỗi cách chọn 2 điểm bất kì từ 2017 điểm sẽ xác định đường một tam giác cân loại x hoặc loại y.

Như chứng minh ở câu a, khi đã có 2 đỉnh thì đỉnh thứ 3 của tam giác cân sẽ có 3 cách chọn.

Giả sử chọn được hai điểm cùng màu (chẳng hạn là màu xanh).

- Nếu ba điểm còn lại nếu có một điểm xanh thì tam giác tạo thành có 3 đỉnh được tô bởi 1 màu, thuộc loại x.
- Nếu ba điểm còn lại không có điểm nào màu xanh thì tam giác tạo thành có 3 đỉnh được tô bởi 2 màu, thuộc loại y.

Do đó số tam giác cân loại x hoặc loại y là:

$$x+y=C_{2017}^2.$$

Từ đẳng thức đã chứng minh ở câu a, ta có:

$$3x+y=3\left(C_a^2+C_b^2+C_c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x+y=3\left(\frac{a(a-1)}{2}+\frac{b(b-1)}{2}+\frac{c(c-1)}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3(x+y)-2y=\frac{3}{2}\left(a^2+b^2+c^2-a-b-c\right)$$

$$\Leftrightarrow 3C_{2017}^2-2y=\frac{3}{2}\left(a^2+b^2+c^2-a-b-c\right);$$

$$a+b+c=2017$$

$$\Leftrightarrow 3.\frac{2017.2016}{2}-2y=\frac{3}{2}\left(a^2+b^2+c^2-2017\right)$$

$$\Leftrightarrow 3.2017.2016-4y=3\left(a^2+b^2+c^2-2017\right)$$

$$\Leftrightarrow 3.2017.2017-4y=3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 3.2017^2\equiv 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ (\text{mod}\,4).$$

Tuy nhiên a,b,c đều lẻ nên $3\left(a^2+b^2+c^2\right)\equiv 1\ (\text{mod}\,4)$, còn $3.2017^2\equiv 3\ (\text{mod}\,4)$

Được quét bằng CamScanner

mâu thuẫn với kết luận trên. Điều này chứng tỏ $z > 0$.

Bình luận. Bài toán 5 trích từ bài gốc của đề IMO Shortlist, 2016 như sau "*Cho đa giác đều (H) có 2017 đỉnh mà mỗi đỉnh được tô bởi một trong ba màu: xanh, đỏ, vàng với số lượng lần lượt là a,b,c sao cho các số a,b,c đều lẻ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác cân có ba đỉnh lấy từ (H) được tô bởi ba màu khác nhau.*"

Vấn đề đặt ra khá phức tạp vì có nhiều đại lượng được đề cập đến ở đây, học sinh rất khó tìm được hướng đi đúng. Vì vậy trong quá trình dạy học, giáo viên đã dẫn dắt học sinh tiếp cận và tìm hướng giải bằng cách sử dụng kỹ thuật "câu dẫn" trong các bài toán khó. Do vậy câu hỏi gốc của bài toán được chia thành hai ý nhỏ là ý a), và ý b). Từ đó học sinh có bước đệm để tiến gần hơn đến điều cần chứng minh.

Trên đây là một số bài toán có sự phân tích và hướng dẫn cách tiếp cận từ giáo viên. Phần tiếp theo của chuyên đề là các bài toán tô màu điểm có lời giải để bạn đọc tham khảo thêm.

Bài toán 6. *Trên mặt phẳng, cho một số điểm màu đỏ và một số điểm màu xanh. Người ta nối các điểm khác màu lại với nhau sao cho mỗi điểm xanh được nối với một hoặc hai điểm đỏ, ngược lại mỗi điểm đỏ được nối với ít nhất một điểm xanh. Chứng minh rằng ta có thể xóa đi không quá một nửa số điểm (trong số các điểm đã cho) sao cho với các điểm còn lại, mỗi điểm màu xanh được nối với đúng một điểm màu đỏ.*

Lời giải. Giả sử m,n tương ứng là số điểm màu xanh và số điểm màu đỏ đã cho (m, n là các số nguyên dương). Ta gọi một điểm màu xanh là điểm xanh loại 1, nếu nó được nối với một điểm màu đỏ. Và gọi một điểm màu xanh là điểm xanh loại 2, nếu nó được nối với hai điểm màu đỏ. Giả sử có x điểm xanh loại 1 và y điểm xanh loại 2, thì $x,y \in \mathbb{N}$ và $x+y=m$, đặt $k=\left[\frac{n}{2}\right]$.

Ta gọi một phương án xóa điểm là phương án tốt nếu các điểm còn lại, mỗi điểm màu xanh được nối với đúng một điểm màu đỏ và trong các điểm bị xóa có đúng k điểm đỏ.

• Xét phương án xóa điểm như sau: xóa k điểm màu đỏ tùy ý và xóa các điểm xanh gồm:

- Tất cả các điểm xanh loại 1 mà mỗi điểm đều được nối với điểm đỏ trong số k điểm đã bị xóa.

- Tất cả các điểm xanh loại 2 mà mỗi điểm đều không nối với điểm màu đỏ nào trong số k điểm đã bị xóa.

Dễ thấy, phương án xóa điểm nêu trên là một phương án tốt.

• Ngược lại, trong mỗi phương án xóa tốt, cùng với k điểm màu đỏ đã bị xóa ta phải xóa tất cả các điểm màu xanh có tính chất như mô tả ở trên.

Từ đó suy ra, có tất cả C_n^k phương án tốt và

- Mỗi điểm màu xanh loại 1 sẽ bị xóa trong C_{n-1}^{k-1} phương án.

- Mỗi điểm màu xanh loại 2 sẽ bị xóa trong $\left(C_{n-2}^{k-2}+C_{n-2}^{k}\right)$ phương án.

Do đó, tổng số điểm xanh (kể cả lặp) bị xóa trong tất cả C_n^k phương án tốt là:

$$S = xC_{n-1}^{k-1} + y\left(C_{n-2}^{k-2} + C_{n-2}^{k}\right).$$

Theo nguyên lý Dirichlet, suy ra tồn tại một phương án tốt mà trong đó số điểm xanh bị xóa không vượt quá $t=\frac{S}{C_n^k}$.

Mặt khác $C_{n-1}^{k-1} \le \frac{1}{2}C_n^k$ và $C_{n-2}^{k-2}+C_{n-2}^{k} \le \frac{1}{2}C_n^k$, ta có $t \le \frac{x+y}{2}=\frac{m}{2}$, kết hợp điều này với cách đặt $k=\left[\frac{n}{2}\right]$ ta được $t+k \le \frac{m+n}{2}$, nghĩa là phương án tốt này thỏa mãn điều kiện đề bài.

Bài toán 7. *Xét số nguyên dương $n>1$, người ta muốn tô tất cả các số tự nhiên bởi một trong hai*

Được quét bằng CamScanner

màu: xanh hoặc đỏ sao cho các điều kiện sau đồng thời thỏa mãn:

i) Mỗi số tô một màu, mỗi màu tô vô số số.

ii) Tổng của n số đôi một khác nhau được tô cùng màu là một số cùng màu.

Có thể thực hiện phép tô màu nói trên hay không, nếu:

a) $n = 2012$? b) $n = 2013$?

Lời giải. a) Giả sử tô được 2012 số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu. Vì mỗi màu tô vô hạn số nên sẽ:

Tồn tại một số a_1 tô màu xanh và $b_1 = a_1 + 1$ tô màu đỏ. Tồn tại số b_2 tô màu đỏ và $a_2 = b_2 + 1$ tô màu xanh.

.....

Tương tự, cũng có số b_{2012} tô màu đỏ và $a_{2012} = b_{2012} + 1$ tô màu xanh.

Từ đây ta có số $n = \sum_{i=1}^{2012} a_i$ được tô màu xanh và số $m = \sum_{i=1}^{2012} b_i$ được tô màu đỏ (*).

Tuy nhiên với cách chọn trên thì $n = m$, điều này mâu thuẫn với cách tô màu ở (*). Do đó không thể thực hiện cách tô màu theo yêu cầu khi $n = 2012$.

b) Với $n = 2013$ ta sẽ tô màu như sau: Các số chẵn tô màu xanh, các số lẻ tô màu đỏ. Khi đó tổng của 2013 số chẵn là số chẵn, được tô cùng màu xanh với các số chẵn trước đó. Tổng của 2013 số lẻ màu đỏ là một số lẻ, được tô cùng màu đỏ với các số lẻ trước đó. Vậy khi $n = 2013$ thì thực hiện được phép tô màu.

Bình luận. Bài toán 7 giới thiệu hai mô hình cụ thể với 2012 và 2013 số. Ta có thể đặt ra câu hỏi tổng quát hơn với n chẵn và n lẻ để tìm lời giải tổng quát.

Bài toán 8. *Tập hợp các số nguyên dương được tô bởi hai màu: đen hoặc trắng. Giả sử rằng tổng của hai số khác màu luôn được tô đen và có vô hạn số tô màu trắng. Gọi a là một số nguyên dương được tô trắng, hỏi số $a^{2015} - a$ được tô màu gì?*

Lời giải. Do tập $\mathbb{N}^*$ vô hạn và bị chặn dưới, lại có vô hạn số tô màu trắng nên tồn tại số nguyên dương bé nhất màu trắng, gọi là số p (*). Ta chứng minh một số nguyên dương được tô màu trắng khi và chỉ khi nó là bội của p.

• Thật vậy, trước tiên ta chứng minh một số màu trắng thì chia hết cho p.

Giả sử tồn tại số k màu trắng, k không chia hết cho p. Ta viết

$$k = lp + r,\ l \in \mathbb{N}^*, 0 < r < p.$$

Ta có $p < k$ và $k = p + (-p + k)$, k, p màu trắng nên $k - p$ cũng màu trắng.

Như vậy với $k - p = (k - 2p) + p$ ta cũng được $k - 2p$ màu trắng.

Tiếp tục quy trình trên ta thu được $k - lp$ màu trắng, cho nên r cũng màu trắng, và $r < p$, điều này mâu thuẫn với giả thiết cực hạn ở (*). Vậy k chia hết cho p.

• Bây giờ, ta giả sử tồn tại một số chia hết cho p mà được tô màu đen. Ta gọi đó là số $m = p.q$, $m, q \in \mathbb{N}^*$, tức là m màu đen, p màu trắng.

Khi đó, $m + p = pq + p = p(q + 1)$ màu đen. Suy ra $p(q + 1) + p = p(q + 2)$ màu đen, ... Tiếp tục quy trình như vậy ta sẽ thu được mọi số $k > p$, k chia hết cho p thì k được tô màu đen. Điều này mâu thuẫn với chứng minh trên là mọi số màu trắng đều chia hết cho p. Vậy một số có màu trắng khi và chỉ khi nó là bội của p.

Ta có số a được tô màu trắng nên $a \vdots p$. Do đó $(a^{2015} - a) \vdots p$ hay $a^{2015} - a$ được tô màu trắng.

Bình luận. Mấu chốt của bài toán 8 là chứng minh được "*Một số có màu trắng khi và chỉ khi nó là bội của p*". Do đó câu hỏi cho đại lượng $a^{2015} - a$ là một ví dụ cụ thể "một bội của p", đại lượng này có thể được thay đổi bằng rất nhiều cách khác nhau, sẽ tạo nên nhiều bài toán khác

Được quét bằng CamScanner

nhau. Một điểm hay khác của bài toán 8 là nó nằm trong số ít các bài toán "hai chiều", dùng được cả chiều thuận và chiều đảo: Vì a được tô màu trắng nên $a:p$, và vì $a:p$ kéo theo $(a^{2015}-a):p$ nên $a^{2015}-a$ được tô màu trắng.

Bài toán 9. *Tìm số nguyên dương n bé nhất $(n>2)$ thỏa mãn tính chất sau: Mọi cách tô hai màu (mỗi điểm tô một màu) cho n điểm khác nhau $A_1, A_2, ..., A_n$ trên một đường thẳng với $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{n-1}A_n$, luôn tồn tại ba điểm là A_i, A_j, A_{2j-i}, $i \le 2j-i \le n$ có cùng một màu.*

Lời giải. Ta phát biểu lại bài toán như sau:

Mỗi số nguyên từ 1 đến $n \ge 3$ được tô bởi một trong hai màu: xanh hoặc đỏ. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất để với mọi cách tô màu, đều tồn tại ba số cùng màu lập thành cấp số cộng.

Với $n \le 8$ ta có thể tô 1, 2, 5, 6 màu xanh và 3, 4, 7, 8 màu đỏ thì không có ba số nào cùng màu mà lập thành cấp số cộng.

Giả sử với $n=9$ ta có cách tô màu các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 để không có ba số nào cùng màu lập thành cấp số cộng.

Giả sử số 5 được tô màu xanh. Ta xét các số 4 và 6 như sau:

- TH1: 4 và 6 cùng màu, dĩ nhiên phải là cùng màu đỏ, thì 2 và 8 phải xanh. Khi đó 2, 5, 8 là một cấp số cộng mà lại được tô cùng màu xanh. Điều này trái với giả thiết phản chứng bên trên.
- TH2: 4 và 6 khác màu, do tính đối xứng nên ta giả sử 4 màu xanh và 6 màu đỏ. Vì 5 màu xanh nên 3 màu đỏ.

Vì 3 và 6 màu đỏ nên 9 màu xanh.

Vì 5 và 9 màu xanh nên 1 màu đỏ.

Vì 5 và 9 màu xanh nên 7 màu đỏ.

Vì 6 và 7 màu đỏ nên 8 màu xanh.

Vì 5 và 8 màu xanh nên 2 màu đỏ.

Khi đó 1, 2, 3 là một cấp số cộng mà lại được tô cùng màu đỏ. Điều này trái với giả thiết phản chứng bên trên.

Vậy $n=9$ số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn đề bài.

Bình luận. Đối với bài toán 9, việc chuyển giả thiết từ "$A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{n-1}A_n$" luôn tồn tại ba điểm là A_i, A_j, A_{2j-i}, $i \le 2j-i \le n$ có cùng một màu" thành "bộ ba số cùng màu lập thành cấp số cộng" đòi hỏi học sinh có nhiều kinh nghiệm trong việc xét các dãy số. Sau khi chuyển về bài toán tô màu cấp số cộng, học sinh dùng kỹ năng giải toán cực trị tổ hợp, đánh giá và tô màu thủ công từng điểm theo quy trình thì sẽ đạt được mục đích cuối cùng.

Bài toán 10. *Tìm số nguyên dương k bé nhất sao cho ta có thể tô màu các số nguyên dương từ 1 đến 2011 bằng k màu khác nhau để không có hai số nào cùng màu là bội của nhau.*

Lời giải. Ta thấy các số $2^0, 2^1, 2^2, ..., 2^{10}$ không thể nào cùng màu, cho nên số màu cần dùng là $k \ge 11$.

Với $k=11$ ta phân hoạch tập hợp các số nguyên dương từ 1 đến 2011 thành 11 tập hợp như sau:

$$A_i = \{2^i, 2^i+1, ..., 2^{i+1}-1\},\ i = 0,1,2,...,9$$

và $A_{10} = \{2^{10}, 2^{10}+1, ..., 2011\}$.

(Cụ thể ta có thể viết một vài tập là $A_0 = \{2^0\}$, $A_1 = \{2^1, 3\}$, $A_2 = \{2^2, 5, 6, 7\}, ...$).

Rõ ràng trong từng tập hợp như vậy, không có hai số nào là bội của nhau. Đến đây ta dùng màu thứ $i+1$ để tô cho các số thuộc tập A_i thì phép tô này thỏa mãn đề bài và 11 màu là số ít nhất ta cần tìm.

Bình luận. Một bài toán cực trị tổ hợp hỏi về số màu ít nhất, và mối quan hệ ở đây là "chia hết". Việc dùng các phần tử $2^0, 2^1, 2^2, ..., 2^{10}$ để phân hoạch tập hợp đã cho thành các "lớp" mà trong đó không có số nào là bội của nhau bắt nguồn từ việc ta cần tìm các "lớp" chứa nhiều nhất các số không chia hết cho nhau. Do vậy, ước nguyên tố bé nhất đầu tiên được xét đến phải là 2. Cách giải không thay đổi khi ta thay 2011 bằng một số nguyên dương bất kì.

Bài viết trên được thực hiện trên kinh nghiệm của nhóm giáo viên dạy tổ hợp, có tham khảo, sưu tầm

Được quét bằng CamScanner

và chọn lọc từ nhiều nguồn tài liệu khác nhau để phục vụ quá trình dạy bồi dưỡng các đội tuyển học sinh giỏi.

Cuối cùng là một số bài tập dành cho bạn đọc có hướng dẫn và gợi ý giải.

Bài toán 1. *Người ta tô màu tất cả các số nguyên dương bằng hai màu trắng và đen. Biết rằng tổng của hai số khác màu là một số được tô đen và có vô hạn các số được tô màu trắng. Gọi số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn 1 được tô đen là q. Chứng minh rằng q là số nguyên tố.*

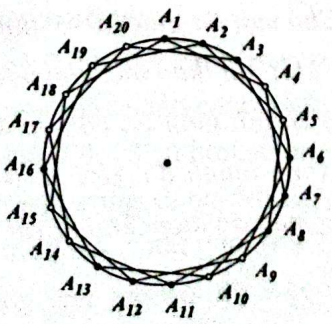
Lời giải. Giả sử số 1 được tô màu trắng. Nếu q là số được tô màu đen thì $q+1$ được tô màu đen, suy ra $q+2=(q+1)+1$ được tô màu đen. Cứ tiếp tục như vậy thì mọi số $n>q$ đều được tô màu đen. Do đó chỉ có hữu hạn số được tô màu trắng, mâu thuẫn giả thiết. Vậy số 1 được tô màu đen.

Nếu $q=2$ hoặc $q=3$ thì ta có q là số nguyên tố.

Nếu $q>3$, khi đó $1<q-2<q$ do đó $q-2$ được tô màu trắng nên $(q-2)+1=q-1$ được tô màu đen, mâu thuẫn vì $q-1<q$. Vậy $q=2$ hoặc $q=3$.

Bài toán 2. [Á Rập, 2015] *Mười đỉnh của đa giác đều 20 cạnh $A_1A_2...A_{20}$ được tô đen và các đỉnh còn lại được tô trắng. Xét tập S bao gồm đường chéo A_1A_4 và tất cả các đường chéo có cùng độ dài với nó. Chứng minh rằng trong S, số đường chéo có hai đầu mút cùng màu đen bằng với số đường chéo có hai đầu mút cùng màu trắng. Từ đó tìm tất cả các giá trị có thể có của số đường chéo có hai đầu mút cùng màu đen trong tập S.*

Lời giải.



Kí hiệu như hình vẽ, vì $\gcd(20,3)=1$ nên các đường chéo thuộc S có thể tạo thành một dãy đi qua hết tất cả các đỉnh của đa giác đã cho.

Vì mỗi đỉnh được tô đen hoặc trắng nên ta có thể chia chúng thành các nhóm gồm các đỉnh đen liên tiếp và các đỉnh trắng liên tiếp.

Rõ ràng, một nhóm đen nằm giữa hai nhóm trắng và một nhóm trắng nằm giữa hai nhóm đen. Suy ra số lượng nhóm trắng và nhóm đen bằng nhau, đặt là k.

Trong một nhóm có kích thước là a thì có số đường chéo là $a-1$. Tổng số đường chéo trong nhóm trắng là $10-k$, tổng số đường chéo có hai đầu mút màu trắng và tổng số đường chéo có hai đầu mút màu đen là bằng nhau và cùng bằng $10-k$.

Do đó, số đường chéo cần tìm có thể nhận các giá trị là $1,2,3,...,10$.

Bài toán 3. [Việt Nam, 2014] *Cho đa giác đều 103 cạnh. Tô màu đỏ 79 đỉnh của đa giác và tô màu xanh các đỉnh còn lại. Gọi A là số cặp đỉnh đỏ kề nhau và B là số cặp đỉnh xanh kề nhau.*

a) *Tìm tất cả các giá trị có thể nhận được của cặp (A,B).*

b) *Xác định số cách tô màu các đỉnh của đa giác để $B=14$. Biết hai cách tô màu được xem là như nhau nếu chúng có thể nhận được nhau qua một phép quay quanh tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác.*

Lời giải. a) Gọi k là số dãy gồm các đỉnh liên tiếp được tô xanh và bị chặn hai đầu bởi đỉnh màu đỏ, và h là số dãy gồm các đỉnh liên tiếp được tô đỏ và bị chặn hai đầu bởi đỉnh màu xanh.

Dễ thấy giữa hai dãy đỏ là một dãy xanh và giữa hai dãy xanh là một dãy đỏ nên $k=h$.

Gọi $a_1,a_2,...,a_k$ là số lượng các đỉnh trong các dãy xanh, $b_1,b_2,...,b_k$ là số lượng các đỉnh trong

Được quét bằng CamScanner

các dãy đỏ thì $\sum_{i=1}^{k} b_i = 79$ và $\sum_{i=1}^{k} a_i = 103 - 79 = 24$.

Trong một dãy cùng màu có số lượng t thì có $t-1$ cặp đỉnh liên tiếp cùng màu.

Suy ra $A = \sum_{i=1}^{k} (b_i - 1) = 79 - k$, tương tự $B = 24 - k$. Do đó các cặp (A, B) có dạng

$$(79-k, 24-k) \text{ với } 0 \le k \le 24.$$

Vậy có tất cả 25 cặp như thế.

b) Do $B = 14$ nên theo đẳng thức đã xây dựng ở trên thì $14 = 24 - k \Leftrightarrow k = 10$. Như thế, có tổng cộng 10 dãy xanh và 10 dãy đỏ. Số nghiệm nguyên dương của các phương trình $\sum_{1}^{k} a_i = 24$ và $\sum_{i=1}^{k} b_i = 79$ lần lượt là C_{23}^{9} và C_{78}^{9}.

Do xếp trên một vòng tròn nên chỉ xét vị trí tương đối của nhóm với nhau chứ không xét vị trí cố định của từng nhóm.

Vậy số cách tô màu thỏa mãn đề bài là $\frac{1}{10} C_{23}^{9}.C_{78}^{9}$.

Bài toán 4. *Giả sử S là tập hợp hữu hạn các điểm mà mỗi điểm của nó được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Gọi $A_1, A_2, ..., A_{68}$ là các tập con của tập S mà trong mỗi tập chứa đúng 5 điểm thỏa mãn đồng thời*

- Mỗi tập trong $A_1, A_2, ..., A_{68}$ chứa một điểm đỏ.

- Với ba điểm bất kì trong S, tồn tại đúng một tập A_i chứa cả ba điểm đỏ.

a) Tìm số phần tử của tập S.

b) Tồn tại hay không một tập con A_i chứa đúng bốn hoặc năm điểm đỏ ? Vì sao ?

Lời giải. a) + Đặt $n = |S|$ thì số tập con có ba phần tử của S là C_n^3.

+ Số tập con có ba phần tử của một tập A_i là C_5^3. Suy ra tất cả các tập con ba phần tử của 68 tập $A_1, A_2, ..., A_{68}$ đã nêu là $68.C_5^3$.

Theo nguyên lý đếm bằng hai cách, ta được:

$$C_n^3 = 68.C_5^3 \Leftrightarrow n = 17.$$

b) Giả sử ngược lại là không tồn tại tập A_i nào chứa đúng bốn điểm đỏ và chứa đúng năm điểm đỏ. Tức là mỗi tập A_i chỉ chứa tối đa ba điểm đỏ.

Gọi B là họ các tập con có ba phần tử của S mà tập con đó chứa đúng một điểm đỏ và hai điểm xanh, gọi là *tập đỏ*.

+ Giả sử trong tập S có r điểm đỏ thì $|B| = C_r^1.C_{17-r}^2$.

+ Mặt khác, với mọi bộ ba điểm đỏ thì có duy nhất một tập hợp A_i chứa chúng, trong tập này có đúng hai điểm xanh nên số *tập đỏ* trong A_i là $C_3^1.C_2^2 = 3$ tập.

Số tập A_i chứa một hoặc hai điểm đỏ là $68 - C_r^3$.

Nếu tập A_i chứa một điểm đỏ thì số *tập đỏ* trong A_i là $C_1^1.C_4^2 = 6$, còn nếu tập A_i chứa hai điểm đỏ thì số *tập đỏ* trong A_i là $C_2^1.C_3^2 = 6$. Vậy số *tập đỏ* là $|B| = 3C_r^3 + (68 - C_r^3).6$.

Theo nguyên lý đếm bằng hai cách, ta được:

$$C_r^1.C_{17-r}^2 = 3C_r^3 + (68 - C_r^3).6$$

$$\Leftrightarrow r^3 - 18r^2 + 137r = 408.$$

Phương trình trên không có nghiệm nguyên nên điều giả sử là sai. Vậy luôn tồn tại một tập con A_i chứa bốn hoặc năm điểm đỏ.

Bài toán 5. *Cho một đa giác 2016 đỉnh cùng được tô màu xanh. Mỗi lần thao tác, cho phép chọn ra k đỉnh liên tiếp và đổi màu tất cả các đỉnh này: đỏ thành xanh, xanh thành đỏ. Hỏi có thể đổi tất cả các đỉnh sang màu đỏ được không với $k = 4, k = 5$ hoặc $k = 64$?*

Được quét bằng CamScanner

Lời giải. Với $k=4$, câu trả lời là có. Vì 2016 chia hết cho 4, ta chỉ cần đổi màu các cụm rời nhau gồm 4 đỉnh liên tiếp.

Với $k=5$, câu trả lời là có. Ta cần đổi màu tất cả các cụm gồm 5 đỉnh liên tiếp, không nhất thiết rời nhau. Khi đó mỗi đỉnh thuộc về 5 cụm nên được đổi màu 5 lần, tức là sẽ chuyển từ xanh sang đỏ.

Với $k=64$, câu trả lời là không. Thật vậy, ta thấy rằng $\gcd(64,2016)=32$ nên ta chia các đỉnh của đa giác thành 32 nhóm, mỗi nhóm gồm các đỉnh có chỉ số đồng dư với nhau theo modunlo 32. Khi đó, mỗi nhóm có $\frac{2016}{32}=63$ đỉnh. Mỗi lần thao tác, trong mỗi nhóm có đúng $\frac{64}{32}=2$ đỉnh được đổi màu và là số chẵn. Do đó, số đỉnh màu đỏ đã bị đổi màu của nhóm luôn là số chẵn, không cùng tính chẵn lẻ với số lượng đỉnh của nhóm ban đầu, là số lẻ. Vì vậy, không thể đổi màu tất cả các đỉnh sang đỏ được.

Bài toán 6. *Trên bảng có n điểm đôi một (không có ba điểm nào thẳng hàng) nối với nhau bởi các đoạn thẳng. Mỗi đoạn thẳng được tô bởi một trong n màu phân biệt. Với mỗi ba màu tùy ý, tồn tại ba điểm mà ba đoạn thẳng nối chúng được tô tương ứng ba màu đó. Hỏi giá trị của n có thể là*

a) $n=6$? b) $n=7$?

Lời giải. a) Câu trả lời phủ định. Giả sử ngược lại rằng ta có thể tô màu thỏa mãn đề bài. Xét một màu trong chúng, giả sử là màu xanh. Mỗi cạnh là cạnh của 4 tam giác có đỉnh trong số các điểm đã cho. Ngoài ra, có tất cả $C_5^2=10$ cặp hai đoạn thẳng khác màu xanh, và ứng với mỗi cặp như thế, cùng với cạnh màu xanh thì luôn có một tam giác nhận chúng làm ba cạnh.

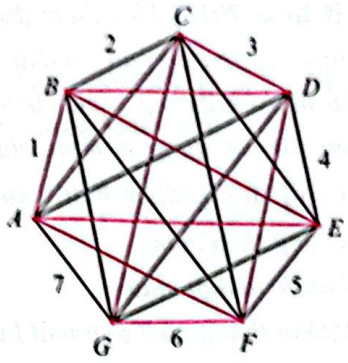
Suy ra phải có ít nhất 3 cạnh màu xanh, vì nếu không thì số tam giác nhận cạnh xanh là cạnh của nó sẽ không quá $2.4=8$, ít hơn số lượng ở trên.

Rõ ràng điều này cũng đúng với một màu tùy ý nên suy ra tổng số cạnh tạo thành ít nhất là $6.3=18$, trong khi chỉ có $C_6^2=15$ cạnh. Điều mâu thuẫn này cho ta thấy không thể tô được mô hình thỏa mãn với 6 màu phân biệt.

b) Câu trả lời khẳng định. Ta xét mô hình bên dưới đây với các điểm tạo thành đa giác đều mà các cạnh, đường chéo song song với nhau sẽ được đánh cùng một số.

Khi đó rõ ràng mỗi màu trong số các màu sẽ được dùng đúng 3 lần.

Ta dùng màu số 1 là màu tô AB, CG, DF; màu số 2 là màu tô BC, AD, GE, ... theo chiều kim đồng hồ đến màu số 7 là màu tô AG, BF, CE.



Ta xét các bộ ba khác màu và có chứa màu số 1, đó là các bộ sau đây:

Bộ ba màu	Bộ ba điểm	Bộ ba màu	Bộ ba điểm
1, 2, 3	A,F,D	1, 3, 4	C,D,F
1, 2, 4	B,C,G	1, 3, 5	C,D,G
1, 2, 5	A,B,C	1, 3, 6	A,B,E
1, 2, 6	A,B,D	1, 3, 7	A,B,F
1, 2, 7	C,E,G	1, 4, 5	D,E,F

Bộ ba màu	Bộ ba điểm
1, 4, 6	C,F,G
1, 4, 7	A,B,G
1, 5, 6	D,F,G
1, 5, 7	C,D,G
1, 6, 7	B,D,F

Do vai trò của các đỉnh và các màu là như nhau nên ta khẳng định được mỗi một bộ ba màu khác nhau trong 7 màu đã cho, luôn tồn tại bộ ba điểm mà ba đoạn thẳng nối chúng được tô bởi ba màu đó.

Được quét bằng CamScanner

Bình luận. Bài toán 6, không hỏi trực tiếp về cách tô màu điểm mà hỏi về số cách tô màu đoạn thẳng, tuy nhiên phương pháp xử lý các giả thiết và cách chỉ ra mô hình thỏa mãn bài toán rất gần gũi với chùm bài toán tô màu điểm mà nhóm tác giả đang nghiên cứu. Vì vậy chúng tôi mạnh dạn giới thiệu bài toán 16 vào mục tô màu điểm xem như là bước chuyển tiếp, là sự kết thúc đề tài "Tô màu điểm" và mở đầu đề tài tiếp theo mà nhóm chúng tôi sẽ nghiên cứu: "Tô màu cạnh".

Bài toán 7. [China 2016] *Một điểm được gọi là điểm hữu tỉ nếu các tọa độ của nó đều là số hữu tỉ. Với mỗi số nguyên dương n cho trước, chứng minh rằng có thể sử dụng n màu, đánh số từ $1,2,...,n$ để tô tất cả các điểm hữu tỉ sao cho hai điều kiện sau cùng thỏa mãn:*

+ Mỗi điểm được tô một màu.

+ Trên một đoạn thẳng có 2 đầu mút là các điểm hữu tỉ, với mỗi màu i thì luôn tìm được một điểm hữu tỉ thuộc đoạn thẳng này và được tô màu i.

Gợi ý. Ý tưởng tô màu: Đánh số các màu từ 1 đến $n-1$. Gốc tọa độ tô màu bất kỳ; còn các điểm hữu tỉ dạng $(x;y)\neq(0;0)$, ta tô màu i sao cho:

$$i\equiv \min\{v_2(x),v_2(y)\}(\mathrm{mod}\, n).$$

Ở đây kí hiệu $k=v_2(n)$ là số mũ đúng của 2 trong n nếu như n chia hết cho 2^k nhưng không chia hết cho 2^{k+1}. Đồng thời nếu $x=\frac{a}{b}(a,b\in\mathbb{Z},b\neq 0)$ thì ta có: $v_2(x)=v_2(a)-v_2(b)$. Ta sẽ chứng minh cách tô này thỏa mãn.

Đặt hai điểm $P\left(\frac{x_1}{z_1};\frac{y_1}{z_1}\right)$ và $Q\left(\frac{x_2}{z_2};\frac{y_2}{z_2}\right)$ với $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ là các số nguyên và $z_1z_2\neq 0$. Do P, Q phân biệt nên một trong hai số $x_1z_2-x_2z_1, y_1z_2-y_2z_1$ phải khác 0. Khi đó ta có thể giả sử rằng:

$$r=v_2(x_1z_2-x_2z_1)\leq v_2(y_1z_2-y_2z_1),$$

đặt thêm $s=v_2(z_1z_2)$. Với số i cho trước, chọn số nguyên $k>r$ sao cho $r-k-s\equiv i(\mathrm{mod}\, n)$ và với $t=2^{-k}$. Ta sẽ chỉ ra điểm R mà $R=tP+(1-t)Q$ được tô màu i.

Bài toán 8. *Một đa giác đều 9 cạnh có các đỉnh được tô bởi một trong hai màu: xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại hai tam giác có đỉnh là các đỉnh của đa giác đã cho và thỏa mãn hai điều kiện sau:*

+ Có diện tích bằng nhau.

+ Tất cả các đỉnh của hai tam giác đều được tô cùng một màu.

Gợi ý. Sử dụng nguyên lý Dirichlet để chỉ ra có 5 đỉnh được tô cùng màu, chúng tạo với nhau thành $C_5^3=10$ tam giác. Xét các phép quay góc $\frac{k2\pi}{9}, k=1,2,...,9$ quanh tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác thì 10 tam giác trên sẽ cho ta 90 tam giác tô cùng màu ở các vị trí khác nhau. Chú ý rằng $C_9^3=84<90$ nên sẽ tồn tại hai tam giác cùng màu là ảnh của nhau từ 1 trong 9 phép quay đã xét, tức là có cùng diện tích.

Bài toán 9. *Có 200 điểm phân biệt trên một đoạn thẳng. Ta tô màu 100 điểm đen và 100 điểm đỏ một cách tùy ý sao cho điểm đầu tiên bên trái và điểm cuối cùng bên phải có màu đen. Chứng minh ta có thể xóa đi một vài điểm liên tiếp, nhưng không phải tất cả 200 điểm, mà trong chúng số điểm đen và số điểm đỏ bằng nhau.*

Gợi ý. Theo hướng từ trái sang phải, ta đặt S_k là hiệu số giữa số điểm đen và số điểm đỏ trong k điểm đầu tiên. Ta có $S_1=1, S_{199}=-1$ (vì điểm cuối cùng màu đen nên trong 199 điểm trước nó đã có 99 điểm đen và 100 điểm đỏ).

Nhận xét, với mọi k, từ k sang $k+1$ thì hiệu số giữa số điểm đen và số điểm đỏ sẽ tăng 1 hoặc giảm 1. Do vậy, tồn tại $l\in\{2,3,...,198\}$ để $S_l=0$. Khi đó trong l điểm đầu tiên này, số điểm đen và số điểm đỏ bằng nhau.

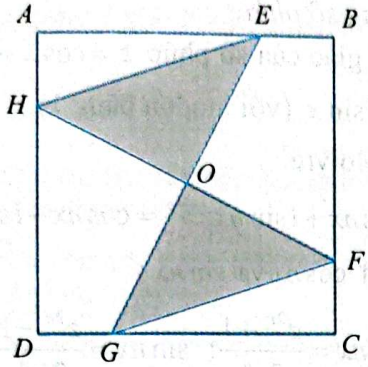
Được quét bằng CamScanner

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 111

PROBLEM. *The square $ABCD$ has area 80. The points E, F, G and H are on the sides of the square and so that $AE = BF = CG = DH$. How big is the area of the grey part, if $AE = 3EB$?*

Solution.



O be the intersection between HF and GE. We can show that the areas of $AEOH, EBFO, FCGO, GDHO$ are $\frac{1}{4}$ the area of the square; and that the areas of EOH, GFO are equal. (Why?) The area of AHE is

$$\frac{1}{2}AE \times AH = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}AB \times \frac{1}{4}AD$$

$$= \frac{3}{32} \text{ area of the square.}$$

Therefore, the area of the grey part is

$$2 \times \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{32}\right) = \frac{5}{16} \text{ area of the square,}$$

which is 25.

***Remark*:** This exercise is selected and adapted from a Kangaroo Math test.

TỪ VỰNG

square	*: hình vuông*
side	*: cạnh*
area	*: diện tích*

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*University of Education, VNU, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 109

BÀI TOÁN. *Một thầy giáo có 12 món quà, trong đó có 4 món quà loại I và 8 món quà loại II. Thầy giáo đặt quà vào 12 cái hộp giống hệt nhau, sau đó gói lại theo cách giống hệt nhau. Thầy chọn ngẫu nhiên các hộp rồi đưa cho 3 em học sinh, mỗi em sẽ nhận được 4 hộp quà. Tính xác suất để mỗi học sinh nhận được cả quà loại I và quà loại II.*

Lời giải. Số cách mà mỗi học sinh nhận được 4 hộp quà là $C_{12}^4 \times C_8^4$.

Kí hiệu 3 học sinh được nhận quà là A, B, C. Có 3 trường hợp mà ba học sinh nhận được quà loại I như sau:

(1, 1, 2), (1, 2, 1), và (2, 1, 1). Trường hợp (1, 1, 2) nghĩa là A nhận được 1 hộp quà loại I, B nhận được 1 hộp quà loại I và C nhận được 2 hộp quà loại I.

Trong trường hợp (1, 1, 2) thì số cách chọn là:

$$(C_4^1 \times C_8^3) \times (C_3^1 \times C_5^3).$$

Bởi tính đối xứng, ta thấy số cách mà mỗi học sinh sẽ nhận được cả hai loại quà là: $3 \times (C_4^1 \times C_8^3) \times (C_3^1 \times C_5^3)$. Do đó xác suất cần tìm là: $\frac{3 \times (C_4^1 \times C_8^3) \times (C_3^1 \times C_5^3)}{(C_{12}^1 \times C_8^4)}$ nó bằng $\frac{32}{55}$.

***Lưu ý*:** Bài tập này được sưu tầm, chuyển thể và dịch từ đề thi mẫu HAS tháng 8 năm 2024 (Đại học Quốc gia Hà Nội, Việt Nam).

Nhận xét. Kỳ này bạn *Nguyễn Hùng Cường*, xã Nhơn Mỹ, TX. An Nhơn, tỉnh **Bình Định** và bạn *Lê Bạch Hải Đăng*, 2B, Trường Quốc tế Song ngữ cấp 2,3 GIBS, TP.Graz, **Cộng hòa Áo** có bài dịch tốt. Xin hoan nghênh các bạn.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

Được quét bằng CamScanner



BÀI TOÁN 90. *Rút gọn biểu thức*

$$A=\sin 3x.\cos^3 x+\cos 3x.\sin^3 x.$$

Cách 1. *Khai triển* sin3x, cos3x:

$$A=\left(3\sin x-4\sin^3 x\right)\cos^3 x+\left(4\cos^3-3\cos x\right).\sin^3 x$$
$$=3\sin x.\cos^3 x-4\sin^3 x.\cos^3 x+4\cos^3 x.\sin^3 x-3\cos x.\sin^3 x$$
$$=3\sin x.\cos x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)$$
$$=\frac{3}{2}\sin 2x.\cos 2x=\frac{3}{4}\sin 4x.$$

Cách 2. *Hạ bậc* $\cos^3 x, \sin^3 x.$

$$A=\sin 3x\frac{1}{4}(\cos 3x+3\cos x)+\cos 3x.\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$$
$$=\frac{3}{4}(\sin 3x.\cos x+\sin x.\cos 3x)=\frac{3}{4}\sin 4x.$$

Cách 3. *Hạ bậc* $\sin^2 x, \cos^2 x.$

$$A=\sin 3x.\cos x.\cos^2 x+\cos 3x.\sin x.\sin^2 x$$
$$=\sin 3x.\cos x.\frac{1+\cos 2x}{2}+\cos 3x.\sin x.\frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(\sin 3x.\cos x+\cos 3x.\sin x)+\frac{1}{2}(\sin 3x.\cos x-\cos 3x.\sin x)\cos 2x$$
$$=\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{2}\sin 2x.\cos 2x=\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 4x$$
$$=\frac{3}{4}\sin 4x.$$

Cách 4. *Dùng nguyên hàm*

Đặt $f(x)=F'(x)=\left(\sin 3x.\cos^3 x+\cos 3x.\sin^3 x\right)'$

$$=\left(\sin 3x.\cos^3 x\right)'+\left(\cos 3x.\sin^3 x\right)'$$
$$=3\cos 3x.\cos^3 x+\sin 3x.3\cos^2 x(-\sin x)+\left(-3\sin 3x.\sin^3 x+\cos 3x.3\sin^2 x.\cos x\right)$$
$$=3\cos 3x.\cos^3 x-3\sin 3x.\cos^2 x.\sin x-3\sin 3x.\sin^3 x+3\cos 3x.\sin^2 x.\cos x$$
$$=3\left(\cos 3x.\cos x-\sin 3x.\sin x\right)=3\cos 4x.$$

Vậy $f(x)=F'(x)=3\cos 4x$

$$F(x)=\int f(x)dx=\int 3\cos 4x.\frac{1}{4}d(4x)=\frac{3}{4}\sin 4x+c.$$

Dễ thấy $c=0$. Tóm lại $F(x)=\frac{3}{4}\sin 4x.$

Cách 5. *Dùng số phức*

Dạng lượng giác của số phức $z=\cos x+i\sin x$ và $\overline{z}=\cos x-i\sin x$ (với modun bằng 1).

Công thức Moivre:

$$z^n=\cos nx+i\sin nx;\ \overline{z}^n=\cos nx-i\sin nx$$

Từ đây ta rút $\cos nx$ và $\sin nx$:

$$\cos nx=\frac{z^{2n}+1}{2z^n};\ \sin nx=\frac{z^{2n}-1}{2iz^n}.$$

Trong biểu thức $A=\sin 3x.\cos^3 x+\cos 3x.\sin^3 x$ biểu diễn $\sin 3x, \cos 3x, \sin x$ theo z ta được:

$$A=\frac{z^6-1}{2iz^3}.\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^3+\frac{z^6+1}{2z^3}.\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^3.$$

Sau khi rút gọn ta có: $A=\frac{3}{4}.\frac{z^8-1}{2iz^4}=\frac{3}{4}\sin 4x.$

ĐOÀN NHƯ TRIỆU

(Số 11/2A6, Chương Dương, TP. Hải Dương)

Nhận xét. Kỳ này các bạn *Huỳnh Trịnh Vĩnh Phúc*, 11A1, *Lê Nguyễn Bảo Trân*, 10E1, *Nguyễn Đặng Phương Vy*, 10A1, TH, THCS, THPT Lê Thánh Tông, **TP. Hồ Chí Minh** cũng đóng góp một số cách giải tương tự như các cách trên của bạn *Đoàn Như Triệu*. Xin hoan nghênh các bạn.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải BÀI TOÁN 92 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31/1/2025.

BÀI TOÁN 92. *Không dùng bảng số và máy tính cầm tay, hãy tính* $\tan 15^0$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

Được quét bằng CamScanner

Kết quả cuộc thi VIẾT CHUYÊN ĐỀ TOÁN CHÀO MỪNG 60 NĂM TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ (1964 - 2024)

LTS. Cuộc thi "*Viết chuyên đề toán chào mừng 60 năm Toán học và Tuổi trẻ*" trên Tạp chí TH&TT được khởi động từ tháng 3 năm 2024 đến ngày 25 tháng 11 năm 2024. Cuộc thi này được nhiều bạn đọc yêu Toán trên cả nước tham gia sôi nổi. Cuộc thi đã nhận được hơn *40 bài viết* của *30 tác giả* trên mọi miền đất nước. Sau khi xem xét kỹ, Hội đồng chấm đã thống nhất lựa chọn được *12 bài* của *14 tác giả* để trao giải gồm: **2 giải Nhất, 4 giải Nhì, 6 giải Ba.** Cụ thể như sau:

STT	Tên bài	Tác giả	Địa chỉ	Giải
1	Ứng dụng đạo hàm vào giải quyết bài toán thực tiễn.	*Nguyễn Hữu Tiến*	Khoa Kỹ thuật, Học viện PKKQ, Sơn Tây, Hà Nội.	Nhất
2	Điểm Dumpty trong tam giác và một số thí dụ áp dụng.	*Nguyên Trường Sơn*	Trường THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình.	Nhất
3	Ứng dụng một bài toán hình học trong chứng minh bất đẳng thức.	*Nguyễn Văn Bản*	Trường THCS Thanh Yên, Điện Biên.	Nhì
4	Tìm giới hạn của dãy số.	*Trần Xuân Đáng*	Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định.	Nhì
5	Một số phương pháp giải dạng toán tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất.	*Trần Văn Hạnh*	Trường Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi.	Nhì
6	Phát triển năng lực cho học sinh thông qua việc khai thác, phát triển một bài toán bất đẳng thức.	*Nguyễn Tiên Tiến*	Trường THPT Gia Viễn B, Ninh Bình.	Nhì
7	Định lý Turan và ứng dụng trong giải toán tổ hợp.	*Nguyễn Mạnh Quyền*	Trường THPT chuyên Nguyễn Chí Thanh, Đăk Nông.	Ba
8	Sử dụng máy tính cầm tay kết hợp với phương pháp nhân liên hợp giải phương trình vô tỉ.	*Chử Văn Tới*	Trường THCS Vũ Duệ, Lâm Thao, Phú Thọ.	Ba
9	Một số bài toán về mô tả tập hợp.	*Võ Hoàng Thành*	Trường ĐHSP TP. Hồ Chí Minh.	Ba
10	Nhân đọc lại một bài toán.	*Nguyễn Văn Xá*	Trường THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh.	Ba
11	Một phong cách học toán.	*Nguyễn Đức Tấn,* *Trần Quốc Luật*	TP. Hồ Chí Minh. Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh.	Ba
12	Sử dụng hệ thức Viète trong số học.	*Nguyễn Công Lợi,* *Hoàng Việt Dũng*	Trường THCS TTr. Quỳ Hợp, Nghệ An. Trường THCS Đặng Thai Mai, Nghệ An.	Ba

TH&TT xin được chúc mừng các tác giả đoạt giải. Các bạn đoạt giải nhớ gửi địa chỉ mới của mình về Tòa soạn hoặc liên hệ trực tiếp qua số điện thoại 024.35121607 để nhận Giấy Chứng nhận và Tặng phẩm của Tạp chí.

TH&TT

Được quét bằng CamScanner



BÀI TOÁN 98 (101 *problems in Algebra* – **T. Andrescu and Z. Feng**). *Cho n là số nguyên dương. Xét dãy số $a_0, a_1, ..., a_n$ với $a_0 = \frac{1}{2}$ và $a_k = a_{k-1} + \frac{a_{k-1}^2}{n}$, $k = 1, 2, ..., n$. Chứng minh rằng* $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$.

Lời giải. Cách 1. Ta chứng minh mệnh đề mạnh hơn: *Với $k = 1, 2, ..., n$ thì*

$$\frac{n+1}{2n-k+2} \overset{(**)}{<} a_k \overset{(*)}{<} \frac{n}{2n-k}.$$

Ta chứng minh bằng quy nạp.

+ Trước tiên ta chứng minh BĐT(*) ở vế phải.

Với $k = 1$ thì dễ thấy:

$$a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} = \frac{2n+1}{4n} < \frac{n}{2n-1}.$$

Vậy (*) đúng.

Giả sử $a_k < \frac{n}{2n-k}$, với số nguyên dương $k < n$.

Khi đó:

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{n}(n + a_k) < \frac{1}{2n-k}\left(n + \frac{n}{2n-k}\right)$$

$$< \frac{n(2n-k+1)}{(2n-k)^2} < \frac{n}{2n-k-1}$$

(vì $(2n-k)^2 > (2n-k)^2 - 1$

$= (2n-k-1)(2n-k+1)$).

Như vậy (*) đúng với mọi $k = 1, 2, ..., n$.

Đặc biệt, với $k = n$ thì

$$(*) \Leftrightarrow a_n < \frac{n}{2n-n} = 1.$$

+ Bây giờ ta chứng minh BĐT(**) ở vế trái.

Với $k = 1$ thì ta có:

$$a_1 = \frac{2n+1}{4n} > \frac{n+1}{2n+1}.$$

Vậy (**) đúng.

Giả sử $a_k > \frac{n+1}{2n-k+2}$ với số nguyên dương $k < n$. Khi đó:

$$a_{k+1} = a_k + \frac{a_k^2}{n} > \frac{n+1}{2n-k+2} + \frac{(n+1)^2}{n(2n-k+2)^2}.$$

Vậy:

$$a_{k+1} - \frac{n+1}{2n-k+1} > -\frac{n+1}{(2n-k+1)(2n-k+2)} + \frac{(n+1)^2}{n(2n-k+2)^2}$$

$$= \frac{n+1}{(2n-k+2)^2}\left[\frac{n+1}{n} - \frac{2n-k+2}{2n-k+1}\right]$$

$$= \frac{n+1}{(2n-k+2)^2}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n-k+1}\right] > 0.$$

Như vậy (**) đúng với mọi $k = 1, 2, ..., n$.

Đặc biệt, với $k = n$ thì

$$(**) \Leftrightarrow a_n > \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2-1}{n+2}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+2}$$

$$> 1 - \frac{1}{n}.$$

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào giải được bài này.

NHƯ HOÀNG

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31/1/2025.

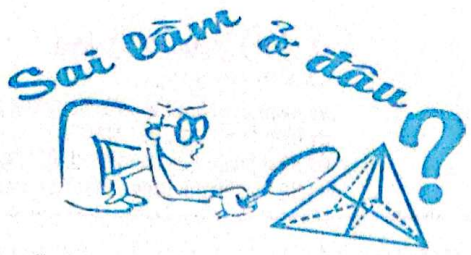
BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

BÀI TOÁN 100. *Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 1. Gọi O là tâm của tam giác. M là điểm di động trên cạnh AB, MO cắt AC tại N. Chứng minh*

$$\frac{\sqrt{3}}{9} \le S_{\Delta AMN} \le \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

KHÁNH HỮU (*Hà Nội*)

Được quét bằng CamScanner



GIẢI ĐÁP: KẾT QUẢ ĐÃ ĐÚNG CHƯA

(Đề đăng trên TH&TT số 566, tháng 8 năm 2024)

Phân tích sai lầm.

Kết quả không đúng, lời giải ở mỗi trường hợp khi tìm được m đã không kiểm tra đường thẳng (d) có cắt các đoạn thẳng OB (Trường hợp 1) và cắt đoạn OA (Trường hợp 2) hay không!

Lời giải cần bổ sung như sau:

Với $m=\dfrac{-1}{4}$ thì tung độ điểm C là $\dfrac{3}{2}\notin[-3;0]$ nên $m=\dfrac{-1}{4}$ (loại). Với $m=2$ thì hoành độ điểm D là

$$\frac{3}{2}\in[0;6]\Rightarrow m=2 \text{ (thoả mãn).}$$

Có thể không cần xét 2 trường hợp khi đưa ra nhận xét sau:

Ta có: $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}.OA.OB=\dfrac{1}{2}.6.3=9;$

$$S_{OAM}=\frac{1}{2}.2.6=6>\frac{9}{2}=\frac{1}{2}S_{OAB}$$

nên đường thẳng (d) chia tam giác OAB thành hai phần có diện tích bằng nhau thì đường thẳng (d) cắt đoạn OA tại $C\left(\dfrac{2m+2}{m+2};0\right)$. Khi đó:

$$S_{AMC}=\frac{1}{2}S_{OAB}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}.2.AC=\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow AC=\frac{9}{2}\Leftrightarrow 6-\frac{2m+2}{m+2}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow m=2.$$

Với $m=2$ thì hoành độ điểm D là $\dfrac{3}{2}\in[0;6]$ (điểm D thuộc đoạn OA). Vậy $m=2$.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào phát hiện được sai lầm của lời giải đã cho.

KIHIVI

KẾT QUẢ NÀO?



BÀI TOÁN. *Cho* $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$ *với* $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0.$

Tính $\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Lời giải của bạn Hà. Vì $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$ nên $\sin\alpha<0$. Do đó $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2 x}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Suy ra: $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$$=2.\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right).\frac{1}{3}=-\frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

Ta lại có: $\cos^2 2\alpha=1-\sin^2 2\alpha$

$$=1-\left(-\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)^2=\frac{49}{81}.$$

Vì $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$ nên $-\pi<2\alpha<0$, dẫn tới $\cos 2\alpha\in(-1;1)$. Do đó $\cos 2\alpha=\pm\dfrac{7}{9}$.

Nếu $\cos 2\alpha=\dfrac{7}{9}$ thì

$$\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=-\frac{4\sqrt{2}}{9}.\frac{1}{2}-\frac{7}{9}.\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{4\sqrt{2}+7\sqrt{3}}{18}.$$

Nếu $\cos 2\alpha=-\dfrac{7}{9}$ thì

$$\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=-\frac{4\sqrt{2}}{9}.\frac{1}{2}+\frac{7}{9}.\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{4\sqrt{2}-7\sqrt{3}}{18}.$$

Vậy $\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{4\sqrt{2}+7\sqrt{3}}{18}$

hoặc $\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{4\sqrt{2}-7\sqrt{3}}{18}.$

Theo em, lời giải của bạn Hà có đúng không, vì sao ?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Được quét bằng CamScanner

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 570 (12.2024)
Tòa soạn : 187B, Giảng Võ, Đống Đa, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607,
ĐT Phát hành: 024.35142648, 024.35662701
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
GS. ĐOÀN QUỲNH
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
NGUYỄN TIẾN THANH
Tổng Biên tập NXBGD Việt Nam
PHẠM VĨNH THÁI
Viện trưởng Viện nghiên cứu Sách và HLGD
LÊ HỒNG SƠN

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. TRẦN HỮU NAM
Phó tổng biên tập : CN. TRẦN THỊ KIM CƯƠNG
TS. LÊ HỒNG MAI
Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOÃN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Phạm Việt Bắc – Kỹ thuật sử dụng đồng nhất hệ số trong giải hệ phương trình.

5 **Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh vào lớp 10, THPT chuyên Bắc Ninh, năm học 2024 - 2025.**

9 **Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 TP. Quảng Ngãi, năm học 2023 - 2024.**

10 **Hướng dẫn giải đề số 1 - Thử sức trước kỳ thi THPTQG.**

15 **Diễn đàn dạy học toán**
Lê Tài Thắng – Bài toán về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số có chứa dấu giá trị tuyệt đối (kỳ 2).

20 **Đề ra kỳ này** *Problems in This Issue*
T1/570, ..., T12/570, L1/570, L2/570.

22 **Giải bài kì trước**
Solutions to Previous Problems
T1/566, ..., T12/566, L1/566, L2/566.

32 **Phương pháp giải toán**
Cao Nguyễn Minh Hiền – Cao Minh Quang - Tô màu điểm trong bài toán tổ hợp.

43 **Tiếng Anh qua các bài toán** – Bài số 111 – Bài dịch số 109.

44 **Nhiều cách giải cho một bài toán** – Giải bài toán 90 – Đề bài toán 92.

45 **Kết quả cuộc thi *Viết chuyên đề toán chào mừng 60 năm Toán học và Tuổi trẻ*.**

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay** – Giải bài toán 98. Đề bài toán 100.

47 **Sai lầm ở đâu?**

Biên tập: LÊ MAI, NHƯ HOÀNG
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Trị sự, phát hành: HOÀNG THỊ KIM PHƯỢNG, TRẦN THỊ MINH HIỀN
Thiết kế, chế bản: MINH HÒA

Được quét bằng CamScanner

TƯỞNG NHỚ GIÁO SƯ, NHÀ GIÁO NHÂN DÂN ĐOÀN QUỲNH

(Tiếp theo bìa 4)

Các bạn trẻ yêu toán nên tìm đọc cuốn *"Topo là gì"* của GS. *Đoàn Quỳnh* viết cùng GS. Hoàng Xuân Sính và cuốn *"Số phức với hình học phẳng"* của ông.

Xê-mi-na của tổ hình học đã được tổ chức thường xuyên từ thập niên 1970 đã góp phần đáng kể để nâng cao trình độ cho các học viên trong tổ, chuẩn bị cho các bậc học cao hơn.

Ông đã tham gia tích cực vào việc bồi dưỡng học sinh giỏi, tuyển chọn đội học sinh đi thi IMO và đã 5 lần làm Trưởng, Phó đoàn dẫn học sinh đi thi IMO. Nhiều học sinh trong đoàn do thầy *Đoàn Quỳnh* làm Trưởng, Phó đoàn nay đã trở thành những nhà toán học nổi tiếng như GS. *Ngô Bảo Châu*, GS. *Đinh Tiến Cường*, GS. *Nguyễn Tiến Dũng*, ...

Ông còn tham gia vào nhiều hoạt động chuyên môn khác nhau của Bộ Giáo dục và Đào tạo, là Chủ tịch Hội đồng bộ môn Toán của Bộ Giáo dục và Đào tạo (1992 - 2006), Tổng Chủ biên sách giáo khoa THPT (2006), Chủ tịch Hội đồng thẩm định SGK cấp THCS (chương trình năm 2018).

Với những cống hiến to lớn cho ngành giáo dục, thầy *Đoàn Quỳnh* đã được nhà nước phong hàm Giáo sư năm 1984 và danh hiệu Nhà giáo Nhân dân năm 2002.

Tôi được biết thầy *Đoàn Quỳnh* từ năm 1968 khi tôi vào học khoa Toán ĐHSP Hà nội, lúc đó gọi là trường ĐHSP Hà Nội 2. Do đi sơ tán nên các khoa xã hội được tách ra gọi là ĐHSP Hà Nội 1, còn các khoa tự nhiên lập thành ĐHSP Hà Nội 2, do GS. *Nguyễn Cảnh Toàn* làm Hiệu trưởng. Nơi sơ tán là một số xã tại Ứng Hoà, ven sông Đáy. Khi đó thầy trò sống cùng với dân, rất gần gũi. Thầy *Quỳnh* dạy chúng tôi môn Đại số tuyến tính và Hình học Giải tích kết hợp. Đến khi tốt nghiệp tôi về tổ Hình học công tác, tham gia Xê-mi-na của tổ do thầy *Quỳnh* chủ trì. Tôi viết một tiểu luận, lúc đó gọi là tiểu luận cấp 1 *"Tính định hướng và độ cong của Đa tạp Grassman"*, bây giờ tôi nghĩ khi đó có thể viết một bài báo về vấn đề đó. Khi tôi học NCS ở Moscow, lĩnh học bổng ở Sư phạm Lê nin, nhưng thầy hướng dẫn là GS. *Vassiliev A. M* ở trường Lomonosov, thầy *Quỳnh* nói là GS. *Vassiliev* là người hỏi thi Mi-ni-mum môn Hình học, khi thầy *Quỳnh* học NCS. Thầy *Quỳnh* là một người nhẹ nhàng, kín đáo, phảng phất chất Huế, luôn quan tâm đến các thành viên trong tổ, được toàn tổ yêu mến, kính trọng. Trong dịp Tết Nguyên đán những thập niên 70 - 80 - và đầu những năm 90 của thế kỷ trước, thầy thường tổ chức đi thăm các thành viên trong tổ (bằng xe đạp), tạo nên một bầu không khí ấm cúng, vui vẻ. Nhưng trong công việc thầy rất nghiêm túc. Tôi nhớ có một thành viên trong tổ thi NCS môn chuyên ngành topo với thầy, nói với tôi khi tôi hỏi kết quả, anh ấy nói rằng "Thầy *Quỳnh* cho mình biết kết quả rồi, cậu được 6 điểm, không đỗ". Thầy *Quỳnh* có tính độc lập rất cao trong cuộc sống, không muốn làm phiền đến ai. Môn Hình học vi phân mà thầy dạy hầu hết sinh viên đều sợ, kêu khó. Hôm đi viếng thầy, có người còn nhắc lại câu của thầy *Quỳnh* trước lớp là *"Tôi rất khó hiểu là tại sao các anh chị lại thấy khó hiểu bài"*.

Năm ngoái 2023, tôi viết xong cuốn sách *"Lịch sử Hình học - Những nét cơ bản"* đã in ở NXB ĐHQG Hà Nội. Khi mới viết xong, tôi mang bản thảo đến nhờ thầy đọc góp ý. Thầy đọc rất cẩn thận và trao đổi chi tiết. Chẳng hạn khi đọc đến phần Lịch sử Hình học xạ ảnh, thầy gọi điện cho tôi và nói *"Cậu xem lại khái niệm "cái tuyệt đối" là do ông F. Klein hay ông A. Cayley đưa ra?"*. Rồi hôm sau người nhà nói là thầy tìm kiếm trên giá sách để check lại điều đó cho chính xác, và chẳng may bị ngã. Tôi nghe mà cảm thấy rất xúc động.

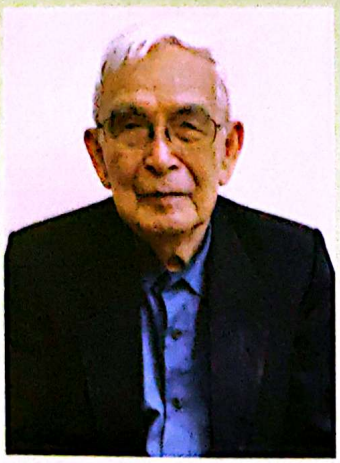
Hôm thứ bảy cuối tháng 10 năm nay, thầy *Nguyễn Xuân Liêm* (sinh năm 1936), đồng nghiệp của thầy *Quỳnh* ở khoa Toán, sống ở thành phố Hồ Chí Minh, ra Hà Nội, bảo tôi dẫn đến nhà thầy *Quỳnh* chơi. Thầy *Quỳnh* nói với thầy *Liêm* là: *"Tôi yếu rồi anh Liêm ạ, nhưng tôi đã sẵn sàng cho mọi việc"*. Ngay chiều hôm đó thầy vào Bệnh viện Hữu nghị và sau hơn hai tuần, thầy đã đi xa.

Nhắc lại một vài kỷ niệm như một nén tâm nhang thắp cho người Thầy đáng kính của nhiều thế hệ sinh viên khoa Toán ĐHSP chúng tôi, GS. NGND *Đoàn Quỳnh*.

Được quét bằng CamScanner

TƯỞNG NHỚ GIÁO SƯ, NHÀ GIÁO NHÂN DÂN ĐOÀN QUỲNH

PGS.TS. *Nguyễn Doãn Tuấn*
(Nguyên Phó Chủ nhiệm Bộ môn Hình học - ĐHSP Hà Nội)



GS.NGND. Đoàn Quỳnh
(1933 - 2024)

Ngày 12 tháng 11 năm 2024, GS.NGND. *Đoàn Quỳnh* đã ra đi vào cõi vĩnh hằng, để lại bao tiếc thương cho gia đình, cho nhiều thế hệ học trò, đồng nghiệp, cơ quan đoàn thể và tất cả những ai đã từng quen biết thầy. Trong bài viết này, tôi muốn chia sẻ với bạn đọc Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ chân dung của một người thầy suốt đời tận tụy vì sự nghiệp Toán học và sự nghiệp giáo dục toán học với tư cách một học trò, một thành viên lâu năm trong bộ môn Hình học mà thầy làm chủ nhiệm.

GS. *Đoàn Quỳnh* sinh ngày 27/8/1933 tại Huế trong một gia đình trí thức. Cha của ông là nhà giáo *Đoàn Nồng*, một trí thức tây học, đã dạy học tại Trường Khải Định và là Chánh Thanh tra giáo dục (Đốc học) tại Huế trước năm 1945. Sau cách mạng tháng Tám, cụ ra dạy học tại vùng tự do, là Hiệu trưởng Trường Lam Sơn (Thanh Hoá) giai đoạn 1946-1954. Hoà bình lập lại thầy *Đoàn Nồng* ra Hà Nội, làm Hiệu phó Trường Chu Văn An, rồi từ năm 1962 cụ về dạy Pháp Văn tại ĐHSP Hà Nội cho đến khi nghỉ hưu năm 1968. Cụ có tham gia biên soạn cuốn từ điển Pháp - Việt cùng với tập thể biên soạn gồm các tác giả do cụ *Lê Khả Kế* chủ biên (NXB Khoa học Xã Hội,1988). Khi dạy học ở trường Khải Định, thầy *Đoàn Nồng* có nhiều học trò về sau nổi tiếng: Văn thơ có *Tố Hữu*, *Xuân Diệu*, *Cù Huy Cận*, ... Võ có Đại tá nổi tiếng *Hà Văn Lâu*, Trung tướng Quân đội *Cao Văn Khánh*, ... Mẹ của GS. *Đoàn Quỳnh* là cụ *Đặng Thị Hiếu*, vốn là một nữ sinh xinh đẹp trường Đồng Khánh, nhưng không may, cụ mất sớm khi mới 35 tuổi.

Thuở nhỏ, GS. *Đoàn Quỳnh* sống và học tiểu học tại Huế. Sau năm 1945, ông ra Thanh Hoá cùng gia đình và học trung học tại Trường Lam Sơn. Trong số bạn học cùng lớp với ông có GS. Sử học *Trần Quốc Vượng*. Ông vào học chuyên ngành Toán khoá 1954-1956 tại Trường đại học Khoa học Cơ bản và Sư phạm Cao cấp thuộc Khu học xá TW đóng tại Nam Ninh, Trung Quốc. Sau khi tốt nghiệp năm 1956, ông giảng dạy ở tổ Hình học, khoa Toán, Đại học Sư phạm Hà Nội cho đến khi về hưu năm 2003.

Năm 1961, ông được cử đi học tại khoa Toán, Đại học Tổng hợp Lomonosov tại Moscow (Liên xô cũ) dưới sự hướng dẫn của GS. *P. T. Rashevsky*. Trong thời gian học và tham gia Xê-mi-na hình học ở đó đã viết một số bài báo, trong đó có bài *"Đa thức Poincaré của các không gian Riemann thuần nhất compact với nhóm dừng bất khả quy"* dài 60 trang, đăng trong *"Những công trình của Xê-mi-na hình học"*, năm 1968 - góp phần vào việc phân loại nhóm Lie từ thời *E. Cartan* khởi xướng, được nhiều người trích dẫn.

Về nước ông tham gia giảng dạy cho sinh viên khoa Toán, ĐHSP Hà Nội tại nơi sơ tán ở Hưng Yên, sau đó ở Hà Tây trong thời kỳ chiến tranh leo thang của Mỹ ra miền Bắc. Năm 1967, nhà toán học nổi tiếng thế giới người Pháp *A. Grothendieck*, người được giải thưởng Fields năm 1966, đã đến thăm Việt Nam và giảng bài, ông là một trong những người phiên dịch ấn tượng trong thời gian giáo sư người Pháp ở Việt Nam.

Ông làm chủ nhiệm bộ môn Hình học của khoa Toán từ năm 1967 đến khi nghỉ hưu. Ông tham gia giảng dạy, hướng dẫn cao học, hướng dẫn NCS bảo vệ thành công luận án TS, chủ biên nhiều giáo trình Toán được dùng nhiều năm cho ĐHSP Hà Nội và nhiều trường ĐHSP khác trên cả nước như giáo trình *Đại số tuyến tính và hình học giải tích*, *Hình học Afin và hình học Euclide*, *Hình học xạ ảnh*, *Giáo trình hình học vi phân*, ...

(Xem tiếp bìa 3)

Giấy phép XB số 534/GP-BTTTT cấp ngày 19.11.2020; Mã số: 8BT12M24
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 12 năm 2024
Giá: 18.000 đồng
Mười tám nghìn đồng

Được quét bằng CamScanner